Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável: Fabio Martins de Leonardo

Conexões com a Matemática

1

Ensino Médio

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

PNLD
• 2018
• 2019
• 2020
FNDE
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
VENDA PROIBIDA

POLÍTICA PÚBLICA DOS
PROGRAMAS DO LIVRO
1937-2017
80 ANOS
FNDE
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

MODERNA

Educador,

Este livro que você está recebendo integra o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Trata-se de um conteúdo que passou por uma criteriosa avaliação do Ministério da Educação, para disponibilizar às escolas públicas brasileiras um material de qualidade.

É importante lembrar que este livro é reutilizável, ou seja, deve ser recolhido ao final do ano letivo para a utilização no próximo ano até a conclusão do ciclo, no final de 2020. Assim, recomenda-se que seja abordada em sala de aula a importância da conservação do livro para a utilização durante todo o ciclo. No caso deste manual, no caso de mudança do professor, é importante que o material permaneça na escola.

Por fim, caso você identifique alguma inconsistência neste material, ela pode ser comunicada ao FNDE por meio do telefone 0800-616161 ou no contato constante em www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico.

Bom trabalho!

Conexões com a Matemática

1

Ensino Médio

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável: Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

3ª edição

São Paulo, 2016

MODERNA

Elaboração dos originais

Alexandre Raymundo
Bacharel e licenciado em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu de São Paulo. Professor em escolas particulares no Brasil e na Turquia.

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Débora Regina Yogui
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Enrico Briese Casentini
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Flávia Renata Pereira de Almeida Fugita
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Juliane Matsubara Barroso
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professora em escolas públicas e particulares de São Paulo por 10 anos. Editora.

Kátia Takahashi
Licenciada em Ciências pelo Centro Universitário Sant'Anna. Professora em escolas particulares de São Paulo por 9 anos. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Mara Regina Garcia Gay
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professora em escolas públicas de São Paulo por 17 anos. Editora.

Osvaldo Shigueru Nakao
Doutor em Engenharia Civil (área de concentração: Engenharia de estruturas) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Edição de texto: Dario Martins de Oliveira, Débora Regina Yogui, Enrico Briese Casentini, Juliana Ikeda
Assistência editorial: Roberto Paulo de Jesus Silva
Preparação de texto: ReCriar editorial
Gerência de *design* e produção gráfica: Sandra Botelho de Carvalho Homma
Coordenação de produção: Everson de Paula
Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Mariza de Souza Porto, Adriano Moreno Barbosa
Capa: Douglas Rodrigues José
Foto: Reflexão do céu azul na janela de vidro curvilínea do prédio © Philippe Lejeanvre/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Camila Ferreira Leite, Cristiane Gonçalves Cabral
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Edição de infografia: Luiz Iria, Priscilla Boffo, Otávio Cohen
Coordenação de revisão: Adriana Bairrada
Revisão: Rita de Cássia Sam, Thiago Dias
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Marcia Sato
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Fabio N. Precendo, Hélio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Viviane Pavani
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. — 3. ed. — São Paulo : Moderna, 2016.

Obra em 3 v.
Bibliografia
"Componente curricular: Matemática".

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

16-01379 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2016
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta coleção é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma obra de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo os conceitos com uma imagem. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e com a *Autoavaliação*.

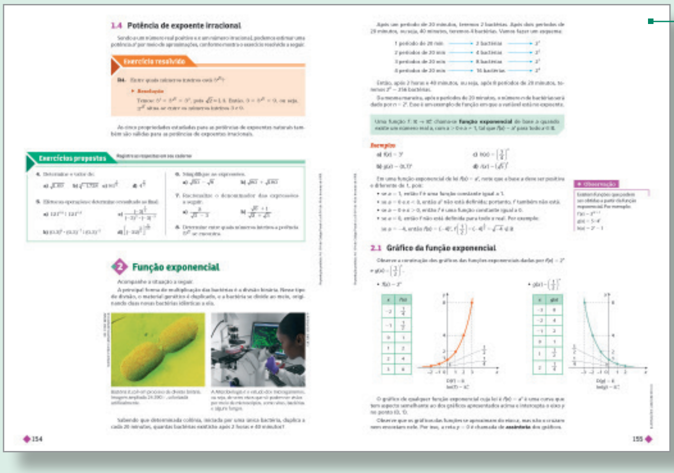
As seções *Pesquisa e ação*, *Compreensão de texto* e *Sugestões de leitura* complementam e enriquecem a obra.

Com esta coleção, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do aluno.

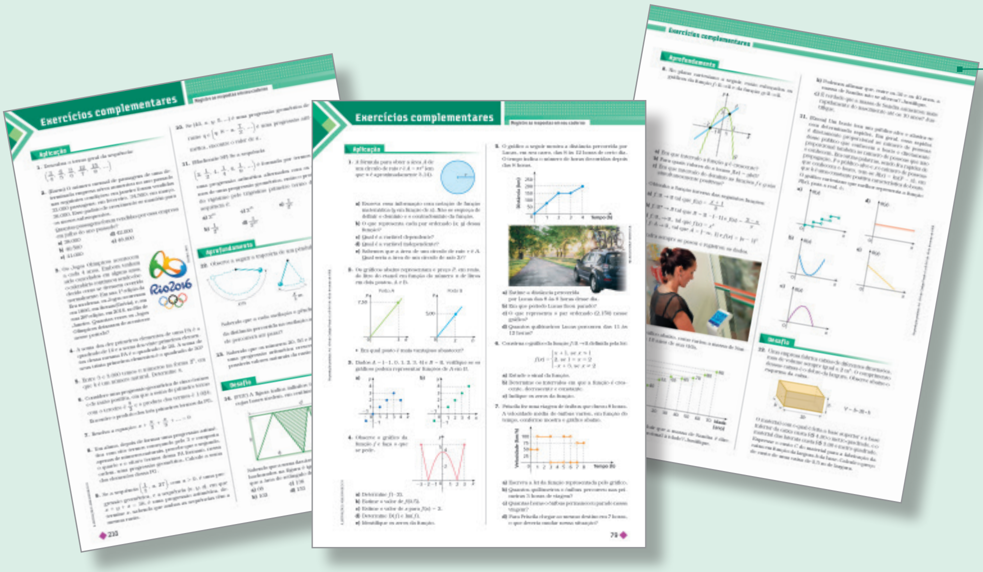
Os editores

Organização da Coleção

Abertura do capítulo
- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere os conceitos abordados no capítulo.

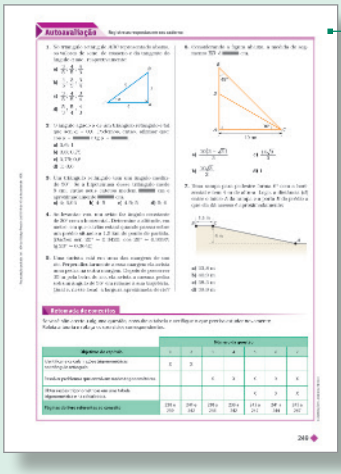


Apresentação dos conteúdos
- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.



Exercícios complementares
- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.

Ícone de atividade em grupo



Autoavaliação
Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Pesquisa e ação
Diferentes atividades práticas de realização em grupo relacionadas com o tema abordado no capítulo, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Compreensão de texto
Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.
Nessa seção, os alunos encontram mais uma oportunidade de desenvolver uma atividade em grupo.

Sugestões de leitura
Indica-se a leitura de livros ficcionais cujos temas foram estudados no livro. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura.

Sumário

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados

1. Introdução ... 10
2. Coleta de dados ... 14
3. Organização e apresentação de dados ... 16
Exercícios complementares ... 28
Autoavaliação ... 30
Pesquisa e ação ... 31
Compreensão de texto ... 32

Capítulo 2 Conjuntos

1. Conjuntos ... 34
2. Operações com conjuntos ... 39
3. Conjuntos numéricos ... 42
4. Intervalos ... 49
Exercícios complementares ... 52
Autoavaliação ... 53

Capítulo 3 Funções

1. Conceito de função ... 54
2. Gráfico de uma função ... 61
3. Análise de gráficos de funções ... 66
4. Função polinomial ... 71
5. Funções definidas por mais de uma sentença ... 72
6. Função inversa ... 74
Exercícios complementares ... 79
Autoavaliação ... 81
Compreensão de texto ... 82

Capítulo 4 Função afim

1. Função afim ... 84
2. Gráfico da função afim ... 87
3. Inequações ... 96
Exercícios complementares ... 103
Autoavaliação ... 105
Pesquisa e ação ... 106

Capítulo 5 Função quadrática

1. Função quadrática ... 107
2. Gráfico da função quadrática ... 111
3. Construção do gráfico da função quadrática ... 122
4. Inequações ... 126
Exercícios complementares ... 132
Autoavaliação ... 134

Capítulo 6 Função modular

1. Módulo ou valor absoluto de um número real ... 135
2. Função modular ... 138
3. Equações modulares ... 142
4. Inequações modulares ... 143
Exercícios complementares ... 146
Autoavaliação ... 147

Capítulo 7 Função exponencial

1. Introdução ao estudo da função exponencial ... 149
2. Função exponencial ... 154

3. Equações exponenciais e sistemas 159
4. Inequações exponenciais 161
Exercícios complementares 163
Autoavaliação 164
Pesquisa e ação 165
Compreensão de texto 166

Capítulo 8 Função logarítmica

1. Logaritmo 169
2. Propriedades operatórias dos logaritmos 172
3. Função logarítmica 176
4. Equações logarítmicas e sistemas 181
5. Inequações logarítmicas 183
Exercícios complementares 185
Autoavaliação 187

Capítulo 9 Sequências

1. Sequências e padrões 188
2. Progressões aritméticas 193
3. Progressões geométricas 200
4. Problemas que envolvem PA e PG 208
Exercícios complementares 210
Autoavaliação 211

Capítulo 10 A semelhança e os triângulos

1. Proporcionalidade entre segmentos 214
2. Semelhança 218
3. Teorema de Pitágoras 225
Exercícios complementares 230
Autoavaliação 232
Pesquisa e ação 233
Compreensão de texto 234

Capítulo 11 Trigonometria no triângulo retângulo

1. Razões trigonométricas 238
2. Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis 242
3. O uso da calculadora e da tabela trigonométrica 245
Exercícios complementares 248
Autoavaliação 249

Sugestões de leitura 250
Respostas 254
Lista de siglas 269
Bibliografia 270

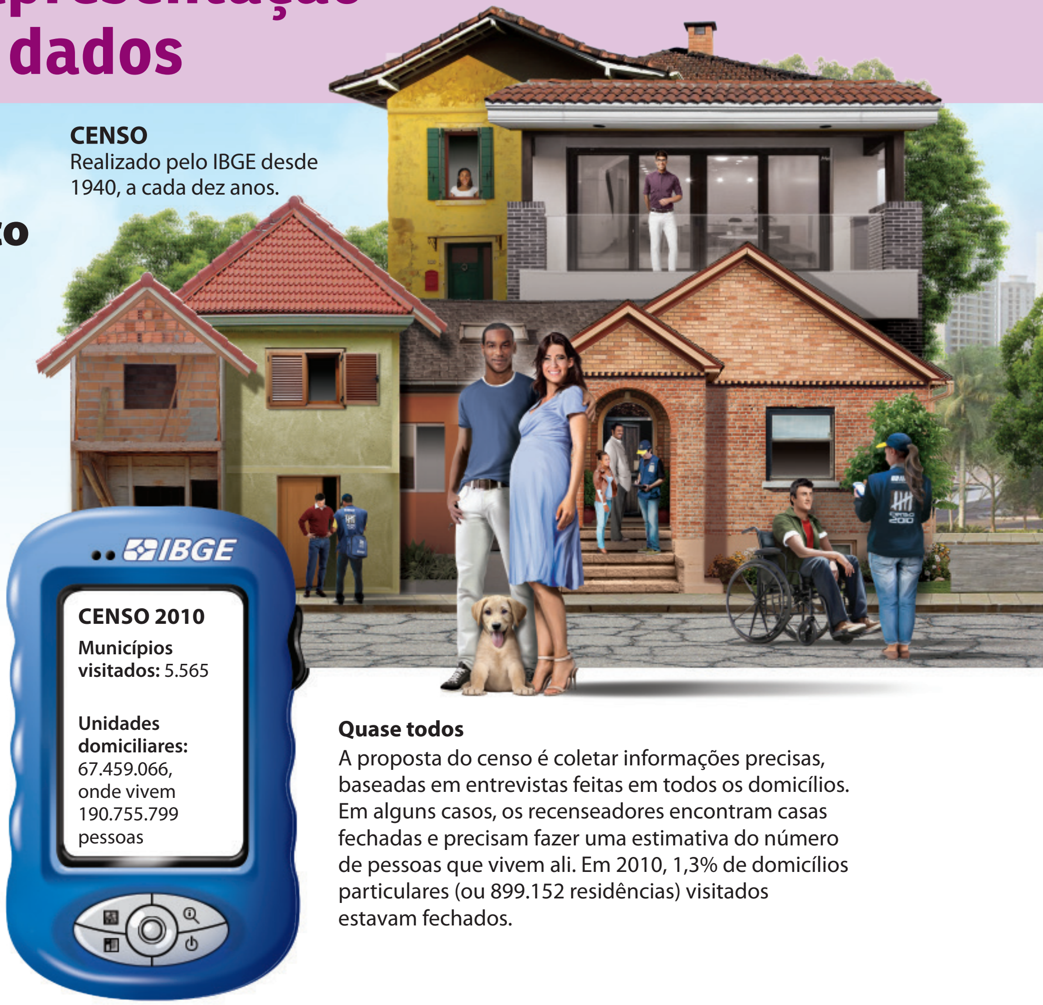
Capítulo 1

Organização e apresentação de dados

O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem

A cada 10 anos, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) realiza o censo demográfico no Brasil. Agentes credenciados visitam todas as residências para colher informações sobre os habitantes. Anualmente, o IBGE também realiza a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), cujo objetivo é visitar determinado número de municípios para coletar características demográficas e socioeconômicas da população.

CENSO
Realizado pelo IBGE desde 1940, a cada dez anos.



CENSO 2010

Municípios visitados: 5.565

Unidades domiciliares: 67.459.066, onde vivem 190.755.799 pessoas

Quase todos
A proposta do censo é coletar informações precisas, baseadas em entrevistas feitas em todos os domicílios. Em alguns casos, os recenseadores encontram casas fechadas e precisam fazer uma estimativa do número de pessoas que vivem ali. Em 2010, 1,3% de domicílios particulares (ou 899.152 residências) visitados estavam fechados.

Anos de trabalho

Uma operação como o censo movimenta milhares de pessoas.
A linha do tempo a seguir é baseada no tempo gasto na organização e realização do Censo Demográfico 2010.

Planejamento

O censo começa a ser planejado dois anos antes, com reuniões que visam discutir a metodologia, os conceitos e os valores que vão guiar a pesquisa. Ao todo, 228 mil pessoas foram contratadas e treinadas para vagas temporárias entre 2008 e 2010.

janeiro de 2008 — julho de 2009

Preparação

Antes de partir para as ruas de todo o país, o IBGE realiza testes em cidades pequenas para verificar possíveis erros na metodologia. Em seguida, passa por todas as ruas de todas as cidades para atualizar e corrigir o banco de dados do instituto. Essa etapa é essencial para a atualização dos mapas do Brasil.

julho de 2009 — agosto de 2010

Coleta

Na maior parte dos domicílios, o agente do IBGE aplica o questionário básico. Em cerca de 10%, ele aplica um questionário mais específico e detalhado. Em seguida, todas as informações registradas pelos recenseadores são transmitidas para os postos de coleta implantados em todos os municípios.

agosto a outubro de 2010

ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO BARBOZA

PNAD
Realizada pelo IBGE desde 1967, anualmente, exceto nos anos em que ocorre o censo.

PNAD 2014

Municípios visitados:
1.100

Unidades domiciliares:
151.291, onde vivem 362.627 pessoas

População (estimativa):
203,2 milhões

IBGE

Pesquisa completa
Assim como o censo, a PNAD investiga temas como educação, emprego, arranjos familiares e características do domicílio. A ênfase temática pode variar de ano para ano. Os resultados podem ajudar na formulação de políticas públicas e na destinação de recursos públicos ou mostrar tendências culturais e sociais.

Amostragem
Na PNAD de 2014, menos de 0,2% da população foi consultada, mas o IBGE divulgou tendências e estatísticas que valem para todo o país. Para selecionar os domicílios participantes da pesquisa, o IBGE adota uma série de critérios. Veja alguns deles:

- As nove principais regiões metropolitanas brasileiras são visitadas todos os anos.
- O restante das cidades é dividido em grupos com população semelhante. Distritos e municípios pequenos podem ser agrupados. Em cada um dos grupos, são visitados dois municípios, escolhidos aleatoriamente.
- Todos os municípios também são divididos por setores (bairros, regiões) e, em seguida, por unidades domiciliares (lares, asilos e outros tipos de residência permanente). Agentes do IBGE visitam apenas cinco setores de cada município.
- O número de domicílios visitados e a fórmula de expansão, cálculo que dá origem às estimativas finais, variam de acordo com a população local.

Fonte: IBGE. Disponível em <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 17 fev. 2016.

Apuração

Dos postos de coleta, a informação chega aos bancos de dados do IBGE, onde começa a ser apurada. Nessa etapa, é hora de cruzar dados, avaliar erros e fazer todos os cálculos que vão dar origem aos resultados. É preciso muito rigor nessa etapa.

outubro de 2010 — **abril de 2011**

Divulgação

Nos meses seguintes, o IBGE começa a divulgar tabelas com os resultados do censo. As análises e os relatórios são publicados aos poucos, de acordo com os temas pesquisados. O retrato completo do país só fica pronto anos depois.

abril de 2011 — **dezembro de 2013**

Objetivos do capítulo

- Aplicar razão, proporção, porcentagem e critérios de arredondamento.
- Reconhecer população, amostra e variáveis.
- Construir e analisar as representações tabular e gráfica.
- Obter conclusões com base na análise dos dados coletados.

1 Introdução

Frequentemente temos de enfrentar situações que exigem estudo para que possamos melhor compreendê-las ou planejar decisões. E, para estabelecer conclusões adequadas, realizar previsões confiáveis ou tomar decisões acertadas, é preciso que os dados coletados se transformem em informações significativas.

Neste capítulo, aplicando conceitos matemáticos e estatísticos, estudaremos algumas formas de obter, organizar e apresentar dados que facilitam a análise de uma situação.

1.1 A necessidade de dados para compreender melhor uma situação

Rosa foi contratada recentemente como coordenadora pedagógica da Escola Aprender. Para analisar e aprimorar o desempenho das turmas, ela quer conhecer o perfil dos alunos do Ensino Médio com os quais trabalhará. Ela sabe que, no total, são 500 alunos matriculados. Como Rosa poderá traçar esse perfil?

Como já comentamos, para melhor compreender um fenômeno ou uma situação, é necessário obter dados a respeito dos aspectos relevantes desse fenômeno e, depois, organizá-los e analisá-los corretamente.

A Estatística, cujo objetivo principal é auxiliar na tomada de decisões em situações de incerteza, é uma metodologia científica para obtenção, organização e análise de dados originados nas mais diversas áreas do conhecimento e em fatos do cotidiano.

Os resultados de uma investigação estatística podem provocar transformações importantes, como a mudança de conceitos ou procedimentos de *marketing*, a reformulação ou, mesmo, a retirada de produtos do mercado, assim como levar à criação de novas estratégias de ação industrial e mercadológica.

Em uma pesquisa de aceitação de um produto por um grupo de pessoas, por exemplo, os resultados podem fornecer informações para ampliar suas vendas. Já no caso de Rosa, a pesquisa sobre o perfil dos alunos pode auxiliar a adequar o planejamento escolar aos interesses e às necessidades dos alunos em questão.

◆ Reflita

Reúna-se em grupos de três alunos e pensem em seis questões que consideram importantes para figurar em um possível questionário da coordenadora Rosa. Em seguida, comparem as questões feitas com as dos colegas. Existem questões parecidas? E diferentes? Quais questões vocês acham que são mais interessantes para o caso da coordenadora pedagógica? Justifiquem. resposta pessoal

1.2 Revendo alguns conceitos matemáticos

A Matemática dispõe de ferramentas úteis para análises e interpretações de situações do cotidiano, bem como de fenômenos das diversas ciências.

Vamos conhecer algumas dessas ferramentas.

CULTURA/GETTY IMAGES

◆ Razão

Para preparar uma limonada, João Antonio mistura sumo de limão e água, na razão de 1 para 4, nessa ordem, ou seja, para um copo de limonada, ele preenche $\frac{1}{5}$ do copo com sumo de limão e $\frac{4}{5}$ do copo com água.

Chama-se **razão** entre dois números reais, *a* e *b*, nessa ordem, com $b \neq 0$, a divisão ou quociente entre *a* e *b*.
Indicamos a razão entre *a* e *b* assim: $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ (lemos: "*a* está para *b*").

Exemplo

Para participar de uma olimpíada de Matemática, de um total de 500 alunos que estudam em uma escola, inscreveram-se 100. Dos 40 alunos do 1º ano A, inscreveram-se 8. Com essas informações, podemos determinar algumas razões:

- a razão entre o número de participantes e o número total de alunos da escola, nessa ordem, é: $\frac{100}{500} = \frac{1}{5}$
- a razão entre o número de participantes do 1º ano A e o número total de alunos dessa classe, nessa ordem, é: $\frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

◆ Observação

De cada 5 alunos do 1º ano A, 1 participará da olimpíada. O mesmo ocorre com o total de alunos da escola, pois:

$$\frac{8}{40} = \frac{1}{5} = \frac{100}{500}$$

Dizemos que essas razões são **iguais**, pois expressam quocientes iguais.

◆ Proporção

O mapa ao lado foi construído na escala 1 : 11.000, isto é, cada 1 cm medido no mapa corresponde a 11.000 cm reais, ou seja, cada 1 cm no mapa corresponde a 110 m na realidade. Por exemplo, a distância entre as praças Dr. Flávio Prestes e Guido Cagnacci, nesse mapa, é aproximadamente 5 cm, o que indica uma distância real de aproximadamente 550 m. Para determinar a distância real entre as duas localidades, usamos o conceito de proporção.

Dados quatro números reais não nulos, *a*, *b*, *c* e *d*, dizemos que eles formam uma **proporção**, nessa ordem, quando a razão $\frac{a}{b}$ é igual à razão $\frac{c}{d}$.
Indicamos essa proporção assim: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a : b = c : d$ (lemos: "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*").

Os números *a*, *b*, *c* e *d*, reais e não nulos, são conhecidos por **termos da proporção**; *a* e *d* são os termos extremos (ou simplesmente **extremos**) e *b* e *c* são os termos do meio (ou simplesmente **meios**).

Os extremos e os meios de uma proporção obedecem à seguinte relação:

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Demonstração

Vamos aplicar o princípio multiplicativo da igualdade multiplicando ambos os membros por *b* e depois por *d*:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \cdot \frac{a}{b} = b \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow a = b \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot \frac{c}{d} \cdot d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Portanto, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

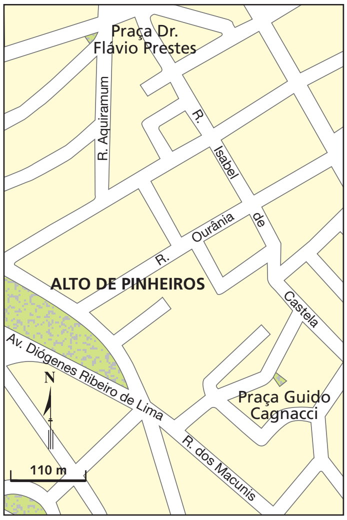
Exemplo

O setor de recursos humanos de uma empresa constatou que, dos entrevistados pretendentes a um emprego, a razão entre o número de aprovados e o de reprovados, nessa ordem, era $\frac{2}{7}$. Sabendo que foram aprovados 4 candidatos, para determinar quantas pessoas foram entrevistadas, calculamos inicialmente a quantidade *x* de pessoas reprovadas:

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{7} \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow x = 14$$

Portanto, foram entrevistadas 18 pessoas, sendo 14 reprovadas e 4 aprovadas.

Vias de São Paulo



Guia Quatro Rodas: ruas São Paulo 2011. São Paulo: Abril, 2010. p. 85.

- Se *y* é a quinta parte de 15, temos: $y = 15 : 5 \Rightarrow y = 3$
  Substituindo esse valor na proporção, obtemos: $\frac{5}{15} = \frac{x}{3} \Rightarrow 15 \cdot x = 15 \Rightarrow x = 1$
- Se 15 é a quinta parte de *y*, temos: $\frac{y}{5} = 15 \Rightarrow y = 75$
  Substituindo esse valor na proporção, obtemos: $\frac{5}{15} = \frac{x}{75} \Rightarrow 15 \cdot x = 375 \Rightarrow x = 25$

Portanto, os valores de *x* são 1 ou 25.

◆ Reflita

Sabendo que as razões $\frac{5}{15}$ e $\frac{x}{y}$ formam uma proporção e que o denominador de uma corresponde à quinta parte do denominador da outra, qual é o valor de *x*?

Comentário: Os alunos devem ler com atenção a maneira como a questão foi redigida e considerar as duas possibilidades: *y* ser a quinta parte de 15 e 15 ser a quinta parte de *y*.

Exercício resolvido

R1. Em um livro de receitas, a cozinheira verificou que, no preparo de uma lasanha com molho branco, havia a seguinte indicação: "Para cada 250 g de massa, utilizar 150 g de creme de leite". Calcular quantos gramas de creme de leite deverão ser usados no preparo de 400 g de massa. E se ela dispuser de uma embalagem de creme de leite com 330 g, quantos gramas de massa deverá usar?

RICARDO SIWIEC

▸ ***Resolução***

A quantidade *x*, em grama, de creme de leite para o preparo de 400 g de massa é dada por: $\frac{150}{250} = \frac{x}{400} \Rightarrow 250 \cdot x = 150 \cdot 400 \Rightarrow x = 240$

E a quantidade *y*, em grama, de massa usada para 330 g de creme de leite é: $\frac{150}{250} = \frac{330}{y} \Rightarrow 150 \cdot y = 250 \cdot 330 \Rightarrow y = 550$

Logo, para 400 g de massa, deverão ser usados 240 g de creme de leite, e para 330 g de creme de leite, 550 g de massa.

◆ Números diretamente proporcionais e números inversamente proporcionais

Os números reais não nulos *a*, *b*, *c*, ... são **diretamente proporcionais** aos números reais não nulos *A*, *B*, *C*, ..., nessa ordem, quando:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \ldots = \underbrace{k}_{\text{constante de proporcionalidade}}$$

Os números reais não nulos *a*, *b*, *c*, ... são **inversamente proporcionais** aos números reais não nulos *A*, *B*, *C*, ..., nessa ordem, quando:

$$\frac{a}{\frac{1}{A}} = \frac{b}{\frac{1}{B}} = \frac{c}{\frac{1}{C}} = \ldots = k \text{ ou } a \cdot A = b \cdot B = c \cdot C = \ldots = \underbrace{k}_{\text{constante de proporcionalidade}}$$

Exemplos

a) Os números 60, 120 e 180 são diretamente proporcionais aos números 1, 2 e 3, nessa ordem, pois: $\frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{180}{3} = 60$

b) Os números 40, 60 e 80 são inversamente proporcionais aos números 6, 4 e 3, nessa ordem, pois: $\frac{40}{\frac{1}{6}} = \frac{60}{\frac{1}{4}} = \frac{80}{\frac{1}{3}} = 240$ ou $40 \cdot 6 = 60 \cdot 4 = 80 \cdot 3 = 240$

Exercício resolvido

R2. Dividir o número 33 em partes diretamente proporcionais a 2, 5 e 4.

▸ ***Resolução***

Sendo *x*, *y* e *z* as partes diretamente proporcionais a 2, 5 e 4, respectivamente, e *k* a constante de proporcionalidade, podemos montar um sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 33 \quad \text{(I)} \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = k \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos $x = 2k$, $y = 5k$ e $z = 4k$.

Substituindo em (I) os valores encontrados em (II), obtemos:

$2k + 5k + 4k = 33 \Rightarrow k = 3$

Portanto, $x = 6$, $y = 15$ e $z = 12$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Na bula de um remédio em gotas, lê-se que "a dosagem recomendada é de 3 gotas por 2 kg de massa da criança". Se uma criança tem 14 kg, qual é a dosagem recomendada? 21 gotas

BANARAS KHAN/AFP

2. Em uma classe com 42 alunos, de cada 7, 4 são do sexo feminino. Qual é o número de alunos do sexo masculino? 18 alunos

3. Sabendo que $\frac{x}{4} = \frac{15}{20}$ e $\frac{7}{6} = \frac{21}{y}$, verifique se as razões $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{6}$ formam uma proporção. sim: $\frac{x}{y} = \frac{1}{6}$

4. Determine os valores de x e y sabendo que os números x, 6 e 27 são diretamente proporcionais aos números 2, y e 18, nessa ordem. $x = 3$ e $y = 4$

5. Dois pintores executaram um serviço e cobraram um total de R$ 1.600,00. O serviço deveria ter sido dividido igualmente, porém um deles trabalhou somente 6 horas, e o outro, 10 horas. Após o término do trabalho, cada um recebeu um valor proporcional ao número de horas trabalhadas. Quanto recebeu cada pintor? R$ 600,00; R$ 1.000,00

6. (Unicamp-SP) A quantia de R$ 1.280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma se:

a) a divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7? R$ 512,00; R$ 320,00; R$ 448,00

b) a divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10? R$ 320,00; R$ 800,00; R$ 160,00

7. As medidas α, β e γ dos ângulos internos de um triângulo são tais que $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5}$. Determine essas medidas. $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 75°$

Critérios de arredondamento

Em muitas situações, para facilitar os cálculos, precisamos efetuar arredondamentos nos dados numéricos coletados ou nos resultados de operações que os envolvem. Para fazer esses arredondamentos, adotaremos os critérios recomendados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE):

- se o primeiro algarismo a ser abandonado representar um número menor que 5, o último algarismo a permanecer fica inalterado;
- se o primeiro algarismo a ser abandonado representar um número igual a 5 ou maior, o número do último algarismo a permanecer é acrescido de 1.

Exemplo

Número a arredondar	Arredondamento para	Número arredondado
38,547	centésimo	38,55
38,547	décimo	38,5
38,547	inteiro	39

Porcentagem

Taxa percentual ou **porcentagem** é um modo de expressar uma razão centesimal, isto é, a razão entre um número *p* e o número 100, que indicamos por: ***p*%**
Assim, *p*% expressa uma razão entre a parte ***p*** e o todo **100**.

A porcentagem é um conceito relativo, ou seja, sempre se refere à aplicação de uma taxa percentual a um valor.

Exemplos

a) 10% de 87,50 reais $= \frac{10}{100} \cdot 87{,}50$ reais $= 0{,}10 \cdot 87{,}50$ reais $= 8{,}75$ reais

b) 105% de 360° $= \frac{105}{100} \cdot 360° = 1{,}05 \cdot 360° = 378°$

Exercício resolvido

R3. Uma escola tem 680 alunos, sendo que 36 deles estão matriculados no 1º ano A.

a) Em certo dia, faltaram 6 alunos do 1º A. Calcular as taxas percentuais de alunos faltantes e de alunos presentes do 1º A nesse dia.

b) Sabendo que 2,5% do total de alunos da escola foram reprovados direto (não chegaram a ir para a recuperação) e que 15% do total de alunos ficaram em recuperação, determinar quantos alunos foram aprovados antes da recuperação.

c) Para o próximo ano, a diretora prevê um acréscimo de $\frac{1}{17}$ em relação ao número de alunos deste ano. Calcular a taxa percentual referente a esse acréscimo e quantos alunos a escola deverá ter no total.

▶ ***Resolução***

a) Para estabelecer a relação entre o número de alunos ausentes (parte) e o número de alunos matriculados no 1º A (todo), podemos fazer:

$$\frac{6}{36} = \frac{x}{100} \Rightarrow 36 \cdot x = 6 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{600}{36} \Rightarrow x \simeq 16{,}67$$

Nesse dia, a taxa de alunos ausentes foi aproximadamente de 16,67%. Obtemos a taxa dos alunos presentes de maneira análoga ou, então, calculando a diferença: 100% − 16,67% = 83,33%

b) A taxa percentual de alunos aprovados antes da recuperação foi:
100% − 2,5% − 15% = 82,5%

Então: 82,5% de 680 $= \frac{82{,}5}{100} \cdot 680 = 0{,}825 \cdot 680 = 561$

Portanto, foram aprovados 561 alunos antes da recuperação.

◆ Observação

O símbolo $\simeq$ é usado para indicar uma aproximação.

c) Se o acréscimo for de $\frac{1}{17}$ em relação ao número de alunos deste ano (680), o número total de alunos será:

$680 + \frac{1}{17} \cdot 680 = 680 + 40 = 720$

A taxa referente a esse acréscimo é dada por:

$\frac{1}{17} \simeq 0{,}0588 = 5{,}88\%$

Portanto, a taxa procurada é de aproximadamente 5,88%, e o número total de alunos na escola deverá ser 720.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

8. (Unicamp-SP) Como se sabe, os *icebergs* são enormes blocos de gelo que se desprendem das geleiras polares e flutuam pelos oceanos. Suponha que a parte submersa de um *iceberg* corresponda a $\frac{8}{9}$ de seu volume total e que o volume da parte não submersa seja de 135.000 m^3.

ROBERT HARDING/DIOMEDIA

a) Calcule o volume total do *iceberg*. 1.215.000 m^3

b) Calcule o volume de gelo puro do *iceberg* supondo que 2% de seu volume total é constituído de "impurezas", como matéria orgânica, ar e minerais. 1.190.700 m^3

9. A altura de uma pessoa em uma fotografia de 12,6 cm × 9 cm é 7,5 cm. Dessa fotografia, fez-se um pôster de dimensões 70 cm × 50 cm.

a) Qual passará a ser a altura da pessoa? $\simeq$ 42 cm

b) Que taxa percentual representa essa ampliação? $\simeq$ 455,56%

10. Segundo a Agência Nacional de Petróleo (ANP), em certas regiões do país a gasolina é considerada de "boa qualidade" quando apresenta em sua composição no máximo 25% de álcool anidro. O proprietário de um posto de abastecimento adquire o conteúdo de dois caminhões-tanque idênticos, com misturas álcool-gasolina pura em concentrações diferentes. A razão entre o volume de álcool e o volume de gasolina pura, nessa ordem, é de 1 para 5 no primeiro caminhão e de 1 para 3 no segundo caminhão. Os dois caminhões descarregam sua carga no reservatório do posto, que estava inicialmente vazio, originando, assim, a gasolina que será comercializada. A gasolina obtida é de "boa qualidade", conforme o critério estabelecido pela ANP? Explique seu raciocínio. Ver resolução no Guia do professor.

2 Coleta de dados

2.1 Alguns conceitos estatísticos

① INDIGOLOTOS/SHUTTERSTOCK, ② MARIOCIGIC/SHUTTERSTOCK, ③ GRYGORII LYKHATSKYI/SHUTTERSTOCK, ④ ODUA IMAGES/SHUTTERSTOCK, ⑤ TEOART/SHUTTERSTOCK

Uma empresa, fabricante de uma conhecida marca de eletrodomésticos, faz um controle de qualidade dos produtos antes de colocá-los no mercado. Por exemplo, no caso dos liquidificadores, entre as diversas características avaliadas estão: tempo de bom funcionamento do motor, encaixe do copo, capacidade de corte das lâminas, quantidade de vezes que os botões funcionam e consumo de energia por hora. Em geral, para cada modelo, a empresa testa uma **amostra**, isto é, uma parte dos liquidificadores fabricados, uma vez que testar todos eles levaria muito tempo e seria bastante dispendioso. Os dados colhidos, devidamente analisados, possibilitam fazer previsões para a totalidade da produção do aparelho.

Para a análise de um conjunto de dados de naturezas diversas, após a definição do problema a ser estudado, o primeiro passo é a coleta de dados, na qual são utilizados conceitos estatísticos. A aplicação desses conceitos costuma ser muito útil na tomada de decisão em várias situações.

População

População é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação em uma pesquisa.

No estudo sobre uma população, o interesse do pesquisador é direcionado à verificação de um aspecto que seja comum a todos os "indivíduos", ou seja, a cada um dos dados pertencentes à população. Esse aspecto, chamado de variável, é a característica ou a propriedade a ser estudada na população.

Amostra

Amostra é um subconjunto finito da população.

Para obter resultados confiáveis, é necessário que a amostra seja:

- representativa, isto é, tenha as características essenciais da população;
- imparcial, ou seja, que cada elemento da população tenha a mesma chance de ser escolhido para compor a amostra.

Quando a amostra é representativa e imparcial, os resultados obtidos com a observação dos elementos de uma amostra são considerados válidos para toda a população.

Algumas situações exigem que seja consultada toda a população sob investigação. Esse tipo de pesquisa é chamado de **recenseamento**. Entretanto, o recenseamento nem sempre é viável, pois, embora seus resultados sejam de alta confiabilidade, a pesquisa de uma população grande, além de demorada e custosa, pode se desatualizar rapidamente.

A necessidade de recorrer a uma amostra muitas vezes ocorre em função de o processo de teste de dados ser destrutivo. Por exemplo, para testar o bom funcionamento de um lote de buzinas de automóvel, podemos acionar cada uma delas, sem que isso afete o seu desempenho futuro. Porém, se acionarmos todos os extintores de incêndio de um lote cuja carga queremos testar, não sobrarão extintores carregados para serem utilizados ou comercializados.

◆ Reflita

Se quisermos pesquisar a eficiência de uma marca de fósforo, convém testar uma amostra ou a população toda? Convém testar uma amostra, porque o teste destrói o fósforo.

SHUTTERB/SHUTTERSTOCK

Variável

Variável é uma característica ou um atributo estudado em todos os elementos de uma população ou em uma amostra.

As variáveis podem ser **qualitativas** — aquelas que exprimem qualidades ou atributos — ou **quantitativas** — aquelas cujos resultados são expressos por números. A escolha das variáveis depende do interesse ou dos objetivos do pesquisador.

◆ Reflita

- Pesquise em que ano foi feito o último censo demográfico no Brasil.
- Indique três variáveis pesquisadas no censo demográfico brasileiro.

- Depende do ano em que o livro está sendo usado. O Censo demográfico é geralmente realizado pelo IBGE a cada 10 anos.
- Respostas possíveis: escolaridade, taxa de fecundidade, nascimento, desemprego etc.

◆ Reflita

Pesquise no dicionário o significado do termo "aleatório". incerto, dependente do acaso

Exercício resolvido

R4. Rosa, que foi contratada como coordenadora pedagógica da Escola Aprender, deseja conhecer o perfil dos alunos do Ensino Médio com os quais trabalhará. Para isso, elaborou o questionário apresentado ao lado com o objetivo de pesquisar as variáveis que considera mais relevantes nesse caso. A coordenadora decidiu fazer sua pesquisa com uma amostra de 50 alunos, escolhidos aleatoriamente entre os 500 alunos da escola.

Determinar a população, a amostra e as variáveis (qualitativas e quantitativas) dessa pesquisa.

QUESTIONÁRIO – PERFIL DOS ALUNOS

1. Ano/Turma:
2. Sexo:
3. Quantos anos você tem?
4. Quantos irmãos você tem?
5. Você tem celular com acesso à internet?
6. Tem computador em casa?
7. De que tipo de música você gosta?
8. Quanto tempo, em média, navega na internet por dia?

◆ Observação

No volume do 3º ano desta coleção, há um estudo mais aprofundado dos métodos e conceitos da Estatística. Neste volume, limitamo-nos a tratar da organização e da apresentação de dados, dando início à reflexão sobre os termos e as medidas estatísticas.

▶ *Resolução*

A população é constituída por todos os 500 alunos da escola, e a amostra é formada pelos 50 alunos escolhidos ao acaso.

No questionário, "ano/turma" é uma característica pesquisada e representa uma variável que qualifica o entrevistado segundo o grau de instrução, isto é, segundo uma ordem. Logo, "ano/turma" é uma **variável qualitativa ordinal**. Outras variáveis, como "posse de celular com acesso à internet", "posse de computador", "sexo" e "preferência musical" apenas nomeiam, não podem ser ordenadas: são **variáveis qualitativas nominais**.

Entretanto, há variáveis que podem ser quantificadas, isto é, representadas por números. No caso "número de irmãos", indicado por um número inteiro, é uma **variável quantitativa discreta**. Já a "idade" e o "tempo médio de navegação na internet" são medidos continuamente por um número real, por isso são **variáveis quantitativas contínuas**.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

11. Uma empresa de confecções planeja abrir uma filial em uma cidade com 125.000 habitantes. Contratou uma agência de publicidade para fazer uma pesquisa sobre a viabilidade do projeto. A agência contratada informou que consultará 800 pessoas da região.

a) Qual é o tamanho da população da pesquisa? 125.000

b) Qual é o tamanho da amostra? 800

c) Cite quatro possíveis variáveis que podem ser objetos dessa pesquisa. resposta pessoal

12. Classifique as variáveis listadas a seguir em qualitativa (ordinal ou nominal) ou quantitativa (discreta ou contínua).

a) Número de respostas certas em uma prova.

b) Procedência dos estudantes de uma universidade.

c) Opinião das pessoas sobre o serviço público.

d) Níveis de poluição do ar na cidade (ruim, regular, bom).

e) Temperatura medida durante uma reação química.

f) Raça dos cachorros de um canil.

g) Classe social (baixa, média, alta).

13. Para verificar a abrangência, entre os idosos, de uma campanha de vacinação contra a gripe realizada em 2017 em determinado município, pretende-se entrevistar um grupo de idosos residentes nesse município.

a) Escreva algumas características que você acha importante serem levadas em conta para que esse grupo possa ser usado como uma amostra representativa, ou seja, para que os resultados obtidos com esse grupo possam ser considerados válidos para toda a população de idosos do município.

b) Se a prefeitura desse município precisa saber exatamente o número de idosos que tomaram a vacina em 2017, independentemente do tempo necessário para realizar a pesquisa, o método escolhido é o ideal? Justifique.

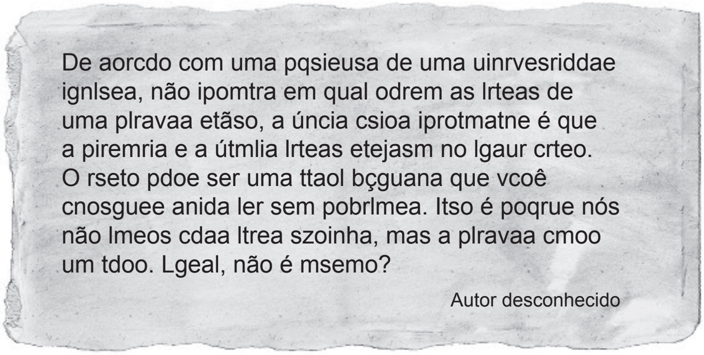
12. a) quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

13. a) Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.
b) Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistados todos os idosos.

3 Organização e apresentação de dados

3.1 A necessidade da organização de dados

Você é capaz de ler este texto?



De aorcdo com uma pqsieusa de uma uinrvesriddae ignlsea, não ipomtra em qual odrem as lrteas de uma plravaa etãso, a úncia csioa iprotmatne é que a piremria e a útmlia lrteas etejasm no lgaur crteo. O rseto pdoe ser uma ttaol bçguana que vcoê cnosguee anida ler sem pobrlmea. Itso é poqrue nós não lmeos cdaa ltrea szoinha, mas a plravaa cmoo um tdoo. Lgeal, não é msemo?

Autor desconhecido

LIGIA DUQUE

A leitura do texto é possível por causa da familiaridade com o todo (a palavra). Nesse caso, a organização das letras, nos parâmetros convencionados para a linguagem, é feita inconscientemente, de modo que conseguimos entender as palavras e, consequentemente, ler o texto. Mas isso não acontece com dados numéricos e outras modalidades de informação que nos são menos familiares.

A tendência de ver o todo pode ser útil em casos semelhantes ao texto anterior, mas pode criar dificuldade se for para descobrir um elemento diferente em meio a um padrão. Veja:

```
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O C O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
```

ADILSON SECCO

Em meio ao padrão (O), encontrar uma irregularidade (C) é uma tarefa que exige muita concentração, ou tal irregularidade passa despercebida.

Na primeira situação apresentada, verificamos que a forma de organização e apresentação das letras, embora não impeça a leitura do texto, pode dificultá-la. No caso da segunda situação, os símbolos poderiam ser dispostos de tal modo que a irregularidade (C) fosse identificada com mais facilidade.

Em situações que trabalham com dados obtidos como resultado de uma pesquisa, como dados numéricos, por exemplo, a forma de organizar e apresentar esses dados também pode dificultar ou facilitar a compreensão do resultado da pesquisa realizada.

Considere a situação a seguir.

A empresa Peça Que Eu Levo faz carretos. Seu departamento de recursos humanos está aplicando um teste para selecionar candidatos a uma vaga no departamento de logística.

Esse teste consiste em apresentar um estudo para adequar a frota de veículos da empresa às regras do rodízio vigentes no município de São Paulo. Os candidatos devem fazer um levantamento das placas de todos os veículos da empresa e verificar o final de cada uma para saber quantos veículos não podem trafegar na região e horário do rodízio em cada dia da semana.

Os candidatos A e B apresentaram as seguintes formas de organização dos finais de placa:

Candidato A

```
9 1 1 2 8 3 2 0 6 9 2 2
3 2 7 1 1 4 1 5 1 5 7 7
9 0 8 8 8 7 7 3 5 1 7 6
8 2 0 6 7 8 0 4 1 2 4 5
8 5 4 6 1 1 3 4 1 6 9 9
0 2 5 5 2 0 2 5 4 7 5 4
4 5 7 2 3 0 3 8 7 9 3 1
3 3 5 9 4 1 3 1 8 4 7 7
9 9 3 0 0 9 4 1 1 4 6 9
6 2 4 5 8 9 9 6 8 5 0 4
```

Candidato B

```
2ª feira: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
          2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
3ª feira: 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
          4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
4ª feira: 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
          6 6 6 6 6 6 6 6
5ª feira: 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7
          8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
6ª feira: 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
          0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

◆ Observação

O sistema de rodízio de veículos, adotado há alguns anos para reduzir o número de automóveis em circulação nos horários de pico no centro expandido de São Paulo, amenizou o problema de trânsito da cidade.

A tabela a seguir relaciona os dias de circulação proibida nos horários de pico com o final da placa do veículo.

Dia da semana	Final da placa
2ª feira	1 e 2
3ª feira	3 e 4
4ª feira	5 e 6
5ª feira	7 e 8
6ª feira	9 e 0

Observando o resultado de cada um, podemos destacar:

- o candidato A dispôs os dados na ordem em que eles foram encontrados;
- o candidato B usou uma linha para cada um dos dois finais de placa que não poderiam circular em cada dia da semana.

Já os candidatos C e D organizaram os dados das seguintes formas:

Candidato C

Dia da semana	Final da placa	Quantidade
2ª feira	1	16
	2	12
3ª feira	3	11
	4	14
4ª feira	5	13
	6	8
5ª feira	7	12
	8	11
6ª feira	9	13
	0	10

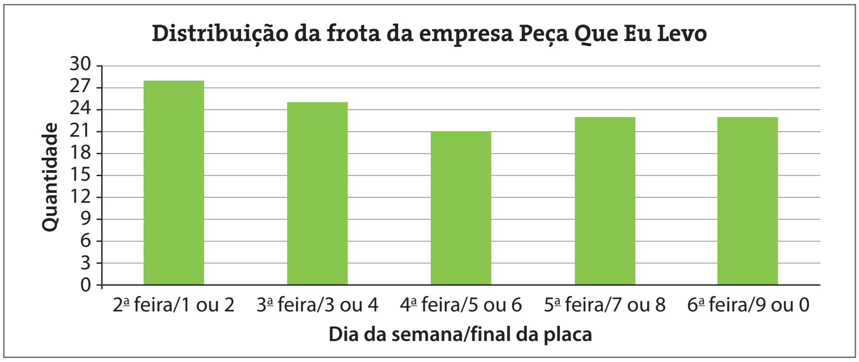
Candidato D

Distribuição da frota segundo o final da placa		
Dia da semana	Final da placa	Quantidade
2ª feira	1 ou 2	28
3ª feira	3 ou 4	25
4ª feira	5 ou 6	21
5ª feira	7 ou 8	23
6ª feira	9 ou 0	23

Notamos que:

- o candidato C separou a quantidade de veículos com os finais de placa dois a dois para cada dia da semana;
- o candidato D fez um levantamento do total de veículos que não podem circular em cada dia da semana.

O candidato E apresentou o gráfico abaixo, contendo o número de veículos indisponíveis em cada dia da semana:



ADILSON SECCO

Algumas das respostas apresentadas pelos candidatos comunicam melhor as informações que outras, isto é, transformam os dados em informações de leitura mais fácil e mais adequada. Por exemplo, com as formas de organização de dados dos candidatos D e E, o departamento de logística percebe mais facilmente que deve programar menos entregas para as segundas-feiras que para as quartas-feiras, conseguindo, assim, um uso mais racional da frota da empresa.

◆ Reflita

Na sua opinião, qual dos cinco candidatos organizou os dados da pior maneira?

Espera-se que os alunos percebam que foi o candidato A.
Comentário: Pedir aos alunos que avaliem e comparem procedimentos é fazer com que eles transcendam uma postura passiva de receptor de informações dadas prontas e participem do processo de ensino-aprendizagem.

3.2 Organizando e apresentando dados em tabelas

As tabelas são de grande utilidade tanto na organização de dados quanto na apresentação de resultados. A representação facilita a verificação de informações e a observação do comportamento de variáveis, o que favorece a averiguação de padrões, regularidades ou tendências.

Às vezes, interessa ao pesquisador verificar se existe alguma relação entre duas variáveis. Por exemplo, em sua pesquisa sobre o perfil dos alunos, a coordenadora pedagógica Rosa poderia verificar o estilo musical preferido deles de acordo com o sexo. Uma relação desse tipo fica clara em uma **tabela de dupla entrada**, como a exemplificada a seguir.

Preferência musical segundo o sexo

Sexo \ Estilo musical	*Funk*	MPB	*Pop*	*Rap*	*Rock*	Samba	Sertanejo	Total
Masculino	4%	5%	7%	11%	10%	6%	3%	46%
Feminino	9%	10%	6%	12%	8%	5%	4%	54%
Total	13%	15%	13%	23%	18%	11%	7%	100%

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

A tabela deixa claro, por exemplo, que o estilo preferido por ambos os sexos é o *rap* (23%) ou que, entre as meninas, o estilo menos popular é o sertanejo (4%).

◆ Reflita

As relações observadas na tabela estão de acordo com o gosto musical de sua turma?
resposta pessoal

Nesse tipo de tabela, uma variável ocupa a linha e a outra, a coluna. A parte central apresenta o percentual de escolhas das duas variáveis, e a última linha e a última coluna determinam o total de cada coluna e linha, respectivamente.

As porcentagens ajudam a generalizar, ou seja, a transferir os resultados obtidos na amostra para a população.

De modo geral, uma tabela simples é constituída pelos seguintes elementos:

- **título** – indica o tema do qual a tabela trata;
- **cabeçalho** – indica o conteúdo das colunas;
- **colunas indicadoras** – esclarecem o conteúdo de cada linha;
- **corpo** – reúne os dados da tabela;
- **fonte** – apresenta a entidade (pessoa física ou jurídica) responsável pelo fornecimento ou pela organização dos dados apresentados. Geralmente, aparece no rodapé da tabela.

Exemplo

Quadro de medalhas – Jogos Pan-americanos 2015

Colocação	País	Número de medalhas			
		Ouro	Prata	Bronze	Total
1º	Estados Unidos	103	81	81	265
2º	Canadá	78	69	70	217
3º	Brasil	41	40	60	141
4º	Cuba	36	27	34	97

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro (COB).

- Título: “Quadro de medalhas – Jogos Pan-americanos 2015”
- Cabeçalho: “Número de medalhas”
- Colunas indicadoras: “Colocação”, “País”, “Ouro”, “Prata”, “Bronze” e “Total”
- Corpo: Dados apresentados nas quatro últimas linhas da tabela.
- Fonte: “Comitê Olímpico Brasileiro (COB)”

◆ Distribuição de frequências

Para analisar os dados coletados em uma pesquisa, convém organizá-los. Pode-se, por exemplo, dispor os dados em ordem crescente ou decrescente, no caso de uma variável quantitativa, ou agrupá-los em categorias semelhantes, no caso de uma variável qualitativa.

Retomando as organizações elaboradas pelos candidatos A e B (página 17), verificamos que o candidato A apenas coletou os finais de placas, obtendo um conjunto de dados que precisam ser organizados. Na organização proposta pelo candidato B, é feita uma separação das ocorrências verificadas, de tal modo que elas foram separadas e agrupadas de acordo com os dias da semana. Assim, agrupando as ocorrências de final de placas 1 e 2, por exemplo, verifica-se que existem 28 ocorrências.

O agrupamento das ocorrências deve ser feito de acordo com o objetivo da pesquisa. A quantidade de vezes que determinada ocorrência aparece em cada grupo é chamada de **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência**.

Há situações em que se deseja comparar a frequência absoluta de um grupo com a soma de todas as frequências absolutas. Para isso, calculamos a razão entre a frequência absoluta de cada grupo e o total de elementos da amostra, obtendo a **frequência relativa**.

Como é uma razão entre a parte e o todo, a frequência relativa é expressa por um número racional entre 0 e 1. Multiplicando esse número por 100%, temos a **frequência percentual**.

Vamos retomar a forma de representação do candidato D à vaga de emprego da empresa Peça Que Eu Levo e incluir na tabela as colunas correspondentes a essas frequências, com valores arredondados.

◆ Observação

Em uma distribuição de frequências, como a da tabela ao lado, a soma das frequências relativas é sempre igual a 1, e a soma das frequências percentuais é sempre igual a 100%.

Distribuição da frota segundo o final da placa

Dia da semana	Final da placa	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
Total		120	1,0000	100,00%

Quando temos de calcular a frequência relativa e a frequência percentual com os dados organizados em muitos grupos, os cálculos podem ser trabalhosos, o que pode acarretar erros que atrapalhariam a interpretação dos resultados. Portanto, podemos usar outros recursos que auxiliam nesses cálculos, como planilhas eletrônicas ou calculadoras. Usando uma planilha eletrônica, observe como poderíamos obter a frequência relativa e a frequência percentual para cada linha da tabela do exemplo anterior.

Comentar com os alunos que algumas vezes o resultado obtido sem a planilha pode ser diferente do resultado apresentado na planilha eletrônica por causa do modo de arredondar e apresentar os dados de cada planilha. Comentar também que o número de casas decimais com que cada resultado é apresentado pode ser alterado de acordo com a precisão que o usuário deseja, assim como o modo como esse resultado é apresentado (em forma de número, porcentagem, moeda etc.).

Para montar a tabela, vamos utilizar cinco colunas da planilha: A, B, C, D e E.

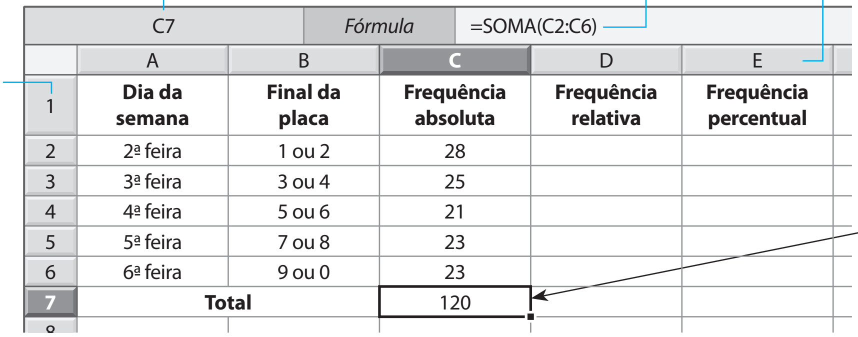
- Preenchemos as colunas A, B e C com os dias da semana, os finais das placas e as frequências absolutas, respectivamente.
- As colunas D e E serão utilizadas, respectivamente, para as frequências relativas e as frequências percentuais.

Campo que mostra a célula selecionada. A célula C7 é a célula que está na coluna C e na linha 7.

Campo que mostra a fórmula associada à célula.

Letras que indicam as colunas da planilha.

Números que indicam as linhas da planilha.



C7 | *Fórmula* | =SOMA(C2:C6)

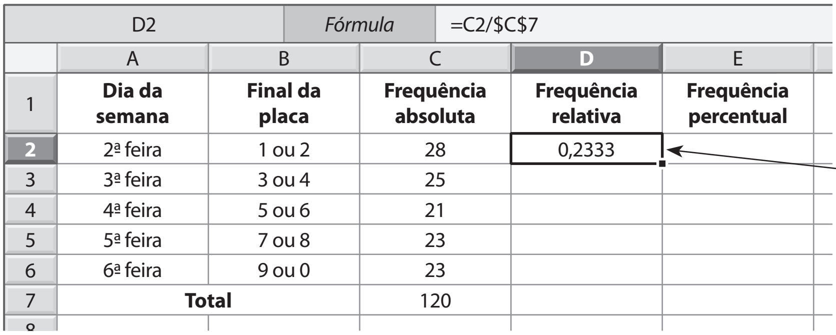
	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28		
3	3ª feira	3 ou 4	25		
4	4ª feira	5 ou 6	21		
5	5ª feira	7 ou 8	23		
6	6ª feira	9 ou 0	23		
7	**Total**		120		

Para calcular a frequência absoluta total, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:
=SOMA(C2:C6)
(Adiciona os valores das células C2, C3, C4, C5 e C6.)

ADILSON SECCO

Observe o procedimento para preencher os dados da coluna D.

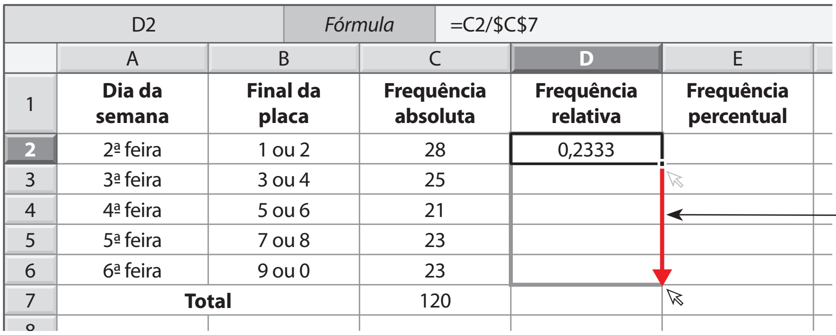
Se julgar oportuno, explicar aos alunos que algumas planilhas têm opções para fazer os cálculos diretamente, sem precisar digitar a fórmula. Em certas planilhas, por exemplo, basta selecionar as células e clicar em “Soma” e na linha seguinte da coluna já aparece a soma dos valores das células selecionadas.



D2 | *Fórmula* | =C2/$C$7

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25		
4	4ª feira	5 ou 6	21		
5	5ª feira	7 ou 8	23		
6	6ª feira	9 ou 0	23		
7	**Total**		120		

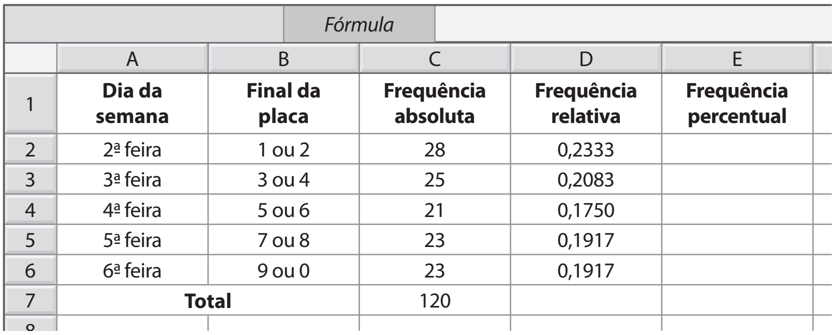
Na célula D2, digitamos a fórmula:
=C2/$C$7
(Calcula a razão entre os valores das células C2 e C7.)
O $ é utilizado na fórmula para fixar a coluna C e a linha 7. Assim, quando a fórmula da célula D2 for copiada para outras células, a célula C7 ficará fixa na fórmula.



D2 | *Fórmula* | =C2/$C$7

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25		
4	4ª feira	5 ou 6	21		
5	5ª feira	7 ou 8	23		
6	6ª feira	9 ou 0	23		
7	**Total**		120		

Não é necessário repetir a fórmula para cada célula da coluna. Basta selecionar a primeira célula, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do mouse clicado, arrastar a seleção até a célula D6.
Esse procedimento copia a fórmula da célula D2 para as células D3 a D6, substituindo C2, respectivamente, por C3, C4, C5 e C6.

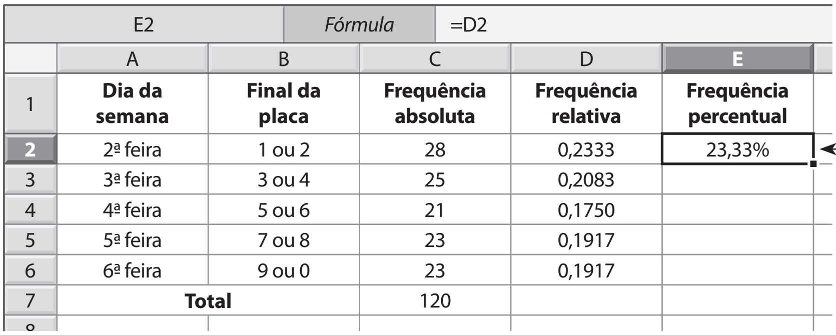


Fórmula

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	
7	**Total**		120		

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

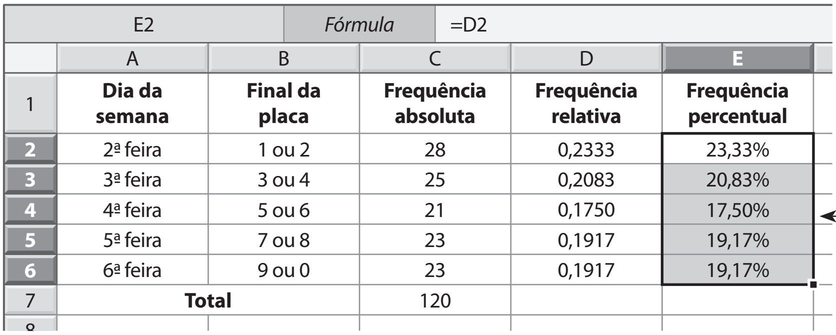
Agora, veja como preencher os dados da coluna E.



E2 | *Fórmula* | =D2

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	
7	**Total**		120		

Inicialmente, digitamos na célula E2 a fórmula:
=D2
(Repete o valor calculado na célula D2.)
Depois, formatamos a célula para mostrar o valor em porcentagem (o que é equivalente a multiplicar o valor da célula por 100%).



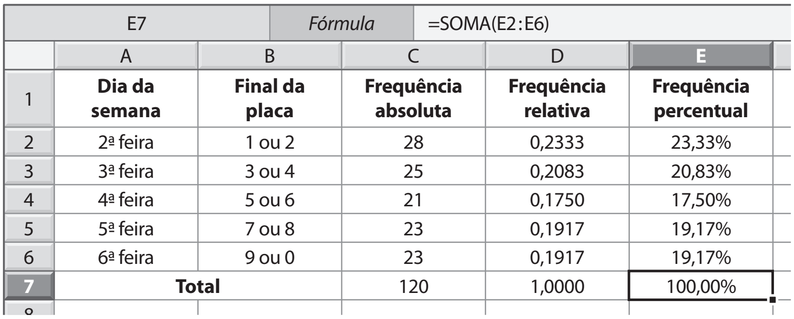
E2 | *Fórmula* | =D2

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120		

Selecionamos a célula E2 e arrastamos a seleção até a célula E6. As células E3 a E6 são preenchidas, então, com os valores de D3 a D6 em porcentagem.

Para calcular a frequência relativa total e a frequência percentual total, basta fazermos o mesmo procedimento realizado para calcular a frequência absoluta total.

Se for possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, eles reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.



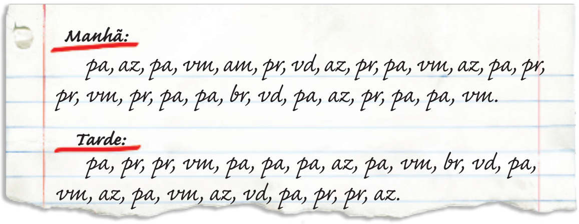
	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120	1,0000	100,00%

ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

14. Pedro, interessado em saber qual a cor mais comum dos veículos que transitavam na sua rua, permaneceu por meia hora, em dois períodos do dia, manhã e tarde, anotando as cores de cada veículo. As cores – branca (br), prata (pa), amarela (am), vermelha (vm), azul (az), preta (pr) e verde (vd) – foram anotadas à medida que os veículos passavam. Veja abaixo as anotações de Pedro em cada período.



Manhã:

pa, az, pa, vm, am, pr, vd, az, pr, pa, vm, az, pa, pr, pr, vm, pr, pa, pa, br, vd, pa, az, pr, pa, pa, vm.

Tarde:

pa, pr, pr, vm, pa, pa, pa, az, pa, vm, br, vd, pa, vm, az, pa, vm, az, vd, pa, pr, pr, az.

LIGIA DUQUE

a) Construa, se possível em uma planilha eletrônica, uma tabela de frequências das cores para cada uma das frequências: absoluta, relativa e percentual.

b) Que cor apresentou maior frequência percentual no período da manhã? E à tarde? E no dia? E qual cor apresentou a menor frequência percentual nesses períodos?

Ver resolução no Guia do professor.

15. A tabela abaixo apresenta a relação entre duas variáveis da pesquisa realizada pela coordenadora Rosa.

Posse de computador segundo o sexo

Tem computador Sexo	Sim	Não	Total
Masculino	18	5	23
Feminino	20	7	27
Total	38	12	50

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Reconstrua a tabela substituindo os valores absolutos pelos respectivos valores percentuais em relação ao número de elementos da amostra.

b) Em relação ao total de elementos de cada grupo, quem tem, percentualmente, mais computadores: os meninos ou as meninas? os meninos

16. Pesquise tabelas em jornais e revistas, indique e classifique suas variáveis. A seguir, analise a relação entre elas. resposta pessoal

17. Na tabela a seguir estão apresentados os dados de uma pesquisa sobre os ramos de atividade e os valores, em bilhão de reais, relacionados às vendas efetuadas pelas principais empresas localizadas em um estado.

Vendas das principais empresas estaduais

Empresa	Ramo de atividade	Vendas (bilhão de reais)	
		2016	2017
Sabor	Alimentos	28,6	25,7
Refrescando	Bebidas	17,5	19,8
Moradias	Construção civil	17,2	16,4
Extrações	Mineração	30,3	34,5
Metálicas	Siderurgia	25,1	20,6
Fale mais	Telefonia	16,7	17,9

Fonte: Agência Pesquisa Efetiva.

17. a) Ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta.

Considerando os dados da tabela, faça o que se pede.

a) Identifique e classifique as variáveis apresentadas na tabela.

b) Identifique os seguintes elementos dessa tabela:
- título;
- cabeçalho;
- coluna indicadora;
- fonte.

Ver resolução no Guia do professor.

c) A agência de pesquisas organizou a tabela apresentando os dados coletados em ordem alfabética em relação ao ramo de atividade da empresa. Esse critério facilitará a análise dos dados se for necessário verificar quais empresas apresentam os melhores e os piores resultados em relação às vendas de 2017? Justifique.

d) Se for necessário comparar as vendas de cada empresa em relação ao total vendido por esse grupo em cada ano considerado, qual tipo de frequência será necessário calcular? frequência percentual

17. c) Espera-se que os alunos percebam que o critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse organizada em ordem crescente ou decrescente, de acordo com os valores das vendas em 2017.

3.3 Organizando e apresentando dados em gráficos

A representação gráfica é outra forma de apresentação de dados muito comum nas diversas mídias. Os gráficos estatísticos têm como principais objetivos sintetizar o comportamento de uma ou mais variáveis e facilitar a visualização dos resultados.

A escolha do tipo de gráfico depende de vários fatores, como a natureza e o comportamento da variável ou dos objetivos de quem o apresenta.

Vejamos a seguir alguns tipos de gráfico e a conveniência do uso de cada um.

◆ Gráfico de barras (verticais ou horizontais)

Talvez pela facilidade de construção ou pela simplicidade para a observação das relações apresentadas, os **gráficos de barras** são representações muito usuais e aplicam-se para as variáveis tanto qualitativas quanto quantitativas.

No gráfico de barras verticais, também chamado de **gráfico de colunas**, o eixo horizontal apresenta a variável em estudo, e o eixo vertical, as frequências observadas (absoluta, relativa ou percentual, conforme a variável). As colunas têm larguras iguais e alturas proporcionais às respectivas frequências.

As considerações referentes ao gráfico de colunas aplicam-se ao gráfico de barras horizontais, apenas com os eixos invertidos.

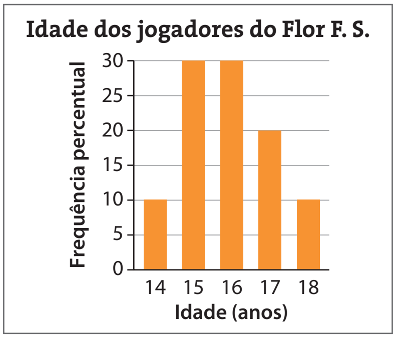
Exemplo

Idade dos jogadores do Flor F. S.

Idade	Frequência percentual
14	10%
15	30%
16	30%
17	20%
18	10%

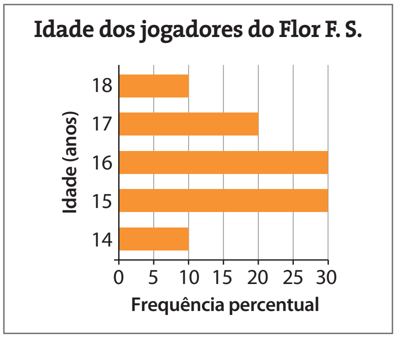
Dados fictícios.

Gráfico de barras verticais



Dados fictícios.

Gráfico de barras horizontais



Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

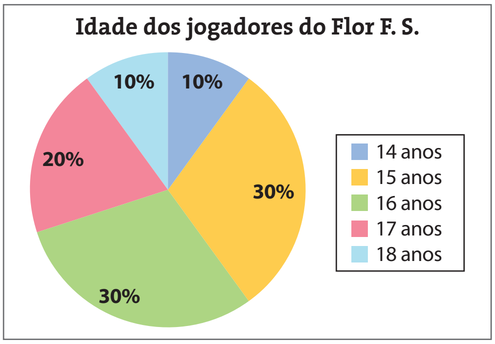
◆ Gráfico de setores

No **gráfico de setores**, as "fatias" representam as frequências absoluta ou percentual correspondentes a cada dado da variável em estudo. A medida do ângulo central de cada uma dessas "fatias" é proporcional à frequência correspondente. No caso da frequência absoluta, a medida do ângulo central de cada fatia é obtida por meio da igualdade:

$$\frac{\text{frequência absoluta}}{\text{total das frequências absolutas}} = \frac{\text{medida do ângulo central}}{360°}$$

Para a frequência percentual, a medida é obtida pela aplicação da taxa percentual de cada frequência em relação a 360°.

Exemplo



Dados fictícios.

◆ Observação

O gráfico de setores é recomendado quando se deseja comparar o valor de cada categoria com o total. Porém, seu uso não é adequado quando uma dessas categorias apresenta frequência igual a zero, já que, nesse caso, essa "fatia" não apareceria, ou quando a soma das frequências percentuais é maior que 100%, caso que acontece quando os entrevistados podem dar mais de uma resposta a uma pergunta.

Exercício resolvido

R5. Em sua pesquisa, a coordenadora Rosa obteve os seguintes dados para a variável "Tempo médio de navegação na internet por dia":

Tempo médio de navegação na internet por dia		
Intervalo em hora	**Frequência absoluta**	**Frequência percentual**
Até 1 hora	5	10%
Mais de 1 hora, até 2 horas	15	30%
Mais de 2 horas, até 3 horas	20	40%
Mais de 3 horas, até 4 horas	5	10%
Mais de 4 horas	5	10%
Total	50	100%

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

Construir um gráfico de setores que represente esses resultados.

▶ ***Resolução***

Devemos dividir o círculo em cinco setores. Para determinar a medida x do ângulo central de cada um, podemos proceder de dois modos:

- frequência absoluta:

$$\frac{5}{50} = \frac{x_1}{360^\circ} \Rightarrow x_1 = 36^\circ$$

$$\frac{15}{50} = \frac{x_2}{360^\circ} \Rightarrow x_2 = 108^\circ$$

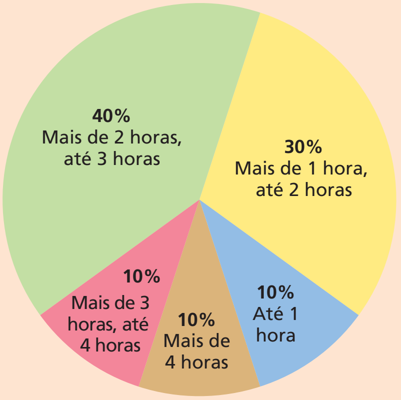
$$\frac{20}{50} = \frac{x_3}{360^\circ} \Rightarrow x_3 = 144^\circ$$

- frequência percentual:

10% de $360^\circ = 0{,}10 \cdot 360^\circ = 36^\circ$
30% de $360^\circ = 0{,}30 \cdot 360^\circ = 108^\circ$
40% de $360^\circ = 0{,}40 \cdot 360^\circ = 144^\circ$

A soma das porcentagens é 100%, e a soma das medidas dos ângulos centrais é 360°.

Tempo médio de navegação na internet por dia



Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

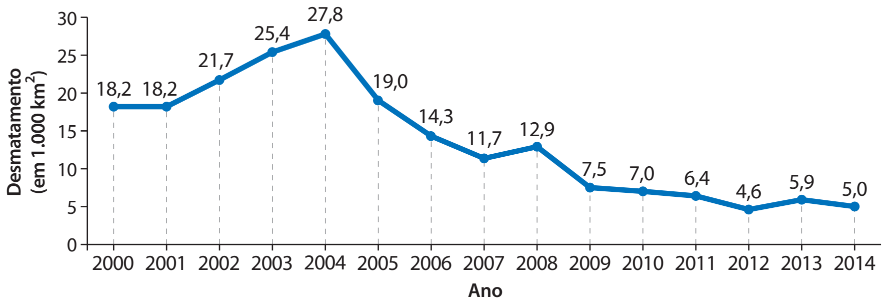
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

◆ Gráfico de linha

Um **gráfico de linha**, ou **gráfico de segmentos**, mostra tendências de um conjunto de dados em intervalos uniformes. Os valores associados a cada intervalo são representados por um conjunto de pontos conectados por uma linha de segmentos consecutivos. Cada ponto tem a sua altura representada no eixo vertical, e o respectivo intervalo é exibido no eixo horizontal. Esse tipo de gráfico é muito usado quando se deseja comparar valores ao longo de um período.

Exemplo

Taxa anual de desmatamento da Amazônia Legal



Dados obtidos em: <www.obt.inpe.br/prodes>. Acesso em: 14 set. 2015.

Observando esse gráfico é possível perceber a variação da taxa de desmatamento da Amazônia Legal ao longo do período de 2000 a 2014. Note que a maior taxa de desmatamento desse período ocorreu em 2004 e a menor ocorreu em 2012.

A exploração desse gráfico permite um trabalho interdisciplinar com Geografia. Podem ser discutidos, por exemplo, o impacto ambiental do desmatamento e o quanto os números do gráfico são representativos.

◆ Observação

De acordo com o Instituto de Pesquisa Ambiental da Amazônia (Ipam), Amazônia Legal é uma área que engloba nove estados brasileiros (Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins e parte do estado do Maranhão) pertencentes à Bacia Amazônica e que, consequentemente, possui em seu território trechos da Floresta Amazônica.

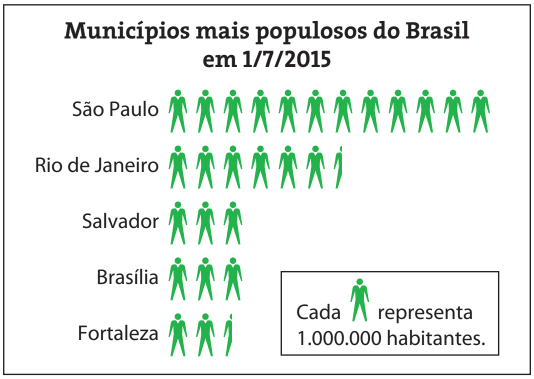
◆ Pictograma

O **pictograma**, tipo de gráfico muito usado pela mídia em razão do forte apelo visual, é constituído por imagens relacionadas ao tema em estudo.

Exemplo

Municípios mais populosos do Brasil em 1/7/2015	
Município	**População estimada**
São Paulo	11.967.825
Rio de Janeiro	6.476.631
Salvador	2.921.087
Brasília	2.914.830
Fortaleza	2.591.188

Dados obtidos em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 21 set. 2015.



ADILSON SECCO

Dados obtidos em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 21 set. 2015.

Os histogramas e polígonos de frequência serão estudados no volume do 3º ano desta coleção.

Observe que o gráfico é elaborado com valores aproximados. É bastante comum ocorrer isso na construção de um pictograma. Além disso, no caso desse pictograma, como cada símbolo representa 1.000.000 de habitantes, para o município do Rio de Janeiro, por exemplo, foram usados 6 símbolos inteiros e a metade de um símbolo, para indicar o valor aproximado 6.500.000.

Exercício resolvido

R6. A tabela ao lado mostra a quantidade colhida de feijão, em tonelada, por um produtor nos últimos cinco anos. Construir um pictograma para representar os dados da tabela.

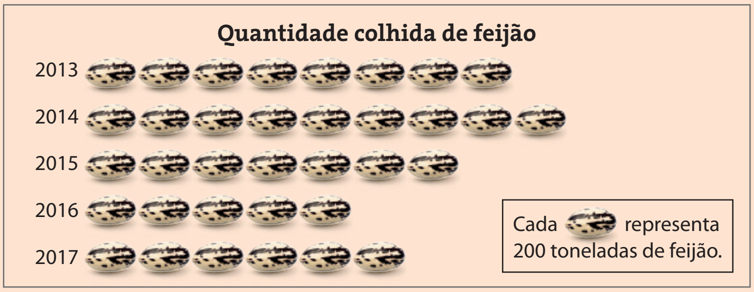
Ano	Quantidade colhida de feijão (t)
2013	1.640
2014	1.800
2015	1.370
2016	1.000
2017	1.200

Fonte: Produtor de feijão.

▶ ***Resolução***

Para construir o pictograma, temos de definir o símbolo que será usado e também a quantidade de tonelada de feijão que cada símbolo representará.

Analisando os dados da tabela, verificamos que os valores estão entre 1.000 e 1.800 e são próximos de um múltiplo de 200. Desse modo, podemos estabelecer que cada símbolo representará 200 toneladas de feijão. Para determinar quantos símbolos serão usados em cada ano, precisaremos arredondar alguns valores: 1.640 será arredondado para 1.600 e 1.370 para 1.400.



TEOART/SHUTTERSTOCK

Fonte: Produtor de feijão.

◆ Reflita

Nesse caso, estabeleceu-se que cada símbolo representaria 200 toneladas, mas poderiam ter sido feitas outras escolhas; por exemplo, poderíamos estabelecer que cada símbolo representaria 100 toneladas e, nesse caso, o valor 1.640 poderia ser arredondado para 1.650 e representado por 16 símbolos e mais metade de um símbolo.

Faça um pictograma com os dados do exercício **R6** adotando outro valor para cada símbolo.

resposta pessoal

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

21. e **22. a)** Avaliar a conveniência de pedir aos alunos que usem planilha eletrônica.

18. O consumo mensal de energia elétrica de uma residência, em quilowatt-hora (kWh), durante o primeiro semestre do ano passado, foi: 340, 361, 280, 299, 320 e 302.

Considerando os arredondamentos que julgar convenientes, construa um gráfico de barras horizontais. Ver resolução no Guia do professor.

19. Observe a tabela a seguir. Nela estão apresentadas as populações residentes no Brasil de 1960 a 2010.

População residente no Brasil

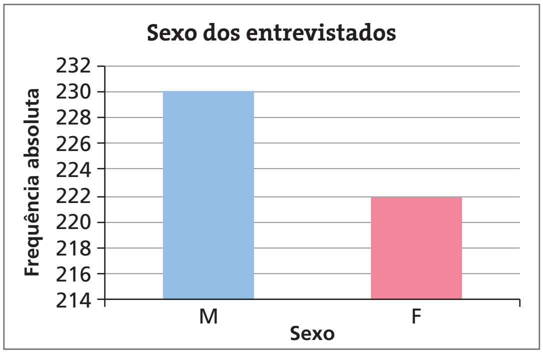
Data	População
1/9/1960	70.070.457
1/9/1970	93.139.037
1/9/1980	119.002.706
1/9/1991	146.825.475
1/8/2000	169.799.170
1/8/2010	190.755.799

Dados obtidos em: IBGE. *Censo Demográfico 2010*. Rio de Janeiro: IBGE, 2011.

a) Elabore um pictograma para representar os dados da tabela. Ver resolução no Guia do professor.

b) Compare o seu pictograma com os elaborados por cinco colegas. Escolham o pictograma que melhor representa os dados da tabela. Justifiquem a escolha. resposta pessoal

20. Veja o gráfico abaixo. Ele apresenta a frequência absoluta, por sexo (masculino: M e feminino: F), de pessoas entrevistadas em uma pesquisa.


Sexo dos entrevistados

Dados fictícios.

Agora, responda às questões.

a) A altura do retângulo azul é o dobro da altura do retângulo rosa? sim

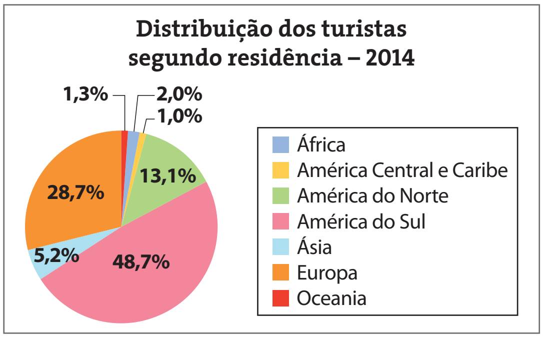
b) Sem efetuar cálculos, você pode concluir que o número de homens entrevistados é o dobro do número de mulheres? não

c) Você considera que esse gráfico pode induzir o leitor a um equívoco? Espera-se que os alunos percebam que sim.

d) Se você respondeu ao item **c** afirmativamente, refaça o gráfico de tal modo que evite essa indução à leitura equivocada. Ver resolução no Guia do professor.

21. Segundo o Ministério do Turismo, em 2014, ano da Copa do Mundo no Brasil, o país registrou a entrada de 6.429.852 turistas internacionais. Pela primeira vez, o país superou a marca dos 6 milhões de estrangeiros.

Observe o gráfico a seguir, que apresenta a distribuição dos turistas que chegaram ao Brasil naquele ano segundo o local de residência.

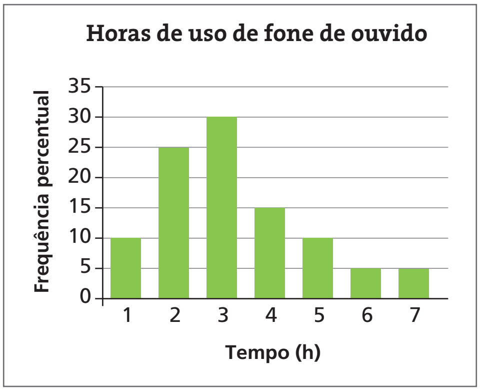

Distribuição dos turistas segundo residência – 2014

Dados obtidos em: <www.dadosefatos.turismo.gov.br>. Acesso em: 18 set. 2015.

Com base nas informações apresentadas, elabore uma tabela com as frequências relativa e absoluta aproximada referentes a cada setor do gráfico. Ver resolução no Guia do professor.

22. Pesquisas mostram que os jovens estão abusando do uso dos aparelhos portáteis de música (mp3, mp4, celular), passando várias horas com o fone de ouvido, muitas vezes com o volume muito alto, o que pode acarretar problemas na audição.

Preocupada com esse fato, a direção de uma escola resolveu verificar o tempo que os seus alunos passam ouvindo música com fone de ouvido. Para isso, realizou uma pesquisa em uma amostra com 40 alunos. O resultado da pesquisa está apresentado no gráfico a seguir.


Horas de uso de fone de ouvido

Dados fictícios.

a) Com base no gráfico, construa uma tabela com as frequências absoluta e percentual dessa amostra de 40 alunos. Ver resolução no Guia do professor.

b) Supondo que a amostra represente fielmente a população pesquisada dos 640 alunos dessa escola, quantos usam fone de ouvido por 4 horas ou mais, diariamente? 224 alunos

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

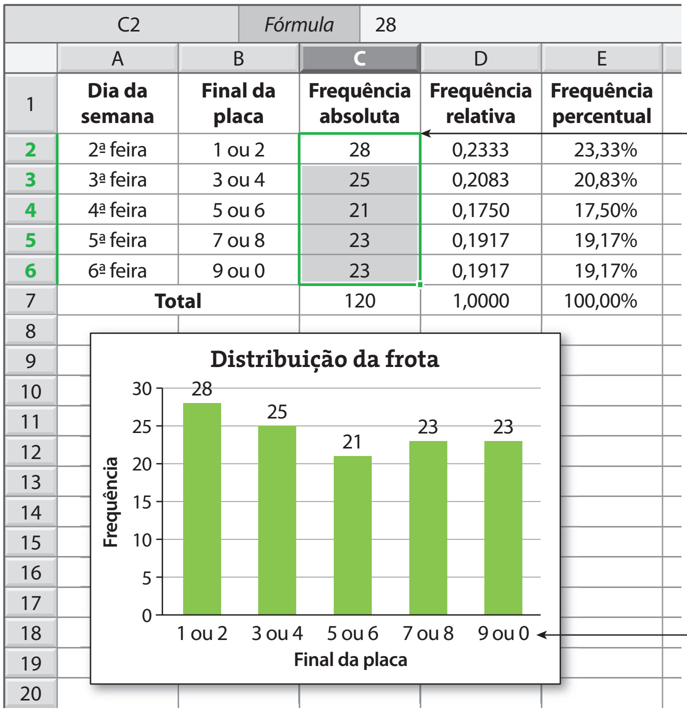
◆ Planilhas eletrônicas na construção de gráficos

As planilhas eletrônicas, além de auxiliarem na construção de tabelas de distribuição de frequências, são uma ferramenta muito usada por pesquisadores para construir gráficos.

Para construir um gráfico estatístico usando uma planilha eletrônica, inicialmente devemos construir a tabela de frequências na planilha. Vamos usar a tabela construída nas páginas 20, 21 e 22.

O estudo deste item é opcional. Se for possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.
Salientar que as planilhas são uma ferramenta muito útil, mas que ainda assim é importante que eles saibam como construir os gráficos com lápis e papel. Além disso, ressaltar que é muito importante saber escolher o tipo de gráfico que melhor representa um conjunto de dados para transmitir uma informação, bem como saber fazer a leitura e a análise crítica das informações apresentadas.

ADILSON SECCO



C2 | *Fórmula* | 28

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120	1,0000	100,00%

Para construir um gráfico de barras, por exemplo, inicialmente devemos selecionar os valores das frequências que queremos usar e, então, selecionamos a opção para inserir gráficos de barras. Há várias opções de gráficos de barras (horizontais, verticais, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar de retângulos).

Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar os rótulos do eixo que exibe os finais de placas. Isso pode ser feito manualmente ou selecionando-se o intervalo de B2 a B6 na tabela.

É possível, ainda, inserir título no gráfico e nome nos eixos, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno

23. Resolva usando, se possível, uma planilha eletrônica.

As notas finais dos 36 alunos de uma turma foram apresentadas pelo professor em ordem de chamada: Se não for possível os alunos resolverem esse exercício em uma planilha eletrônica, ele pode ser feito da maneira tradicional.

1 – 6,0 7 – 5,0 13 – 10,0 19 – 4,0 25 – 8,0 31 – 4,0
2 – 7,0 8 – 6,0 14 – 6,0 20 – 7,0 26 – 5,0 32 – 9,0
3 – 5,0 9 – 8,0 15 – 10,0 21 – 5,0 27 – 10,0 33 – 7,0
4 – 5,0 10 – 7,0 16 – 6,0 22 – 6,0 28 – 8,0 34 – 9,0
5 – 4,0 11 – 5,0 17 – 7,0 23 – 8,0 29 – 8,0 35 – 8,0
6 – 6,0 12 – 9,0 18 – 5,0 24 – 5,0 30 – 7,0 36 – 8,0

Ver resolução no Guia do professor.

a) Construa uma tabela de frequências (absoluta, relativa e percentual) organizando esses dados para facilitar a observação do comportamento da variável “nota”.

b) Qual foi a porcentagem de notas iguais a 6 (nota mínima de aprovação) ou acima dela? E abaixo?

c) Construa um gráfico de barras (horizontais ou verticais) com as frequências absolutas das notas e um gráfico de setores.

d) Qual dos gráficos construídos você considera melhor para apresentar esse conjunto de notas?

◆ Explore

Colete dados de todos os alunos de sua turma para a variável “atividade de lazer preferida” ou escolha outra variável qualitativa para investigar. Usando os dados coletados, construa, em uma planilha eletrônica, uma tabela com as frequências absoluta e percentual. Em seguida, construa pelo menos dois tipos de gráfico para representar seus dados e apresente os resultados para os colegas. Nesse caso, o gráfico de segmentos é adequado? Justifique.

Espera-se que os alunos percebam as diferenças entre os tipos de gráfico de acordo com a informação que querem transmitir e identifiquem que o gráfico de segmentos não é adequado para o caso de uma variável qualitativa.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. (Enem) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2.000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de: alternativa e

a) 1 : 250
b) 1 : 2.500
c) 1 : 25.000
d) 1 : 250.000
e) 1 : 25.000.000

2. Duas turmas de 1º ano, ao serem convidadas a elaborar sugestões para o cardápio da cantina da escola, apresentaram os resultados indicados na tabela ao lado.

Sugestões para o cardápio da cantina

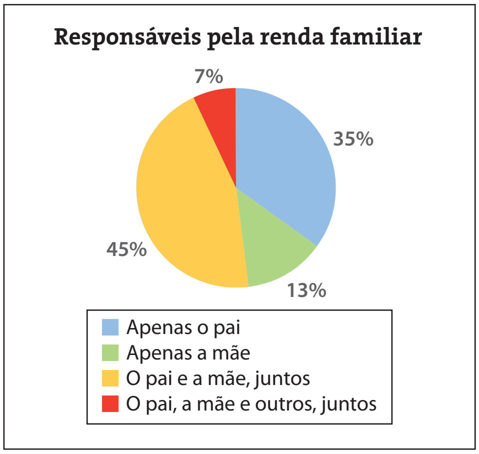
Sugestões	1º A	1º B
Lanches e sucos naturais	31,25%	12,50%
Salada de frutas	25,00%	25,00%
Pão de queijo	12,50%	50,00%
Outros	31,25%	12,50%
Total	100,00%	100,00%

Dados fictícios.

a) Sabendo que são 32 alunos do 1º A e 24 do 1º B, quantos alunos de cada turma sugeriram a inclusão de lanches e sucos naturais? 10 e 3, respectivamente

b) O item “Salada de frutas” corresponde a igual porcentagem nas duas turmas. Isso significa que o mesmo número de alunos, em cada turma, fez essa sugestão? Justifique sua resposta. Não, pois os totais de alunos de cada turma são diferentes.

3. (UFMG) Este gráfico representa o resultado de uma pesquisa realizada com 1.000 famílias com filhos em idade escolar.



ADILSON SECCO

Considere estas afirmativas referentes às famílias pesquisadas:

(I) O pai participa da renda familiar em menos de 850 dessas famílias.

(II) O pai e a mãe participam, juntos, da renda familiar em mais de 500 dessas famílias.

Então, é correto afirmar que: alternativa c

a) nenhuma das afirmativas é verdadeira.
b) apenas a afirmativa I é verdadeira.
c) apenas a afirmativa II é verdadeira.
d) ambas as afirmativas são verdadeiras.

4. O número de assinantes de TV paga no Brasil vem crescendo nos últimos anos, conforme mostra a tabela ao lado. Ver resolução no Guia do professor.

TV por assinatura no Brasil

Ano	Número de assinaturas (em milhões)
2009	3,6
2010	9,8
2011	12,7
2012	16,2
2013	18,0
2014	19,6

Dados obtidos em: <www.teleco.com.br>. Acesso em: 18 set. 2015.

a) Arredonde os valores da tabela para a unidade de milhar.

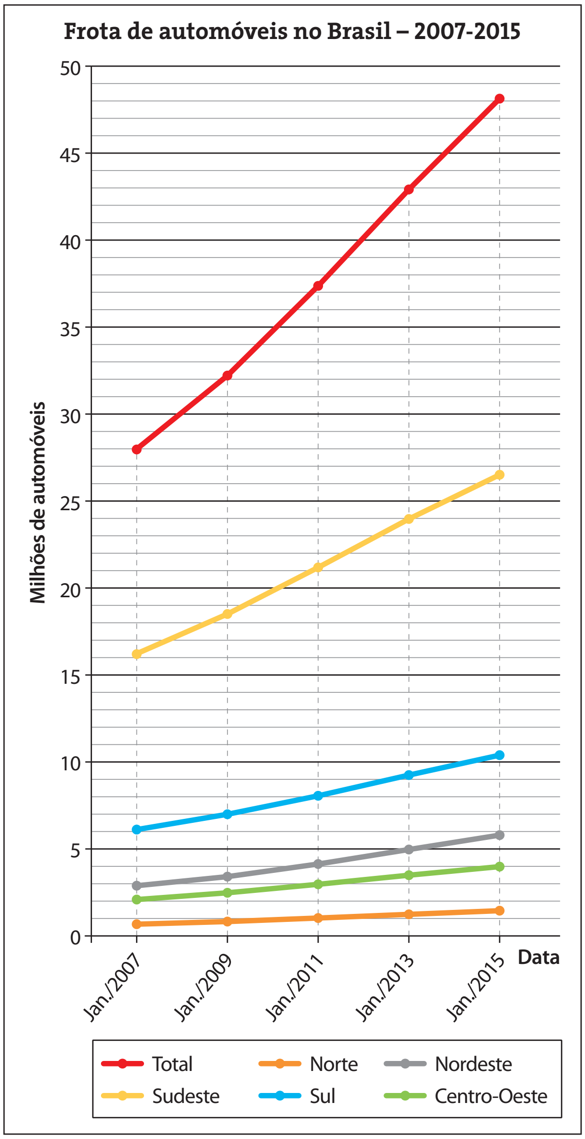
b) Com os valores obtidos no item **a**, construa um gráfico de colunas.

c) Reproduza o gráfico do item **b** e marque o ponto médio do lado superior de cada retângulo do gráfico. Em seguida, com caneta colorida, trace uma linha de segmentos consecutivos com extremidades nesses pontos.

d) Analise as duas formas de representação (gráfico de colunas e gráfico de segmentos) e decida qual é a mais apropriada para perceber a evolução dos resultados.

Aprofundamento

5. Observe o gráfico a seguir, que mostra a quantidade de automóveis no Brasil, por região, de 2007 a 2015.


Frota de automóveis no Brasil – 2007-2015

Dados obtidos em: <www.denatran.gov.br>. Acesso em: 18 set. 2015.

a) Pode-se observar que, de janeiro de 2007 a janeiro de 2015, o número de automóveis aumentou cerca de 20 milhões.

Agora, responda às questões a seguir.

a) A que conclusão se pode chegar sobre a quantidade total de automóveis no Brasil de janeiro de 2007 a janeiro de 2015?

b) Qual das regiões brasileiras tinha o menor número de automóveis no período considerado? região Norte

c) Qual região teve o maior crescimento absoluto no número de automóveis?

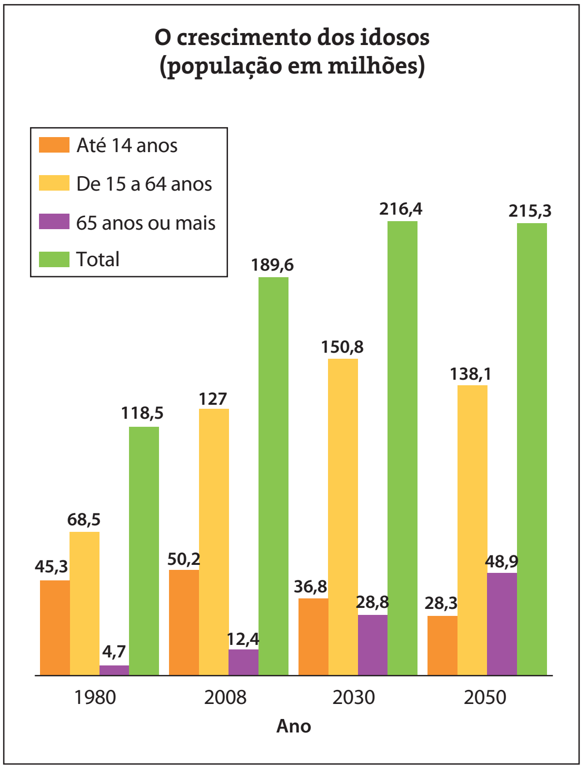
d) Calcule a porcentagem aproximada de crescimento do número total de automóveis no Brasil de janeiro de 2007 a janeiro de 2015. 71,4%

e) Que impactos você acha que o crescimento indicado no item **d** geram na vida da população? resposta pessoal

c) A região Sudeste, com crescimento de cerca de 10 milhões de automóveis.

6. O texto e o gráfico abaixo, reproduzidos da revista *Problemas Brasileiros*, discutem os dados de uma pesquisa do IBGE.

> *"O Brasil está envelhecendo a uma rapidez vertiginosa. Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) dão conta de que o país já chegou a uma taxa de fecundidade de 1,8 filho por mulher, patamar que, segundo as estimativas, só seria atingido em 2043. [...] indicam também que a parcela dos que têm mais de 65 anos aumentará dos atuais 12,4 milhões para 48,9 milhões de pessoas até a metade deste século. Nessas mesmas quatro décadas, o número de crianças cairá dos atuais 50,2 milhões para 28,3 milhões."*


O crescimento dos idosos (população em milhões)

Fonte: O país em ritmo de envelhecimento. *Problemas Brasileiros*, São Paulo, n. 394, jul./ago. 2009.

b) Ver resolução no Guia do professor.

Com base no texto e no gráfico, responda às questões a seguir.

a) Os dados que aparecem no texto são compatíveis com os dados que aparecem no gráfico? sim

b) Construa uma tabela de dupla entrada com quatro colunas indicadoras (1980, 2008, 2030 e 2050) e quatro linhas (uma para cada faixa etária e total).

c) Calcule as taxas percentuais, do período de 2008 a 2050, de crescimento da população idosa, "65 anos ou mais", e de diminuição do número de crianças, "até 14 anos". aproximadamente 294,35% e 43,63%

d) Na sua opinião, nesse caso, qual das formas comunica melhor: o gráfico ou a tabela? Espera-se que os alunos respondam "o gráfico".

e) As informações dadas pela pesquisa são úteis para a sociedade? Em que sentido? E para o governo? Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Uma rede de supermercados, interessada em se instalar em certa região, resolveu fazer uma pesquisa com a população local. Foram apresentadas as seguintes variáveis: sexo, tempo de residência na região, satisfação com as redes já instaladas e frequência de compras por mês. As variáveis apresentadas são, respectivamente: alternativa c

a) quantitativa, quantitativa, quantitativa, qualitativa.

b) quantitativa, quantitativa, qualitativa, qualitativa.

c) qualitativa, quantitativa, qualitativa, quantitativa.

d) qualitativa, quantitativa, quantitativa, quantitativa.

2. Para conhecer melhor o seu público, uma companhia de teatro resolveu verificar, aos sábados e domingos, no período de um mês, qual o sexo dos espectadores. Os dados foram organizados em uma tabela, reproduzida a seguir.

	1ª semana		2ª semana		3ª semana		4ª semana	
	S	D	S	D	S	D	S	D
M	35	40	32	28	37	28	39	27
F	28	30	30	31	25	35	37	33

O porcentual aproximado de homens (M) e mulheres (F) em sábados (S) e em domingos (D), respectivamente, é: alternativa b

a) 56% e 44%, 49% e 51%

b) 54% e 46%, 49% e 51%

c) 44% e 56%, 51% e 49%

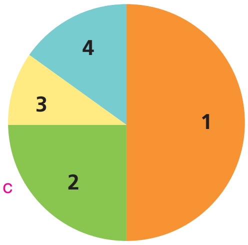
d) 46% e 54%, 51% e 49%

3. O gráfico ao lado apresenta o resultado de uma pesquisa.

A região que representa 25% para uma das categorias analisadas é: alternativa c

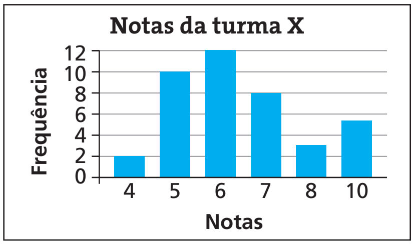
a) 3 **c)** 2

b) 1 **d)** 4



ADILSON SECCO

4. As notas de Matemática de uma classe foram apresentadas pelo professor no gráfico abaixo.



ADILSON SECCO

O número de alunos na classe, a soma das notas da classe e a razão dessa soma pelo número de alunos são, respectivamente: alternativa d

a) 40; 240; 6,0 **c)** 20; 260; 6,5

b) 20; 130; 6,5 **d)** 40; 260; 6,5

5. Em uma pesquisa, os entrevistados de certa cidade deveriam atribuir uma nota, de 1 a 10, à educação pública municipal. O resultado é mostrado na tabela abaixo, na qual se verifica a relação entre as variáveis "nota" e "idade".

Nota dada à educação pública municipal										
Idade \ Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
De 20 a 25	0	0	1	2	2	4	0	1	0	0
De 26 a 30	0	0	0	2	1	4	3	0	0	0
De 31 a 35	0	0	0	0	3	1	0	1	0	0
De 36 a 40	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
De 41 a 45	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
De 46 a 50	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Dados fictícios.

Se tomarmos a nota 5 como um valor que determina qualidade média, a única alternativa correta é: alternativa a

a) A maioria das pessoas com 31 anos ou mais considera a educação pública municipal de qualidade acima da média.

b) Os jovens até 25 anos atribuem nota máxima à educação pública municipal.

c) Segundo a opinião dos entrevistados, a educação pública municipal está muito ruim.

d) Não é possível perceber relação entre as duas variáveis.

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão				
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5
Aplicar razão, proporção, porcentagem e critérios de arredondamento.		X		X	
Reconhecer população, amostra e variáveis.	X				
Construir e analisar as representações tabular e gráfica.		X	X	X	X
Obter conclusões com base na análise dos dados coletados.					X
Páginas do livro referentes ao conceito	14 a 16	10 a 14 18 a 22	23 a 27	10 a 14 23 a 27	16 a 22

Pesquisa e ação Pesquisa estatística

Uma pesquisa desenvolvida no ambiente escolar possibilita a vivência das diferentes etapas que a compõem, desde a escolha do tema a ser pesquisado até a discussão da melhor forma de apresentar os resultados obtidos.

Nesta pesquisa, trabalharemos a escolha do tema, a população envolvida, selecionaremos a amostra, levantaremos os dados por meio de questionários ou entrevistas, tabularemos os dados e, na etapa final, organizaremos a forma de apresentação desses dados para a comunidade escolar.

FERNANDO FAVORETTO

Procedimentos

1) Reúna-se com seus colegas em pequenos grupos e escolham um dos temas sugeridos a seguir para ser abordado em sua pesquisa:
- Reciclagem de lixo.
- Alimentos orgânicos.
- Mídia e consumo.
- Atividades físicas e qualidade de vida.
- Mercado de trabalho.

2) Escolhido o tema, façam um cronograma com seus colegas e professor, listando as tarefas que deverão ser cumpridas até o final da pesquisa.

3) O grupo precisará definir o público a ser pesquisado, escolhendo também o tamanho da amostra da pesquisa. Discutam e expliquem para o professor os motivos das escolhas feitas pela equipe.

4) O próximo passo é construir o questionário que será utilizado nas entrevistas. Para isso, o grupo deverá levantar informações sobre o tema em questão (em jornais e revistas impressas, *sites* etc.). O questionário construído poderá conter questões de múltipla escolha ou questões abertas. Em geral, as questões abertas possibilitam ao entrevistado expor de maneira mais completa a sua opinião; entretanto, a tabulação dos dados torna-se um pouco mais complicada. Vale a discussão no grupo para a escolha da metodologia. Outra decisão a ser tomada pelo grupo será com relação à aplicação dos questionários: serão respondidos por escrito ou oralmente?

5) Passa-se, então, à fase de aplicação dos questionários. Parte do grupo poderá exercer o papel de entrevistador, mantendo-se imparcial com relação às perguntas feitas e esclarecendo eventuais dúvidas que os entrevistados possam ter.

6) A etapa seguinte é a tabulação dos dados para a fase de análise. Durante a análise dos resultados obtidos, o grupo já deverá discutir formas de divulgar os resultados da pesquisa. Poderão ser utilizados gráficos, tabelas e outras fontes que contenham dados que se assemelhem aos pesquisados. A comparação de fontes de informação enriquece uma apresentação.

7) O processo de desenvolvimento da pesquisa e os resultados obtidos podem ser apresentados em cartazes (cartolina, papel *kraft* etc.) ou em meio digital, com uso de *softwares* destinados à construção de apresentações. Indiquem as fontes utilizadas na pesquisa: nome do autor, nome da publicação (livro, revista, jornal, *site*), local, editora, data (data de acesso para os *sites*) e página.

Compreensão de texto

Números que valem letras

Se você conseguir ler as primeiras palavras, decifrará automaticamente as outras...

3M D14 D3 V3R40, 3574V4 N4 PR414, 0853RV4ND0 DU45 CR14NC45 8R1NC4ND0 N4 4R314. 3L45 7R484LH4V4M MU170 C0N57RU1ND0 UM C4573L0 D3 4R314, C0M 70RR35, P4554R3L45 3 P4554G3NS 1N73RN45. QU4ND0 3575V4M QU453 4C484ND0, V310 UM4 0ND4 3 D357RU1U 7UD0, R3DU21ND0 0 C4573L0 4 UM M0N73 D3 4R314 3 35PUM4.

4CH31 QU3, D3P015 D3 74N70 35F0RC0 3 CU1D4D0, 45 CR14NC45 C41R14M N0 CH0R0; C0RR3R4M P3L4 PR414, FUG1ND0 D4 4GU4, R1ND0 D3 M405 D4D45 3 C0M3C4R4M 4 C0N57RU1R 0U7R0 C4573L0. C0MPR33ND1 QU3 H4V14 4PR3ND1D0 UM4 GR4ND3 L1C40; G4574M05 MU1T0 73MP0 D4 N0554 V1D4 C0N57RU1ND0 4LGUM4 C0154 3, M415 C3D0 0U M415 74RD3, UM4 0ND4 P0D3R4 V1R 3 D357RU1R 7UD0 0 QU3 L3V4M05 74N70 73MP0 P4R4 C0N57RU1R. M45 QU4ND0 1550 4C0NT3C3R, 50M3N73 4QU3L3 QU3 73M 45 M405 D3 4LGU3M P4R4 53GUR4R 53R4 C4P42 D3 50RR1R! S0 0 QU3 P3RM4N3C3 3 4 4M124D3, 0 4M0R 3 0 C4R1NH0. 0 R3570 3 F3170 D3 4R314.

(4U70R D35C0NH3C1D0)

Se considerar necessário, dizer aos alunos que nem sempre precisamos usar as letras do alfabeto para escrever um texto, como nesse caso, em que substituímos letras por números.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. Após a leitura do texto, respondam às questões em grupo.

a) Em qual ambiente se passa a história desse texto? A história se passa na praia.

b) Do que brincavam as crianças? Brincavam de construir castelo de areia.

c) Quem desmanchou o castelo? Uma onda do mar desmanchou o castelo.

d) Como as crianças reagiram quando o castelo foi desmanchado? As crianças correram pela praia, fugindo da água, rindo de mãos dadas.

e) O que o narrador aprendeu com a cena que observou? Aprendeu que tudo o que construímos nesta vida pode ser destruído, só o que permanece é a amizade, o amor e o carinho. O resto é feito de areia.

2. Copiem a tabela no caderno e completem-na com números ou letras para explicitar o código usado no texto.

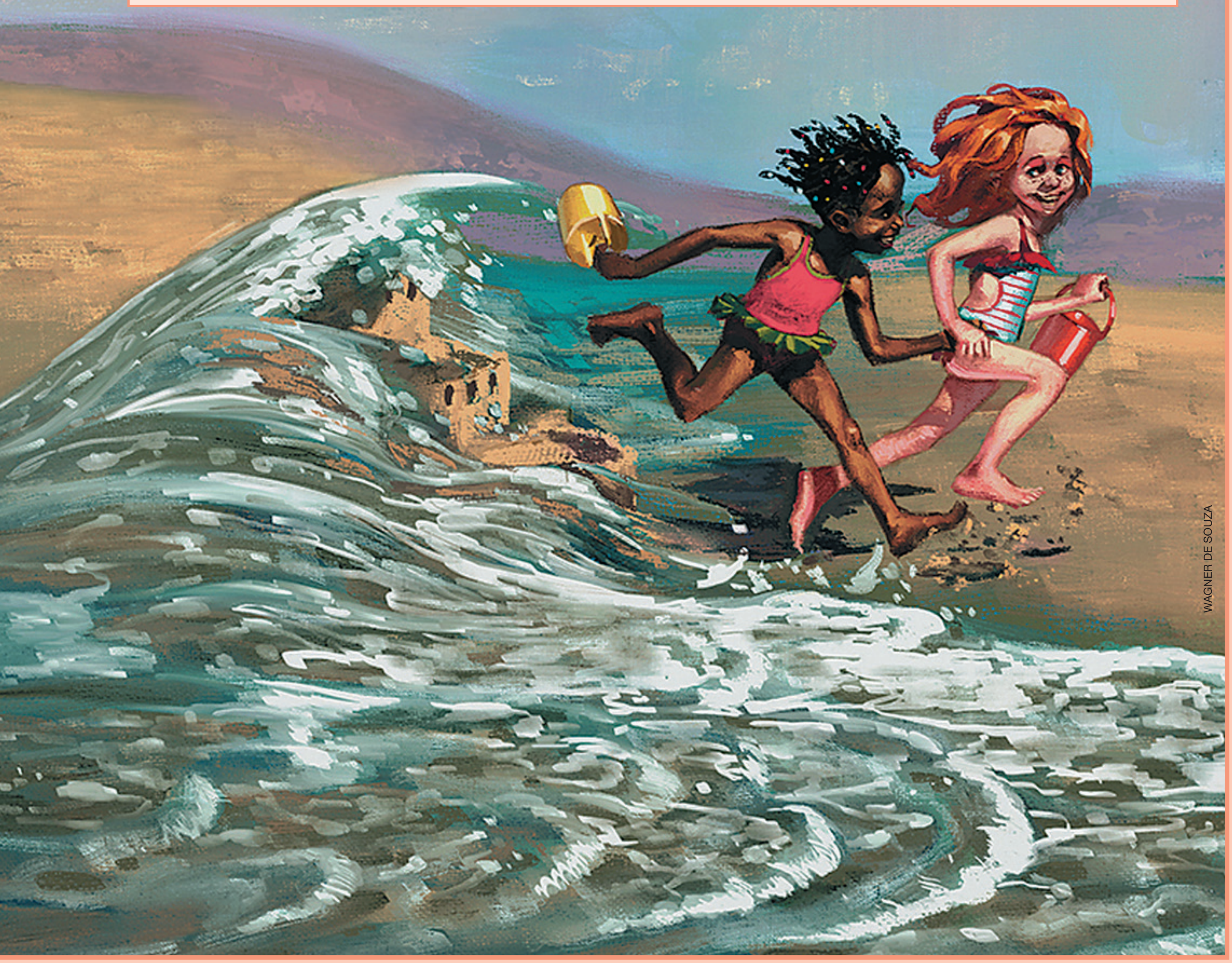
Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Número ou letra																										
	4	8	C	D	3	F	G	H	1	J	K	L	M	N	0	P	Q	R	5	7	U	V	W	X	Y	2

MODELO

3. Com o mesmo código do texto, escrevam sua opinião sobre ele. resposta pessoal

4. Decodifiquem o texto dado, escrevendo-o apenas com letras. Ver resolução no Guia do professor.

5. Atribuam às letras R, F e D, respectivamente, os números 6, 9 e 10. Em seguida, construam um único gráfico de colunas (uma coluna para cada letra da frase) para representar a frase “O RESTO É FEITO DE AREIA”. Ver resolução no Guia do professor.



WAGNER DE SOUZA

Capítulo 2

Conjuntos

Desfile de uma escola de samba no sambódromo do Rio de Janeiro, RJ, 2015.

Objetivos do capítulo

- Perceber situações em que se aplica a noção de conjunto.
- Descrever conjuntos.
- Efetuar operações com conjuntos.
- Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.
- Identificar os conjuntos numéricos.
- Representar e operar com intervalos reais.

1 Conjuntos

1.1 Noções básicas

Se pensarmos nos desfiles das escolas de samba no Carnaval, poderemos identificar diversos conjuntos. Por exemplo, há os conjuntos formados pelos integrantes de uma mesma escola de samba, os conjuntos de espectadores em cada setor do sambódromo, os conjuntos de integrantes de uma mesma ala etc.

Assim como nessa situação, em muitas outras recorremos à noção de conjunto como ideia de agrupamento ou coleção.

Na Matemática, para formar diferentes conjuntos, podemos usar determinadas características, como as das figuras geométricas ou as dos números.

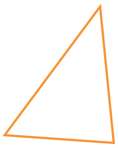
RICARDO MORAES/REUTERS/LATINSTOCK

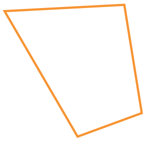
Exemplos

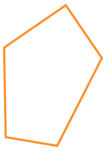
a) Conjunto dos números naturais pares: 0, 2, 4, 6, 8, ...

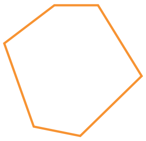
b) Conjunto dos divisores naturais de 6: 1, 2, 3 e 6

c) Conjunto de todos os polígonos com menos de sete lados:


todos os triângulos


todos os quadriláteros


todos os pentágonos


todos os hexágonos

Representação de um conjunto

Há mais de uma forma de representar um conjunto. Como exemplo, vamos representar de diferentes formas o conjunto *A*, formado pelos elementos 1, 3, 5, 7 e 9.

- Enumerando os elementos:

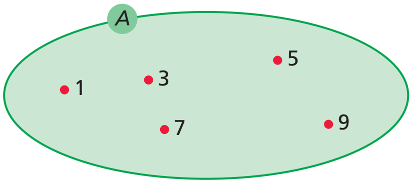
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- Considerando uma propriedade própria dos elementos:

$$A = \{x \mid x \text{ é um número natural ímpar menor que } 10\}$$

(lemos: "o conjunto *A* dos elementos *x* tal que *x* é um número natural ímpar menor que dez")

- Desenhando uma figura (diagrama de Venn):



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Independentemente da representação, com relação aos elementos do conjunto *A* podemos dizer que:

- 1 **pertence** a *A*; indicamos por: $\mathbf{1 \in A}$
- 2 **não pertence** a *A*; indicamos por: $\mathbf{2 \notin A}$

Exercício resolvido

R1. Escrever uma propriedade que defina cada conjunto.

a) $L = \{A, R\}$

b) $M = \{0, 10, 20, 30, 40, ...\}$

Resolução possível

a) *L*: letras da palavra ARARA.

b) *M*: *x* tal que *x* é um número natural múltiplo de 10.

Respostas possíveis:
a) *L*: letras da palavra AR.
b) *M*: *x* tal que $x = 2y$, em que *y* é um número natural múltiplo de 5.

Reflita

Que outras soluções teria o exercício **R1**?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

2. Respostas possíveis:
a) D: x é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40.
b) E: fases da Lua.
c) F: x é um número ímpar maior que 3 e menor que 21.

1. a) $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

1. Escreva os conjuntos expressos pelas propriedades.

a) A: conjunto dos divisores inteiros de 8.

b) B: conjunto das vogais da palavra PARALELEPÍPEDO. $B = \{A, E, I, O\}$

c) C: conjunto dos lados do triângulo ABC. $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. Escreva uma propriedade que defina cada conjunto a seguir.

a) $D = \{0, 12, 24, 36\}$

b) $E = \{$nova, crescente, cheia, minguante$\}$

c) $F = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

3. Considere os conjuntos:

A: conjunto dos números ímpares;

B: conjunto dos números primos;

C: conjunto dos números naturais múltiplos de 3.

Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $0 \in A$ falsa

b) $0 \notin B$ verdadeira

c) $1 \notin B$ verdadeira

d) $1 \in C$ falsa

e) $3 \in A$ verdadeira

f) $3 \in C$ verdadeira

4. Considere os conjuntos do exercício anterior para responder às questões.

a) Se um elemento pertencer a A, então ele também pertencerá a C?

b) Todo elemento de A também é elemento de B?

c) Todo elemento de B também é elemento de A?

4. a) Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3. O elemento 5, por exemplo, pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto C.

b) Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos. Por exemplo, o número 49 pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto B.

c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

1.2 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos, A e B, são **iguais** ($A = B$) quando têm os mesmos elementos.

Exemplo

$A = \{x \mid x$ é um número natural menor que 5$\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ são iguais, pois têm os mesmos elementos.

Se um conjunto A tiver ao menos um elemento que não pertença a um conjunto B (ou vice-versa), dizemos que esses conjuntos são **diferentes** ($A \neq B$).

◆ Observação

Como os conjuntos podem ser representados por uma propriedade ou pela enumeração de seus elementos, a verificação de que dois conjuntos dados têm os mesmos elementos pode não ser evidente.

1.3 Conjuntos vazio, unitário e universo

Conjunto vazio	Conjunto unitário	Conjunto universo
É o conjunto que não tem elementos. Indicamos o conjunto vazio por: $\varnothing$ ou $\{\ \}$	É o conjunto que tem apenas um elemento.	É o conjunto considerado para estudar determinada situação. Indicamos o conjunto universo por: U
Exemplo $B = \{x \mid x$ é um número primo par maior que 5$\}$ Então, $B = \varnothing$ ou $B = \{\ \}$.	***Exemplo*** $C = \{x \mid x$ é um número natural primo par$\}$ Logo, $C = \{2\}$. Como C tem apenas um elemento, C é um conjunto unitário.	***Exemplo*** Se vamos estudar a faixa salarial de uma empresa A, o conjunto universo é o conjunto dos valores dos salários de todos os funcionários dessa empresa. $U = \{$valores dos salários dos funcionários da empresa A$\}$

Deixar claro para os alunos que, para representar o conjunto vazio, usamos o símbolo $\varnothing$ ou $\{\ \}$ e **nunca** o símbolo $\{\varnothing\}$, que é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio.

Exercício resolvido

R2. Considerando os diferentes conjuntos universo U, resolver a equação $x + 3 = 0$.

a) U é o conjunto dos números naturais.

b) U é o conjunto dos números inteiros.

▶ ***Resolução***

a) Considerando o conjunto dos números naturais como o conjunto universo, a equação não tem solução, ou seja, $S = \varnothing$.

b) Considerando o conjunto dos números inteiros como o conjunto universo, a equação tem solução -3, ou seja, $S = \{-3\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

5. Sejam os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é um número natural não nulo e $x \leq 1\}$;

$B = \{x \mid x$ é um número ímpar e $-1 < x < 1\}$;

$C = \{x \mid x$ é um número natural e $x^2 = 1\}$.

Quais são os conjuntos iguais? $A = C$

6. Enumere os elementos dos conjuntos. **a)** $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

a) $X = \{x \in U \mid -10 < x < 10\}$, sendo U o conjunto dos números naturais.

b) $Y = \{y \in U \mid -10 < y < 10\}$, sendo U o conjunto dos números inteiros.

b) $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

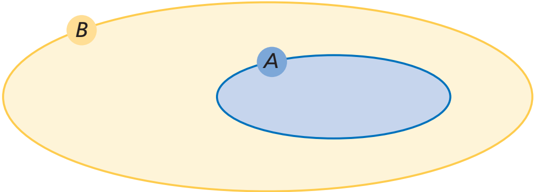
1.4 Subconjuntos de um conjunto

Dizemos que o conjunto *A* é **subconjunto** do conjunto *B* se, e somente se, todos os elementos de *A* pertencerem a *B*.

Os conjuntos *A* e *B* ilustram essa propriedade.

$A = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 4$\}$

$B = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 2$\}$



ADILSON SECCO

Para indicar a relação entre os conjuntos *A* e *B*, usamos a notação: $\boldsymbol{A \subset B}$ (lemos: "*A* é **subconjunto** de *B*" ou "*A* **está contido** em *B*")

Também podemos dizer que *B* **contém** *A*. A notação é: $\boldsymbol{B \supset A}$

Consideraremos verdadeiras, sem demonstrar, as seguintes afirmações:

- O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
- Todo conjunto está contido nele mesmo.
- Dados dois conjuntos quaisquer, *A* e *B*, se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.
- Dados três conjuntos quaisquer, *A*, *B* e *C*, se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

◆ Reflita

Se um número é múltiplo de 4, então ele é também múltiplo de 2?

Sim, $m(4) \subset m(2)$. Se $D \subset C$, então os elementos de *D* têm as propriedades de *C*.

Se achar conveniente, explorar a relação *se/então* nos casos em que há relação de inclusão entre conjuntos.

◆ Observação

Se um conjunto *D* não for subconjunto de *E*, dizemos que *D* **não está contido** em *E*. Indicamos por: $\boldsymbol{D \not\subset E}$

Exercícios resolvidos

R3. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{b, c\}$, verificar se as sentenças a seguir são verdadeiras.

a) $A \supset C$

b) $B \not\subset A$

c) $C \subset A$

▶ ***Resolução***

a) A sentença é verdadeira, pois todos os elementos de *C* pertencem a *A*.

b) A sentença é verdadeira, pois existe o elemento *d* em *B* que não pertence a *A*.

c) A sentença é verdadeira, pois todos os elementos de *C* pertencem a *A*.

R4. Considerar os conjuntos U: conjunto dos números naturais, $A = \{x \in U \mid x \text{ é um número múltiplo de } 2\}$ e $B = \{x \in U \mid x \text{ é um número múltiplo de } 10\}$.

a) Há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10?

b) Há múltiplo de 10 que não é múltiplo de 2?

c) Construir um diagrama que ilustre a relação entre os conjuntos A e B.

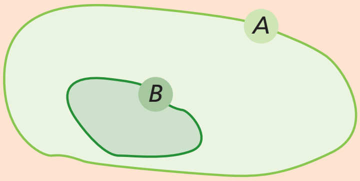
d) Todos os múltiplos de 2 também são múltiplos de 10?

▸ ***Resolução***

a) Sim, há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10. Por exemplo: 10, 20 e 30.

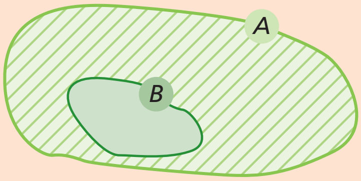
b) Não, todo múltiplo de 10 é um número par; logo, é múltiplo de 2 também, ou seja, $B \subset A$.

c)



d) Nem todo múltiplo de 2 é múltiplo de 10. Há múltiplos de 2, como o 6, que não são múltiplos de 10.

No diagrama, eles estão localizados na região hachurada, pois pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao B.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

7. Considere os conjuntos $C = \{1\}$, $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ e F: conjunto dos números naturais primos. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $C \supset D$ falsa

b) $C \subset E$ verdadeira

c) $D \subset F$ falsa

d) $D \not\subset E$ verdadeira

e) $F \supset E$ falsa

f) $\varnothing \subset C$ verdadeira

g) $E = F$ falsa

h) $C \not\subset F$ verdadeira

i) $E \supset C$ verdadeira

8. Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 9\}$, $B = \{1, 3, 8, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, determine os conjuntos que satisfazem as condições:

a) J: conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. {2, 9}

b) K: conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a C. {3, 9}

c) L: conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e não pertencem a C. {8, 4}

d) M: conjunto formado pelos elementos que pertencem a C e não pertencem a B. {5, 7, 9}

9. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b\}$, determine todas as possibilidades de um conjunto M sabendo que $M \subset A$ e $M \supset B$.
$M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou
$M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Considere os conjuntos:

$A = \{x \mid x \text{ é um número natural}\}$;

$B = \{x \mid x \text{ é um número natural múltiplo de } 5\}$;

$C = \{x \mid x \text{ é um número natural múltiplo de } 10\}$;

$D = \{x \mid x \text{ é um número natural múltiplo de } 20\}$.

Escreva relações entre dois dos conjuntos A, B, C e D usando os símbolos $\supset$, $\subset$ e $\not\subset$.

Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

11. Em um escritório, trabalham cinco pessoas: Jonas, Carlos, João, Rui e Ana.

Considere os conjuntos:

O: pessoas que usam óculos;

A: pessoas que usam aparelho nos dentes;

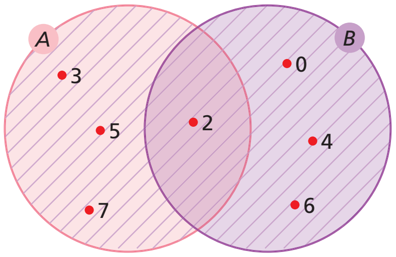
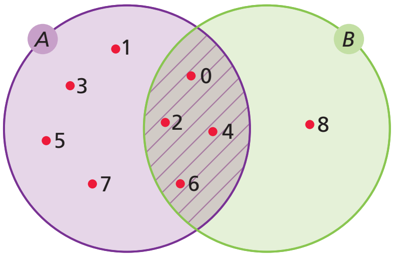
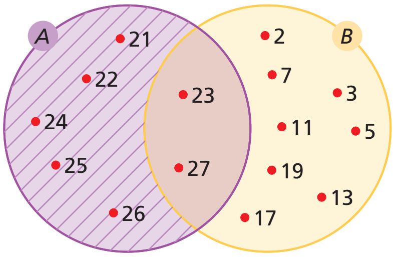
H: pessoas do sexo masculino.

Sabendo que $A \subset O$, $O \subset H$ e que João e Rui usam aparelho nos dentes, descubra quem usa óculos. (*Dica*: há mais de uma resposta possível.)

11. O = {João, Rui} ou
O = {João, Rui, Jonas} ou
O = {João, Rui, Carlos} ou
O = {João, Rui, Carlos, Jonas}

As ideias envolvidas na resolução do exercício **8** serão exploradas nas páginas seguintes.

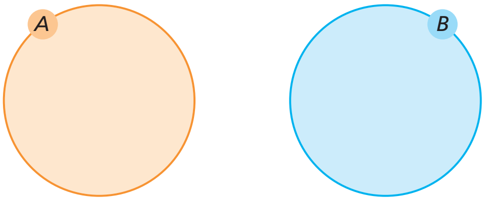
2 Operações com conjuntos

União de conjuntos	Intersecção de conjuntos	Diferença de conjuntos
Dados dois conjuntos, *A* e *B*, a união de *A* e *B* é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* **ou** a *B*.	Dados dois conjuntos, *A* e *B*, a intersecção de *A* e *B* é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* **e** a *B*.	Dados dois conjuntos, *A* e *B*, a diferença de *A* e *B* é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* **mas não pertencem** a *B*.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$
		 A 21 2 B 22 7 23 3 24 11 5 25 27 19 13 26 17
As regiões hachuradas representam $A \cup B$.	A região hachurada representa $A \cap B$.	A região hachurada representa $A - B$.

Se achar conveniente, alertar os alunos de que, na união dos conjuntos matemáticos, o conectivo **ou** significa que o elemento pertence a pelo menos um dos conjuntos envolvidos, podendo também pertencer a ambos.

◆ Observação

Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que *A* e *B* são **conjuntos disjuntos.**



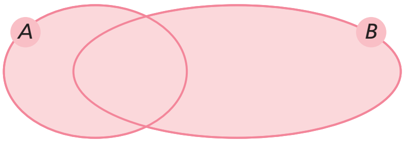
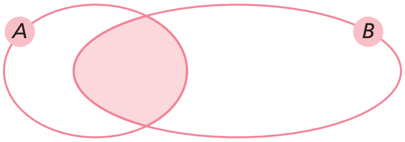
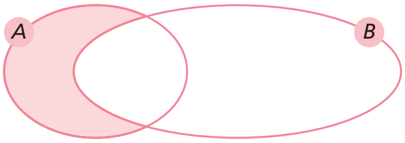
Em problemas que envolvem a noção de conjunto, em especial naqueles que se referem a pesquisas, geralmente o interesse não é saber que elementos pertencem a qual conjunto, mas estabelecer o número de elementos de cada conjunto.

Vamos analisar o que ocorre com o número de elementos de um conjunto resultante de algumas operações.

No quadro abaixo, vamos considerar as seguintes representações:

- *A* e *B* são dois conjuntos finitos quaisquer;
- $n(A)$ é o número de elementos do conjunto *A*;
- $n(B)$ é o número de elementos do conjunto *B*.

Se achar conveniente, comentar com os alunos que:
- Se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se *A* e *B* são disjuntos, então:
  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$,
  $n(A - B) = n(A)$ e
  $n(A \cap B) = 0$.
- Se $B \subset A$, então:
  $n(A \cap B) = n(B)$,
  $n(A \cup B) = n(A)$ e
  $n(A - B) = n(A) - n(B)$

$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$
O número de elementos de *A* união *B* é:	O número de elementos de *A* intersecção *B* é:	O número de elementos de *A* menos *B* é:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$	$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
		

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R5. Em uma faculdade de Agronomia, os estudantes pesquisavam como alguns fatores de um ambiente interno influenciavam as plantas. Eles submeteram alguns espécimes aos seguintes fatores: cor da sala (C), altura da planta em relação ao solo (A) e ventilação do ambiente (V). Depois do experimento, tabularam o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle. Ver os resultados na tabela ao lado.

a) Qual foi o número de plantas do experimento?

b) Quantas plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator “cor da sala”?

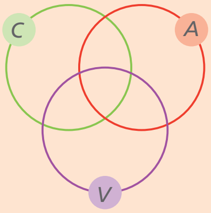
Fator(es)	Número de plantas
C	11
A	8
V	12
C e A	5
A e V	5
V e C	4
C, A e V	3

PAUL BURNS/GLOW IMAGES

É chamada de planta-controle aquela que, exposta a uma condição controlada, serve de parâmetro de crescimento e de outras transformações para as demais plantas de um experimento.

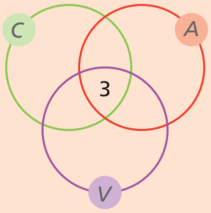
Resolução

a) Uma das formas práticas de resolver problemas como esse é a representação dos conjuntos por meio de diagrama.

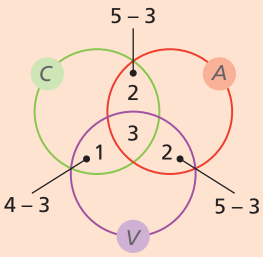


Para calcular a quantidade de elementos de cada conjunto, podemos seguir estes passos:

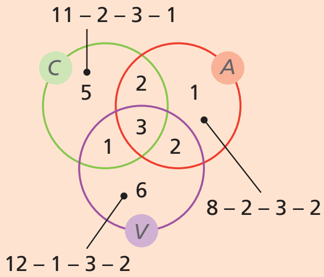
1º) Indicar o número de plantas afetadas pelos três fatores (cor, ventilação do ambiente e altura em relação ao solo) na região do diagrama que representa a intersecção dos três conjuntos.



2º) Completar as regiões que representam a intersecção de apenas dois conjuntos.



3º) Completar as regiões que representam apenas um dos conjuntos.



Com base nesses dados, o número de plantas do experimento foi:

$5 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 6 = 20$

Portanto, o experimento foi realizado com 20 plantas.

b) Observando o diagrama completo, estamos interessados no conjunto $(A \cup V) - C$, cujo total de elementos é: $1 + 2 + 6 = 9$

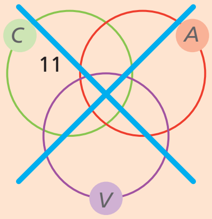
Logo, 9 plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator “cor da sala”.

◆ Observação

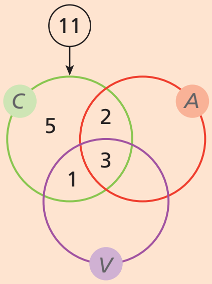
Não confunda!

Dizer que 11 plantas apresentaram alterações quando submetidas ao fator “cor da sala” não significa que elas não sofreram influência de outros fatores.

Incorreto:



Correto:

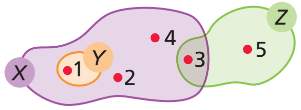


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

12. Considere os conjuntos X, Y e Z.



Determine:

a) $X \cup Y$ $\{1, 2, 3, 4\}$

b) $Y \cup Z$ $\{1, 3, 5\}$

c) $Z \cup X$ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $X \cup Y \cup Z$ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

13. Segundo estimativas do IBGE, em 2013 a população brasileira que morava na área urbana era de 170.786.000 habitantes e na área rural, 30.681.000 habitantes.

Considerando U o conjunto formado por pessoas que moravam na área urbana e R o conjunto formado por pessoas que moravam na área rural, determine quantos elementos tem o conjunto $P = U \cup R$. 201.467.000 elementos

14. Considere os conjuntos:

$P = \{x \mid x$ é um número natural par$\}$;

$I = \{x \mid x$ é um número natural ímpar$\}$;

$M = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de $10\}$.

Determine:

a) $P \cap M$ M

b) $P \cap I$ $\varnothing$

c) $I \cap M$ $\varnothing$

d) $(P \cup I) \cap M$ M

15. Considere os conjuntos:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$;

$Y = \{n \mid n$ é um natural primo menor que $6\}$;

$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Determine:

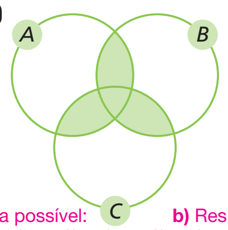
a) $X - Z$ $\varnothing$

b) $Y - X$ $\{5\}$

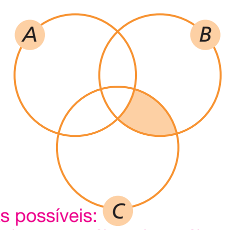
c) $Z - X$ $\{5, 6, 7, 8, 9\}$

16. Descreva a parte pintada em cada diagrama por meio de operações de conjuntos.

a)



b)



a) Resposta possível: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) Respostas possíveis: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. Um hospital está avaliando os resultados de um tratamento com 50 voluntários, dos quais: 12 sentiram dor de cabeça, 8 sentiram náusea e 4 sentiram dor de cabeça e náusea. Quantos voluntários sentiram dor de cabeça e não sentiram náusea? Quantos voluntários não sentiram dor de cabeça nem náusea? 8 voluntários; 34 voluntários

18. Considere os conjuntos:

P: números primos naturais menores que 10;

M: números naturais múltiplos de 2 menores que 10;

Q: números naturais múltiplos de 4 menores que 10.

Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $n(P) = 4$ verdadeira

b) $n(P \cup M) = 9$ falsa

c) $n(P \cap M) = 1$ verdadeira

d) $n(Q - M) = 2$ falsa

e) $n(P \cup Q) = 7$ verdadeira

f) $n(M - P) = 4$ verdadeira

19. Em uma pesquisa sobre uma marca de margarina, 110 entrevistados acharam que essa margarina não era cremosa e 65 acharam que era muito salgada. Sabendo que foram entrevistadas 150 pessoas e que nenhuma delas achou simultaneamente a margarina cremosa e não muito salgada, calcule o número de pessoas que acharam a margarina não cremosa e muito salgada. 25 pessoas

20. De três filmes que lançou, uma distribuidora pesquisou quais estavam agradando mais ao público. Sabe-se que 32% do público gostou mais do filme X; 29%, do filme Y; 30%, do filme Z; 17%, dos filmes X e Y; 13%, dos filmes Y e Z; 12%, dos filmes X e Z; 5%, dos três filmes.

a) Que porcentagem do público não gostou de nenhum dos três filmes? 46%

b) Escolha dois desses filmes para manter em cartaz por mais tempo e justifique sua escolha. os filmes X e Z, porque $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$

21. Uma indústria lançou um novo modelo de carro, que não teve a repercussão esperada. Os técnicos identificaram três possíveis problemas: *design* pouco inovador (D), acabamento pouco luxuoso (A) e preço mais elevado em relação aos modelos similares do mercado (P). Feita uma pesquisa, obtiveram o resultado: **(I)** Verdadeira. Foram pesquisadas 100 pessoas, das quais 63 acharam o preço elevado.

Problema(s)	Número de votos
D	34
A	66
P	63
D e *A*	17
D e *P*	22
A e *P*	50
D, *A* e *P*	10
Não encontraram problemas	16

Analisando o resultado, os técnicos concluíram:

(I) Mais da metade dos pesquisados achou o preço elevado.

(II) Como a quantidade de pessoas que não apontaram problemas é maior que a daquelas que apontaram os três problemas, a maioria das pessoas entrevistadas gostou do modelo.

(III) Para aumentar as vendas desse modelo, é melhor criar vantagens na forma de pagamento.

Analise as conclusões e verifique quais estão de acordo com os dados apresentados.

21. (II) De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.
(III) Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento que criar vantagens na forma de pagamento.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

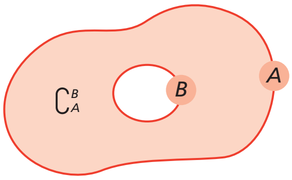
Complementar de um conjunto

Considere os conjuntos $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ e $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$.

Chamamos de complementar do conjunto P em relação a N, com $P \subset N$, o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$, formado pelos elementos que pertencem a N e não pertencem a P. Indicamos esse conjunto por: $\complement_N^P$

O **complementar** de um conjunto B em relação a um conjunto A, com $B \subset A$, é definido por:

$$\complement_A^B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



ADILSON SECCO

Ou seja: $\complement_A^B = A - B$

Observação

O complementar de um conjunto A em relação ao conjunto universo U também pode ser expresso pela notação: A^C ou $\overline{A}$

Exercício resolvido

R6. Dados os conjuntos $U = \{V, I, A, G, E, M\}$, $A^C = \{V, I, A\}$ e $B^C = \{E, M\}$, determinar:

a) A **b)** B

Resolução

a) Como $A^C = \{V, I, A\}$, os elementos de U que não pertencem a A^C pertencem ao conjunto A.
Portanto, $A = \{G, E, M\}$.

b) Como $B^C = \{E, M\}$, os elementos de U que não pertencem a B^C pertencem ao conjunto B.
Portanto, $B = \{V, I, A, G\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

22. Dados o conjunto universo $U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ e $C = \{4\}$, determine:

a) A^C {6, 8, 10}
b) B^C {0, 2, 10}
c) C^C {0, 2, 6, 8, 10}
d) $\complement_B^C$ {6, 8}

23. Dado um conjunto universo U, considere um subconjunto qualquer C. Qual é o complementar do complementar desse conjunto C?
o próprio conjunto C

24. Determine o número de elementos dos conjuntos indicados a seguir.

a) $n(A \cup B)$, sabendo que $n(A) = 10$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 0$ 15
b) $n(A \cup B)$, sabendo que $n(A) = 15$, $n(B) = 15$ e $n(A \cap B) = 3$ 27
c) $n(A - B)$, sabendo que $n(A) = 0$ 0
d) $n(A - B)$, sabendo que $n\left(A \cap \complement_A^B\right) = 5$ 5

3 Conjuntos numéricos

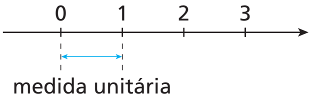
3.1 Conjuntos dos números naturais e dos números inteiros

A origem dos números naturais está associada à necessidade de contagem. Hoje, no entanto, além do emprego na contagem, usamos os números naturais para compor códigos (como os de telefone), para indicar ordem (1º, 2º, 3º, ...), entre outras aplicações.

O **conjunto dos números naturais** tem infinitos elementos e é indicado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Para representar os números naturais em uma reta ordenada, primeiro marcamos um ponto e associamos a ele o número zero. Escolhemos uma medida unitária e marcamos, a partir do ponto associado ao zero, à sua direita, pontos distantes uma, duas, três unidades e assim sucessivamente:



◆ **Observação**

Para representar o subconjunto dos números naturais sem o zero, utilizamos a notação:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$

Em geral, o asterisco junto ao símbolo significa que o elemento zero foi retirado desse conjunto.

Todo número natural pode ser associado a um ponto da reta.

No conjunto dos números naturais, são definidas duas operações, a adição e a multiplicação, para as quais verificamos que quaisquer dois números naturais adicionados ou multiplicados resultam em um número natural. Mas, se efetuarmos a subtração de dois números naturais, nem sempre o resultado será um número natural. Se subtrairmos, por exemplo, 78 de 73, o resultado será -5, e -5 não pertence ao conjunto dos números naturais.

Acrescentando os números negativos $-1, -2, -3, -4, ...,$ aos naturais, formamos o **conjunto dos números inteiros**, que é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

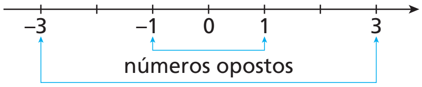
◆ **Observação**

Algumas notações especiais:

- Conjunto dos números inteiros não nulos:
  $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto dos números inteiros não negativos:
  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto dos números inteiros não positivos:
  $\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$

Em $\mathbb{Z}$, além da adição e da multiplicação, também podemos operar livremente a subtração.

Os números inteiros podem ser assim representados em uma reta ordenada:



O conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

25. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $-2 \in \mathbb{N}$ falsa

b) $0 \in \mathbb{N}$ verdadeira

c) $100 \in \mathbb{Z}$ verdadeira

d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$ falsa

e) $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ verdadeira

f) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \varnothing$ falsa

26. Cite uma operação que não está definida para quaisquer dois números inteiros, a e b. Resposta possível: divisão

Ao resolver o exercício **26**, perguntar aos alunos se conhecem um conjunto numérico em que o quociente de dois elementos quaisquer pertença ao conjunto referido. Com isso, pode-se introduzir o conjunto $\mathbb{Q}$, lembrando que em $\mathbb{Q}$ não está definida a divisão por zero.

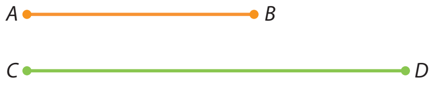
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3.2 Conjunto dos números racionais

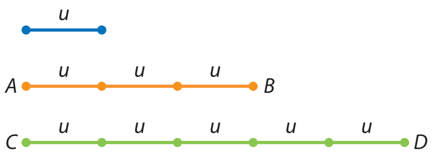
O surgimento dos números racionais está associado à necessidade de realizar e expressar medições.

Ao realizar uma medição de comprimento, massa, temperatura, superfície ou de qualquer outra grandeza, estamos comparando o que queremos medir com uma unidade de medida escolhida como padrão.

Por exemplo, para medir um segmento é necessário comparar seu comprimento com o comprimento de outro segmento tomado como unidade de medida. Assim, para medir o comprimento do segmento $\overline{CD}$ abaixo, tomando a medida de $\overline{AB}$ como unidade de medida, devemos verificar quantas vezes a medida AB "cabe" em $\overline{CD}$.



Note que, nesse caso, a comparação não pode ser feita por meio de um número inteiro; porém, podemos considerar uma unidade de medida u, de maneira que essa unidade "cabe" um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$:



$AB = 3u$ e $CD = 5u$

ADILSON SECCO

◆ Observação

Quando existe uma unidade de medida que "cabe" um número inteiro de vezes em dois segmentos, dizemos que esses segmentos são **comensuráveis**.

Comparando agora $\overline{CD}$ com $\overline{AB}$, podemos escrever:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{5u}{3u} \Rightarrow CD = \frac{5}{3}AB$$

Portanto, a medida de $\overline{CD}$, considerando AB como unidade de medida, é $\frac{5}{3}$.

Para expressar medidas como essa, utilizamos os números racionais.

O **conjunto dos números racionais** é formado por todos os números que podem ser escritos na forma da razão $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, e indicamos por:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

◆ Observação

Veja outros subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que têm notação especial:

- Conjunto dos números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^*$
- Conjunto dos números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+$
- Conjunto dos números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_-$

Exemplos

- $\frac{8}{25}$
- $-2 = -\frac{2}{1}$
- $0{,}25 = \frac{1}{4}$
- $0 = \frac{0}{10}$

O conjunto dos números inteiros é um subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, então $\mathbb{N}$ também é subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

Exercício resolvido

R7. Considerando que no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros para a adição e a multiplicação a propriedade do fechamento é válida, isto é, que a soma $(a + b)$ e que o produto $(a \cdot b)$ de dois números inteiros, a e b, são também números inteiros, demonstrar as afirmações abaixo.

a) A soma de dois números racionais é um número racional.

b) O produto de dois números racionais é um número racional.

▶ ***Resolução***

Vamos considerar os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

a) A soma de x e y é dada por:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Temos $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$, $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot d + b \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro, e o denominador é um número inteiro não nulo.

Portanto, a soma de dois números racionais é um número racional.

Assim, podemos dizer que no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, para a adição, a propriedade do fechamento é válida.

b) O produto de x e y é dado por:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Temos $(a \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo.

Portanto, o produto de dois números racionais é um número racional.

Assim, podemos dizer que no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, para a multiplicação, a propriedade do fechamento é válida.

Verifique a conveniência de observar ou questionar os alunos sobre a veracidade e a recorrência da afirmação: entre dois números racionais, sempre existe um número racional.

◆ Reflita

Reúna-se com um colega, explorem as conclusões do exercício **R7** e verifiquem se a média aritmética de dois números racionais quaisquer é sempre um número racional.

A média aritmética de dois números racionais x e y é dada por $\frac{x + y}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x + y)$. Usando as conclusões do exercício **R7**, temos:

- x e y são números racionais; logo, $(x + y)$ é um número racional;
- $(x + y)$ e $\frac{1}{2}$ são números racionais; logo, $\frac{1}{2} \cdot (x + y)$ é um número racional.

Portanto, a média aritmética de dois números racionais é sempre um número racional.

Representação decimal e representação fracionária de números racionais

Para representar um número racional $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, na forma decimal, dividimos a por b. O resultado dessa divisão será sempre:

- um número com representação decimal finita (podendo ser inteiro);
- ou uma dízima periódica.

Observação

Dízima periódica é todo número decimal que só pode ser representado com um número infinito de casas decimais e em que, a partir de determinada casa decimal, há apenas a repetição de um mesmo algarismo ou de uma mesma sequência finita de algarismos.

Na dízima periódica, o algarismo ou a sequência de algarismos que se repete é chamado de **período**.

Observe alguns exemplos:

a) $\frac{2}{50} = 0{,}04$ (número com representação decimal finita)

b) $\frac{0}{1.000} = 0$ (número com representação decimal finita)

c) $\frac{24}{4} = 6$ (número com representação decimal finita)

d) $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$ (dízima periódica de período 3)

e) $\frac{311}{396} = 0{,}7853535353\ldots$ (dízima periódica de período 53)

Da mesma forma que um número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número com representação decimal finita ou por uma dízima periódica, esses também podem ser representados na forma fracionária. Observe:

Reflita

Para que valor de a cada fração abaixo representa o mesmo número racional?

- $\frac{a}{21}$ e $\frac{4}{7}$ 12
- $-\frac{18}{66}$ e $\frac{12}{a}$ −44

- $\frac{a}{21} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7a = 84 \Rightarrow a = 12$
- $-\frac{18}{66} = \frac{12}{a} \Rightarrow -18a = 792 \Rightarrow a = -44$

a) $70 = \frac{70}{1}$

b) $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

c) $-0{,}0125 = -\frac{125}{10.000} = -\frac{1}{80}$

d) Para obter a fração geratriz da dízima periódica 0,6666... podemos seguir alguns passos:

1º) Escrevemos a equação: $x = 0{,}666\ldots$ (I)

2º) Multiplicamos por 10 ambos os membros da equação (I), obtendo:
$10x = 6{,}666\ldots$ (II)

3º) Subtraímos membro a membro as equações:

$$\begin{cases} 10x = 6{,}666\ldots \text{ (II)} \\ x = 0{,}666\ldots \text{ (I)} \end{cases}$$
$$9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Observação

A fração que gera uma dízima periódica é denominada **fração geratriz.**

e) Para obter a fração geratriz da dízima periódica 1,04545...:

1º) Escrevemos a equação: $x = 1{,}04545\ldots$ (I)

2º) Multiplicamos por 10 ambos os membros da equação (I):
$10x = 10{,}4545\ldots$ (II)

3º) Multiplicamos por 1.000 ambos os membros da equação (I):
$1.000x = 1.045{,}4545\ldots$ (III)

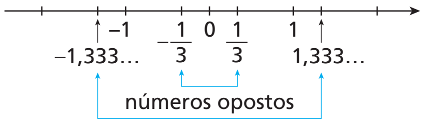
4º) Da equação (III), subtraímos membro a membro a equação (II):

$$\begin{cases} 1.000x = 1.045{,}45\ldots \text{ (III)} \\ 10x = 10{,}45\ldots \text{ (II)} \end{cases}$$
$$990x = 1.035 \Rightarrow x = \frac{1.035}{990} = \frac{23}{22}$$

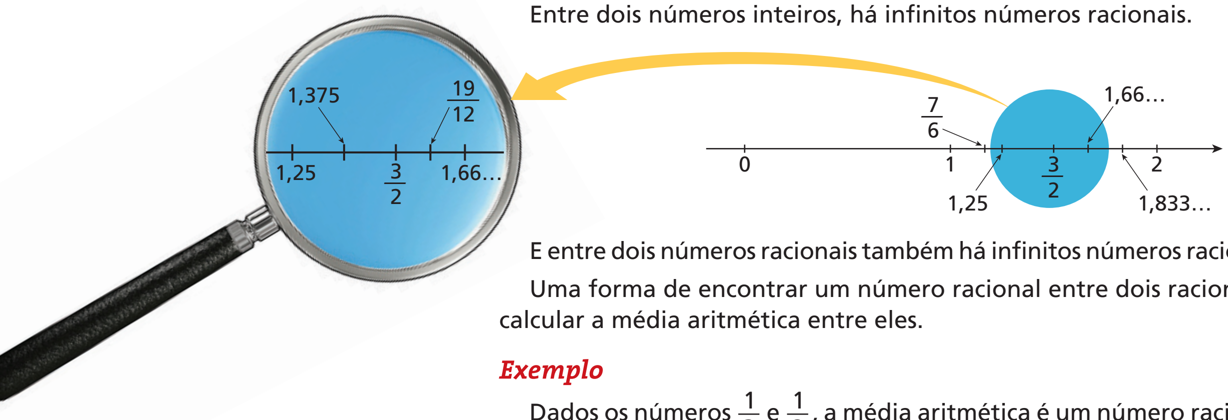
Portanto: $1{,}04545\ldots = \frac{23}{22}$

Representação dos números racionais na reta

Todos os números racionais podem ser representados na reta ordenada.



Entre dois números inteiros, há infinitos números racionais.



E entre dois números racionais também há infinitos números racionais.

Uma forma de encontrar um número racional entre dois racionais é calcular a média aritmética entre eles.

Exemplo

Dados os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, a média aritmética é um número racional:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$

Na reta ordenada, $\frac{5}{12}$ situa-se entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

27. Identifique o conjunto numérico mais adequado para representar cada situação.

a) O número de uma casa. $\mathbb{N}$

b) A temperatura de uma substância. $\mathbb{Q}$

c) Um andar de um prédio. $\mathbb{Z}$

d) A altura de uma pessoa, em metro. $\mathbb{Q}$

28. Represente uma reta ordenada com os números racionais: $\frac{7}{8}; \frac{9}{4}; -\frac{3}{5}; -7; -1{,}125$

29. Encontre a fração geratriz dos seguintes números racionais:

a) $-10{,}111...$ e $-10{,}010101...$ $-\frac{91}{9}; -\frac{991}{99}$

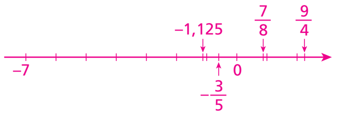
b) $1{,}333...$ e $1{,}5333...$ $\frac{4}{3}; \frac{23}{15}$

30. Discuta com um colega e demonstrem que:

a) A diferença de dois racionais é um racional.

b) O quociente de dois racionais não nulos é um racional. Ver resolução no Guia do professor.

28.

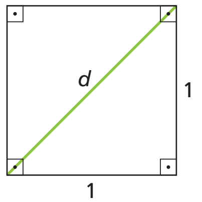


ADILSON SECCO

3.3 Conjunto dos números irracionais

Por muito tempo, acreditou-se que os números racionais eram suficientes para expressar a medida de qualquer segmento. Entretanto, os pitagóricos descobriram que a diagonal e o lado de um quadrado não são segmentos comensuráveis.

Consideremos um quadrado de lado unitário.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$, pois $d > 0$.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623...$ é um número cuja representação decimal tem infinitas casas não periódicas depois da vírgula. Jamais encontraremos uma unidade de medida que “caiba” um número inteiro de vezes em 1 (medida do lado do quadrado) e em $\sqrt{2}$, independentemente de quão pequena seja a unidade de medida.

Portanto, $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ não é um número racional.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Assim, surgiu a necessidade de se considerar um novo conjunto de números, o conjunto dos números irracionais.

O **conjunto dos números irracionais** é formado por todos os números que **não** podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Dessa forma, os números irracionais são aqueles cuja representação decimal não é finita e não é uma dízima periódica.

Além de $\sqrt{2}$, há infinitos números irracionais. Veja alguns exemplos:

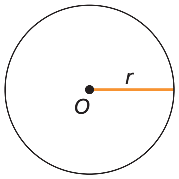
a) 0,60600600060000600000 6..., em que a quantidade de zeros que sucede imediatamente cada dígito 6 aumenta indefinidamente.

b) A raiz quadrada de um número natural que não é quadrado perfeito: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{27}$

c) A raiz cúbica de um número natural que não é cubo perfeito: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[3]{82}$

d) O resultado de algumas operações entre números racionais e irracionais: $-\sqrt{3}$, $10\sqrt[3]{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{7}$, $\frac{9}{\sqrt[4]{11}}$, $2 + \sqrt[5]{4}$

e) O número π (lemos: "pi"), que expressa a razão constante entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro.



ADILSON SECCO

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{\cancel{2}\pi\cancel{r}}{\cancel{2}\cancel{r}} = \pi$$

π = 3,1415926535... é um número que tem infinitas casas decimais não periódicas.

Exercício resolvido

R8. Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Resolução

Nesse caso, vamos aplicar a chamada **demonstração por redução ao absurdo**. Esse procedimento consiste em formular uma proposição suposta verdadeira (hipótese). Em seguida, tomando por base essa proposição e por meio de um encaminhamento guiado pelas leis da Lógica, chegamos a uma proposição contrária. Assim, fica estabelecida uma contradição da qual se deduz a falsidade da hipótese.

Vamos supor que $\sqrt{2}$ seja um número racional, isto é, que existam os números inteiros p e q, primos entre si e com $q \neq 0$, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, sendo $\frac{p}{q}$ uma fração irredutível (hipótese).

Elevando os dois membros ao quadrado e lembrando que todo múltiplo de 2 é um número par, temos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \text{(I)}$$

Note que p^2 é par; logo, p é par, ou seja, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2n$.

$$p = 2n \Rightarrow p^2 = (2n)^2 \Rightarrow p^2 = 4n^2 \overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} 2q^2 = 4n^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$$

Note que q^2 é par; logo, q é par.

Contudo, as conclusões "p é par" e "q é par" contradizem a hipótese de que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, ou seja, chegamos a um absurdo.

Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como uma razão de números inteiros; logo, não é um número racional.

◆ Observações

- Hipótese: proposição que se admite de modo provisório como princípio do qual se pode deduzir um conjunto dado de proposições (tese de um teorema).
- Teorema: proposição que, para ser admitida ou se tornar evidente, necessita de demonstração.
- Tese: proposição assumida como princípio teórico que fundamenta uma demonstração, argumentação ou um processo discursivo.

◆ Observações

- Quando a veracidade de uma afirmação ***p*** conduz à conclusão necessária da veracidade de outra afirmação, ***q***, temos uma **implicação lógica**.

  Denotamos essa relação por:

  p ⇒ ***q*** (lemos: "*p* implica *q*")

  Assim, por exemplo:

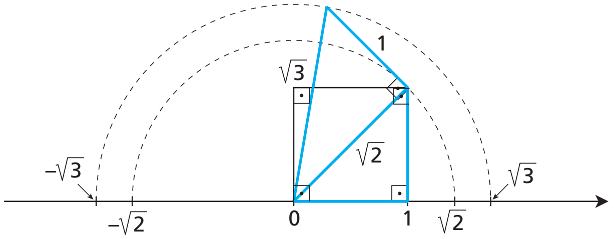
  p: todo número natural que termina em 0 é múltiplo de 10.

  implica

  q: 2.070 é múltiplo de 10.
- Quando ***p*** ⇒ ***q*** e ***q*** ⇒ ***p***, temos uma equivalência que representamos por: ***p*** ⇔ ***q*** (lemos: "*p* equivale a *q*")

Representação dos números irracionais na reta

Há um procedimento geométrico que permite representar alguns números irracionais na reta ordenada com o uso de compasso.

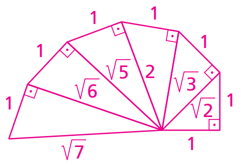

1
$\sqrt{3}$
$\sqrt{2}$
$-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
$-\sqrt{2}$
0
1
$\sqrt{2}$

Pela medida da diagonal do quadrado de lado 1, encontramos $\sqrt{2}$.

Construindo o triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{2}$, obtemos $\sqrt{3}$ como medida da hipotenusa.

◆ Reflita

Prosseguindo a construção, como encontramos $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$?

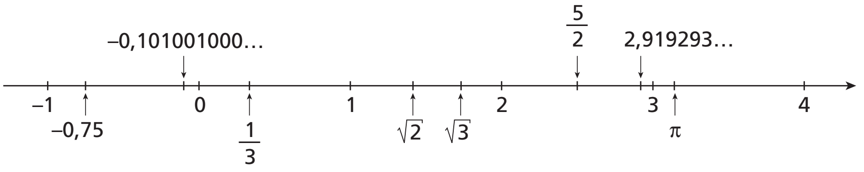

1
1
1
1
1
1
1
$\sqrt{5}$
2
$\sqrt{3}$
$\sqrt{6}$
$\sqrt{2}$
$\sqrt{7}$

ADILSON SECCO

3.4 Conjunto dos números reais

A reunião do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais resulta no **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

Se marcarmos na reta ordenada os números racionais e os números irracionais, preencheremos totalmente a reta, que passará a se chamar **reta real** ou **reta numérica**. Veja alguns exemplos:


$-0{,}101001000\ldots$
$\frac{5}{2}$
$2{,}919293\ldots$
-1
$-0{,}75$
0
$\frac{1}{3}$
1
$\sqrt{2}$
$\sqrt{3}$
2
3
π
4

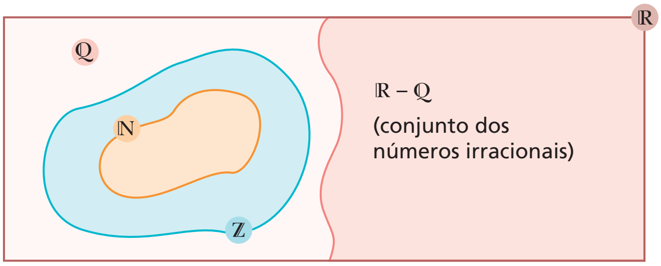
◆ Observação

Algumas notações especiais:

- Conjunto dos números reais não nulos: $\mathbb{R}^*$
- Conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+$
- Conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_-$

Relação de inclusão dos conjuntos númericos

Os conjuntos estudados até aqui podem ser representados em um diagrama:


$\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$
$\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
(conjunto dos números irracionais)

O conjunto dos números racionais é um subconjunto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$, então: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

◆ Reflita

- Encontre dois números irracionais cujo produto seja racional.
- Encontre dois números irracionais cuja soma seja racional.

Respostas possíveis:
- $\sqrt{2} + 1$ e $\sqrt{2} - 1$
- $\pi - 1$ e $2 - \pi$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

31. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) Um número irracional não é um número racional. verdadeira

b) A soma de um número irracional com um número racional é um número irracional. verdadeira

c) O produto de um número irracional por um número racional (diferente de zero) é um número racional. falsa

d) O produto de dois números reais é um número real. verdadeira

e) O produto de dois números racionais é um número racional. verdadeira

f) Uma dízima periódica é um número irracional. falsa

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

32. Represente os números abaixo em uma reta numérica e, em seguida, escreva-os em ordem crescente.

$\sqrt{5}$; $-\dfrac{2}{5}$; $\sqrt{25}$; $5{,}222...$; $-2{,}5$; $+\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$

Considerando os números maiores que $-\sqrt{2}$ e menores que $\sqrt{2}$, responda:

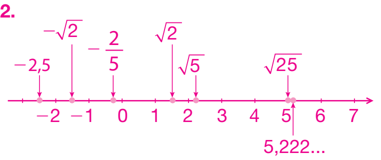
a) Quantos números naturais existem? dois

b) Quantos números inteiros existem? três

c) Quantos números racionais existem? infinitos

d) Quantos números reais existem? infinitos

32.



ADILSON SECCO

ordem crescente: $-2{,}5$, $-\sqrt{2}$; $-\dfrac{2}{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{25}$; 5,222...

33. Relacione usando os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a) -13 e $\mathbb{N}$ $\notin$

b) 0 e $\mathbb{Z}^*$ $\notin$

c) $-2{,}25$ e $\mathbb{Q}_+$ $\notin$

d) $\dfrac{6}{16}$ e $\mathbb{Q}$ $\in$

e) $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{R}^*$ $\subset$

f) $\mathbb{Z}_-$ e $\mathbb{R}_-$ $\subset$

g) $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}$ $\subset$

h) $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{R}_+$ $\not\subset$

i) $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{R}_-$ $\not\subset$

34. Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.

a) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ verdadeira

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ falsa

c) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}_+^*$ falsa

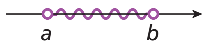
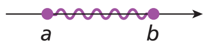
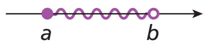
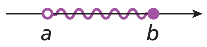
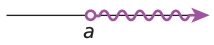
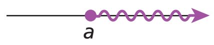
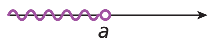
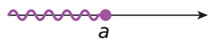
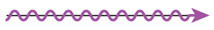
d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$ falsa

4 Intervalos

4.1 Representação de subconjuntos por intervalos

Podemos representar certos subconjuntos de $\mathbb{R}$ pela notação de intervalos.

Sendo a e b números reais tal que $a < b$, veja algumas representações, geométricas e algébricas, de intervalos numéricos envolvendo a e b.

Representação geométrica	Representação algébrica	Descrição
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, b[$	Intervalo aberto
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ ou $[a, b]$	Intervalo fechado
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ou $[a, b[$	Intervalo fechado à esquerda
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ ou $]a, b]$	Intervalo fechado à direita
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $]a, +\infty[$	Semirreta aberta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ ou $[a, +\infty[$	Semirreta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $]-\infty, a[$	Semirreta aberta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ ou $]-\infty, a]$	Semirreta de origem a
	$\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$	Reta real

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observações

- O símbolo **∞** representa infinito.
- O intervalo em que aparece **+∞** é aberto à direita.
- O intervalo em que aparece **−∞** é aberto à esquerda.

Na representação geométrica:

○ (bolinha vazia) indica que aquele extremo não pertence ao intervalo;

● (bolinha cheia) indica que aquele extremo pertence ao intervalo.

Na representação algébrica:

]*a*, *b*[indica que os extremos *a* e *b* não pertencem ao intervalo;

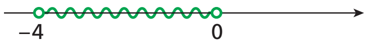
[*a*, *b*] indica que os extremos *a* e *b* pertencem ao intervalo;

[*a*, *b*[indica que o extremo *a* pertence ao intervalo, mas o extremo *b* não pertence;

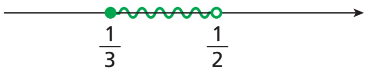
]*a*, *b*] indica que o extremo *a* não pertence ao intervalo, mas o extremo *b* pertence.

Exemplos

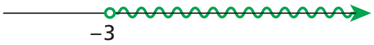
a) O intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0\}$ ou $]-4, 0[$ representado na reta real:



b) O intervalo $\left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq y < \frac{1}{2}\right\}$ ou $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$ representado na reta real:



c) O intervalo $\{z \in \mathbb{R} \mid z > -3\}$ ou $]-3, +\infty[$ representado na reta real:

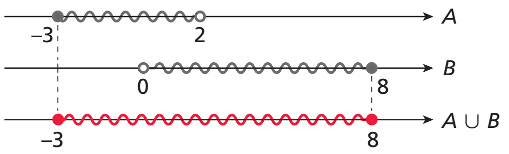


4.2 Operações com intervalos

Veja agora como proceder nas operações (união, intersecção e diferença) com intervalos numéricos utilizando o recurso da representação geométrica.

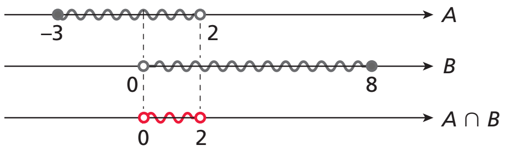
Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 8\}$, para efetuar as operações, representamos cada conjunto em retas reais paralelas.

$A \cup B$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 8\}$ ou $[-3, 8]$

$A \cap B$

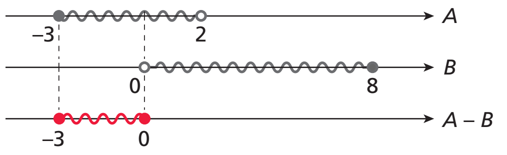


$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$ ou $]0, 2[$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

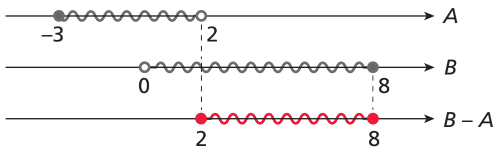
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A − B



$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 0\}$ ou $[-3, 0]$

B − A

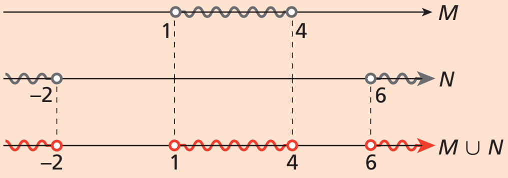


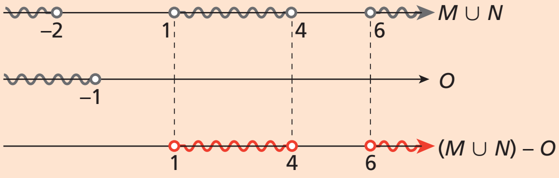
$B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 8\}$ ou $[2, 8]$

Exercício resolvido

R9. Dados os conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x < 4\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 6\}$ e $O = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, determinar $(M \cup N) - O$.

▶ ***Resolução***





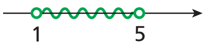
Portanto:

$(M \cup N) - O = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4 \text{ ou } x > 6\}$ ou $]1, 4[\cup]6, +\infty[$

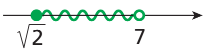
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

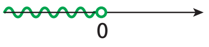
35. Use a notação de conjuntos para escrever os intervalos representados na reta real.

a) 

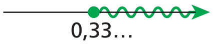
$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$

b) 

$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$

c) 

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$

d) 

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

36. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$, dados:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\}$

b) $A = [-1, 6[$ e $B =]1, +\infty[$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $B = [2, 5[$

36.
a) $A \cup B = A$
$A \cap B = B$
$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 5 \leqslant x < 7\}$
$B - A = \varnothing$
b) $A \cup B = [-1, +\infty[$
$A \cap B =]1, 6[$
$A - B = [-1, 1]$
$B - A = [6, +\infty[$
c) $A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$
$A \cap B = \varnothing$
$A - B = A$
$B - A = B$

37. O comprimento da circunferência de raio r é $2\pi r$, e a área do círculo de raio r é πr^2. Dessa maneira, determine o intervalo a que pertencem os números que representam o comprimento da circunferência de raio 0,5 e a área do círculo determinado por essa circunferência. alternativa d

a) $]0, 1[$

b) $\left[1, \dfrac{32}{10}\right]$

c) $\left]\dfrac{99}{100}, 3\right]$

d) $]-1, 4]$

38. (Cesgranrio-RJ) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, o conjunto que representa $(A \cap B) - C$ é: alternativa a

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. a) $\{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$

1. Represente os conjuntos explicitando seus elementos.

a) $A = \{m \mid m \text{ é um número inteiro par e divisor de } 20\}$

b) $B = \{x \mid x \text{ é um número ímpar e } 3 < x < 5\}$ $\varnothing$

c) $C = \{x \mid x \text{ é um número natural e } x < 3\}$ $\{0, 1, 2\}$

2. Represente os conjuntos segundo uma possível propriedade que defina cada um. Respostas possíveis:

a) $A = \{\text{b, n, a}\}$

$A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$

b) $B = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$

$B = \{x \mid x$ é natural e potência de $2\}$

3. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:

a) $A \cup B$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $A - C$ $\{0, 1, 2\}$

c) $B \cup C$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$

d) $A \cup B \cup C$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

e) $A - B$ $\{0\}$

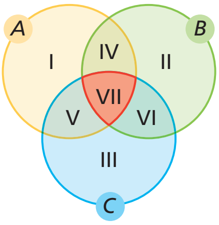
f) $A \cap C$ $\{3, 4\}$

g) $B \cap C$ $\{3, 4, 5, 6\} = C$

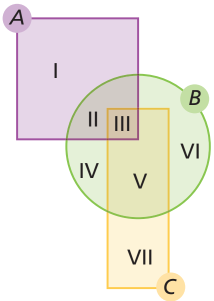
h) $(A - B) \cap C$ $\varnothing$

4. Nos diagramas abaixo, cada região está representada por um número. Responda, em cada caso, qual é a região que representa o resultado da operação indicada.

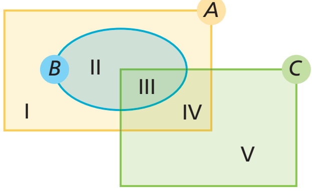
a) $(A \cap B) - C$ região IV



c) $(A - B) \cap C$ $\varnothing$

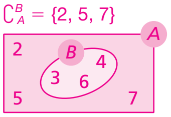


b) $(B - A) \cap C$ $\varnothing$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5. $\complement_A^B = \{2, 5, 7\}$



ADILSON SECCO

5. Dados os conjuntos $A = \{x \mid x \text{ é um número natural e } 2 \leqslant x < 8\}$ e $B = \{3, 4, 6\}$, determine o conjunto $\complement_A^B$. Em seguida, desenhe um diagrama que represente esses conjuntos.

6. (PUC) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam o produto B e que 2 dessas pessoas não usam o produto A, qual é o número de pessoas que utilizam os produtos A e B? três pessoas

7. Em uma sala de aula com 50 alunos, todos falam pelo menos uma das línguas estrangeiras: inglês ou espanhol. Sabendo que 35 falam inglês e 27 espanhol, responda:

a) Quantos alunos falam inglês e espanhol? 12 alunos

b) Quantos alunos falam somente inglês? 23 alunos

c) Quantos alunos falam somente espanhol? 15 alunos

8. Determine M e $n(M)$, se $A = \{3, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, $A \cap M = \{3\}$, $B \cap M = \{8\}$ e $A \cup B \cup M = \{3, 7, 8, 9, 10\}$.
$M = \{3, 8, 10\}$; $n(M) = 3$

9. Em um grupo de 45 pessoas, todas com algum tipo de problema de visão, 40% têm miopia e astigmatismo, e o número de pessoas com miopia excede em 9 o número de pessoas com astigmatismo. Determine quantas pessoas têm miopia e quantas têm astigmatismo.
36 e 27 pessoas

ISTOCKPHOTO/GETTY IMAGES

Exame oftalmológico com aparelho óptico.

10. Dados os conjuntos $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{15}{7}\right]$ e $B = \left]-\frac{1}{3}, 2\right]$, determine:

a) $A \cup B$ A

b) $A \cap B$ B

c) $A - B$

d) $B - A$ $\varnothing$

e) $\complement_A^B$

c) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

e) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

Aprofundamento

11. Se os conjuntos $A = \{-1, 2x + y, 2, 3, 1\}$ e $B = \{2, 4, x - y, 1, 3\}$ são iguais, determine o valor de x e de y.
$x = 1$ e $y = 2$

12. Se A é um conjunto com x elementos e B é um conjunto com y elementos, com $x > y$, determine o número máximo de elementos de:

a) $A - B$ x

b) $B - A$ y

c) $A \cup B$ $x + y$

d) $A \cap B$ y

Desafio

13. Observe a expressão:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n - 1},$$

em que $n \in \mathbb{N}^*$ representa a quantidade de frações que a compõem. Ver resolução no Guia do professor.

Assim, por exemplo:

- para $n = 1$, temos: $\frac{4}{1}$
- para $n = 2$, temos: $\frac{4}{1} - \frac{4}{3}$
- para $n = 3$, temos: $\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5}$
- para $n = 10$, temos:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \ldots + (-1)^{10-1} \cdot \frac{4}{2 \cdot 10 - 1}$$

Em uma planilha eletrônica, calcule os valores da expressão para n variando de 1 a 10. Em seguida, usando a planilha, calcule esse valor para $n = 10.000$.

Converse com um colega sobre o famoso número irracional do qual a sequência dos valores obtidos se aproxima.

Espera-se que os alunos percebam que a sequência de resultados converge para π. Mais informações sobre a série deste exercício podem ser obtidas na *Revista do Professor de Matemática* (RPM), São Paulo, n. 19, p. 1-8, 1991.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Entre as situações-problema descritas abaixo, a única que **não** é resolvida com conceitos referentes a conjuntos é: alternativa c

a) Segundo uma pesquisa, 10 pessoas preferiram o produto A, 15 pessoas preferiram o produto B e 25 pessoas preferiram o produto C. Quantas pessoas participaram da pesquisa?

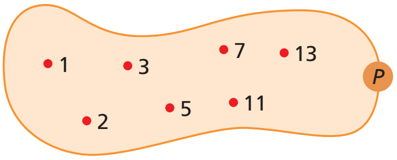
b) Que números inteiros são múltiplos de -5 e também de -7?

c) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 2 cm?

d) Que polígono pode ser classificado como losango e também como retângulo?

2. Uma representação do conjunto dos números primos naturais pode ser: alternativa c

a)



ADILSON SECCO

b) 1, 2, 3, 5, 7, 11 etc.

c) $\{x \mid x$ é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos$\}$

d) $\{x \mid x$ é um número natural cujo algarismo da unidade é 1, 3, 5, 7 ou 9$\}$

Para responder às questões **3** a **6**, considere os conjuntos: universo $U = \mathbb{N}$, $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.

3. $A \cup B$ é igual a: alternativa d

a) $\varnothing$

b) $\{0\}$

c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

d) U

4. $A - B$ é igual a: alternativa b

a) $\varnothing$

b) $\{0, 2, 4, 6, ...\}$

c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

d) U

5. $A \cap B$ é igual a: alternativa a

a) $\varnothing$ **b)** $\{0\}$ **c)** $\mathbb{N}^*$ **d)** U

6. $\complement_U^A$ é igual a: alternativa c

a) $\varnothing$ **b)** A **c)** B **d)** U

7. Uma empresa pesquisou o gênero de filmes preferido de uma família e chegou ao seguinte resultado: 3 pessoas gostam de comédia, 3 gostam de drama, 3 gostam de policial, 2 gostam de comédia e drama, 2 gostam de comédia e policial, 2 gostam de drama e policial e 1 pessoa gosta dos três gêneros. Sabendo que todos os membros da família gostam de pelo menos um desses três gêneros, quantos membros essa família tem? alternativa a

a) 4 **b)** 7 **c)** 9 **d)** 10

8. Para a relação ♣ ⊂ ♦ ⊂ ♥ ⊂ ♠ ser verdadeira, os símbolos ♣, ♦, ♥ e ♠ podem ser substituídos, respectivamente, pelos conjuntos numéricos: alternativa b

a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

c) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$

d) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

9. Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, os intervalos que representam $A \cup B$ e $A \cap B$ são, respectivamente: alternativa b

a) $A \cup B = [-1, +\infty[$ e $A \cap B =]0, +\infty[$

b) $A \cup B =]-1, +\infty[$ e $A \cap B = [0, 1[$

c) $A \cup B = [1, +\infty[$ e $A \cap B =]-\infty, 0[$

d) $A \cup B = [-1, +1]$ e $A \cap B = \varnothing$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Perceber situações em que se aplica a noção de conjunto.	X						X		
Descrever conjuntos.		X							
Efetuar operações com conjuntos.			X	X	X	X			
Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.							X		
Identificar os conjuntos numéricos.								X	
Representar e operar com intervalos reais.									X
Páginas do livro referentes ao conceito	34 e 35	35 a 38	39 a 41	39 a 41	39 a 41	42	34 e 35 39 a 41	42 a 48	49 e 50

Capítulo 3

Funções

MARCOS AMEND/PULSAR IMAGENS

Gruta do Lago Azul, Bonito, MS, Brasil, 2012.

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função.
- Analisar e construir o gráfico de uma função.
- Resolver situações-problema que envolvam funções.
- Obter a função inversa de funções dadas.

1 Conceito de função

1.1 A ideia de função no cotidiano

Nas férias escolares, Mônica e seus pais decidiram fazer uma viagem para Bonito. Para isso, procuraram uma agência de turismo que oferecia pacotes de acordo com a quantidade de pessoas que viajaria. O pacote que a família de Mônica escolheu custava R$ 600,00 por pessoa. Considerando essas informações, podemos calcular o valor a ser pago na viagem relacionando duas grandezas: a quantidade de pessoas e o preço correspondente a essa quantidade. Veja.

Quantidade de pessoas	Preço (R$)
1	600,00
2	1.200,00
3	1.800,00
5	3.000,00
n	$600n$

Dizemos que o preço é **função** da quantidade de pessoas: cada número que define a quantidade de pessoas corresponde a um único número, que define o preço total.

Dois dias antes da viagem, Mônica assistiu à previsão do tempo para saber quais roupas seriam mais adequadas para levar na viagem.

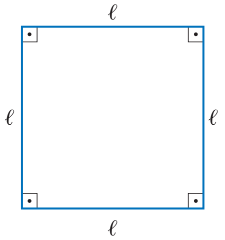
Podemos relacionar, mensalmente, a temperatura média de uma região a cada dia e registrá-la em uma tabela. Veja.

Dia	Temperatura média (°C)
1	20
2	21
3	23
4	26
5	26
6	27
7	27
...	...

Nesse caso, consideramos duas grandezas: o dia do mês e a temperatura média diária. Assim, dizemos que a temperatura média é **função** do dia do mês. Note que o contrário não é verdadeiro: com a temperatura média, não é possível ter certeza de qual é o dia do mês, já que existe mais de uma possibilidade para o dia. Dizemos, então, que o dia do mês **não é função** da temperatura média.

Função na Geometria

Na Geometria, também podemos relacionar grandezas, por exemplo, a medida dos lados de um quadrado com seu perímetro (p).



ADILSON SECCO

Medida do lado (cm)	1	$\sqrt{2}$	8	10,2	18,8	39	ℓ
Perímetro (cm)	4	$4\sqrt{2}$	32	40,8	75,2	156	4ℓ

Assim, se ℓ for a medida do lado do quadrado, o perímetro será igual a 4ℓ. E essa relação pode ser representada pela seguinte sentença: $p = 4\ell$. Dizemos que p é **função** de ℓ, pois p e ℓ são duas **variáveis** que se relacionam e, para cada valor escolhido para ℓ, existe um único p correspondente.

Dadas duas variáveis, x e y, se a cada valor atribuído a x se associa um único y, dizemos que y é **função** de x.

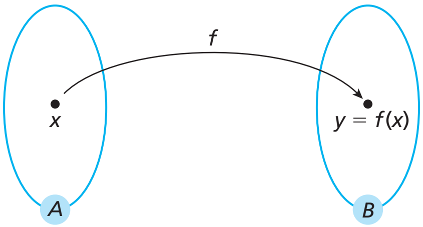
1.2 Definição matemática de função

Você já percebeu como a ideia de função está presente em nosso cotidiano. A seguir, vamos estudar sua definição matemática e aprender a identificar diagramas que representam uma função.

> Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma **função** de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B.
>
> Indicamos essa função assim: $f\colon A \to B$ (lemos: "função f de A em B").

É importante observar que:

- A notação $f\colon A \to B$ indica que a função f **leva** A para B, ou que f é uma **aplicação** de A em B, ou ainda que f é uma **transformação** de A em B.
- Se y está definido em função de x, chamamos x de **variável independente** e y de **variável dependente**.
- Para indicar o valor que a função f assume para x, escrevemos $f(x)$ (lemos: "f de x") ou simplesmente y.



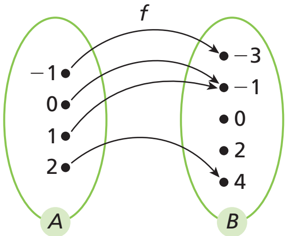
A função f transforma $x \in A$ em $y \in B$.

- As funções podem ser definidas por uma **lei matemática**. Por exemplo, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x$. Por essa lei, entendemos que um número real x é transformado, pela função f, no triplo de x.

Exemplos

Vamos verificar se os diagramas abaixo representam funções.

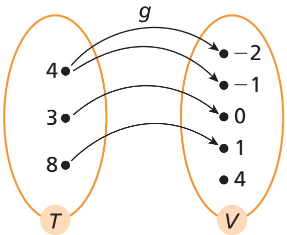
a)



- Todo elemento de A tem um correspondente em B.
- Cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

Então, f é função de A em B.

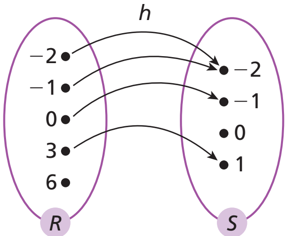
b)



- Todo elemento de T tem um correspondente em V.
- Um dos elementos de T (o elemento 4) está associado a mais de um elemento de V (aos elementos -2 e -1).

Pela segunda afirmação, concluímos que g não é função de T em V.

c)



- Nem todo elemento de R tem um correspondente em S (6 não se associa a nenhum elemento de S).
- Os demais elementos de R associam-se a um único elemento de S.

Pela primeira afirmação, concluímos que h não é função de R em S.

◆ Observação

Embora seja frequente o uso da letra f para representar função e das letras x e y, respectivamente, para as variáveis independente e dependente, podemos usar outras letras.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita p. 57

$f(8{,}1) = 5 + 2{,}50 \cdot 8 = 25{,}00$

$f(8{,}9) = 5 + 2{,}50 \cdot 8 = 25{,}00$

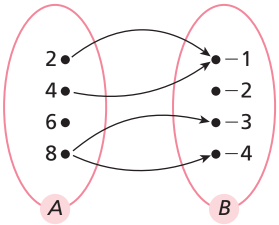
Logo, as viagens têm tarifas iguais, pois $f(8{,}1) = f(8{,}9)$.

Comentário: Os alunos podem observar que a função possui valores constantes no intervalo $[n, n + 1[$.

O diagrama não representa uma função de A em B, pois nem todo elemento de A tem um correspondente em B e existe um elemento de A com mais de um correspondente em B.

◆ Reflita

Após ler os exemplos apresentados ao lado, explique por que o diagrama abaixo não representa uma função de A em B.



Exercícios resolvidos

R1. Em uma pista circular de testes, um automóvel desloca-se com velocidade constante. Com o auxílio de um cronômetro, marcaram-se diferentes intervalos de tempo e, para cada intervalo, verificou-se a distância percorrida.

Os dados obtidos, tempo (em hora) e distância percorrida (em quilômetro), foram registrados na tabela abaixo.

WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK

Tempo (h)	0,2	0,4	0,8	1,6	2	x
Distância (km)	10	20	40	80	100	$50x$

a) Calcular a distância quando o tempo é igual a 2,8 h.

b) Calcular o tempo quando a distância é 330 km.

c) Observando os valores da tabela, é possível concluir que a distância percorrida por esse automóvel é diretamente proporcional ao tempo gasto para percorrê-la?

▸ *Resolução*

a) Assumindo que a distância percorrida varia em função do tempo e observando os dados da tabela, percebemos que, para determinar a distância y (variável dependente) em função de certo tempo x (variável independente), devemos multiplicar por 50 o número real positivo que representa x. Temos, então, a seguinte lei: $y = 50x$ ou $f(x) = 50x$

Queremos calcular $f(x)$ para $x = 2{,}8$, o que indicamos por $f(2{,}8)$.

Substituindo o valor de x na lei da função, temos:

$$f(2{,}8) = 50 \cdot 2{,}8 \Rightarrow f(2{,}8) = 140$$

Portanto, em 2,8 horas, o automóvel percorreu 140 quilômetros.

b) Agora, queremos calcular x para $f(x) = 330$.

Substituindo o valor de $f(x)$ na lei da função, temos:

$$330 = 50x \Rightarrow x = \frac{330}{50} \Rightarrow x = 6{,}6$$

Logo, para percorrer 330 quilômetros, o automóvel gastou 6,6 horas ou 6 h e 36 min.

c) Comparando a variação dos valores do tempo e das distâncias, percebemos que: quando o tempo duplica, a distância também duplica; quando o tempo quadruplica, ocorre o mesmo com a distância; quando o tempo quintuplica, a distância também fica multiplicada por cinco etc. Ou seja, a razão entre a distância e o tempo é constante; portanto, essas variáveis são diretamente proporcionais.

R2. Em certa cidade, a tarifa de táxi é calculada da seguinte forma: R$ 5,00 a bandeirada mais R$ 2,50 por quilômetro rodado, como mostra a tabela.

Quilômetro rodado	Valor a ser pago (R$)
$0 \leqslant x < 1$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 0 = 5{,}00$
$1 \leqslant x < 2$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 1 = 7{,}50$
$2 \leqslant x < 3$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 2 = 10{,}00$
$3 \leqslant x < 4$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 3 = 12{,}50$
$n \leqslant x < n + 1$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot n = y$

◆ Observação

Consideramos aqui que o taxímetro muda a cada quilômetro completo. Portanto, y varia "aos saltos": R$ 5,00 antes de completar o 1º quilômetro; R$ 7,50 antes de completar o 2º; R$ 10,00 antes do 3º etc. Assim, quando x percorre cada intervalo real $[n, n + 1[$, em que n é um número natural, o valor de y é constante e "salta" para R$ 2,50 a mais quando $x = n + 1$.

Sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

a) Pode-se estabelecer uma função entre essas grandezas? Em caso positivo, quais seriam as variáveis (dependente e independente) dessa função?

b) Qual é a tarifa de táxi para uma viagem de 6,5 km?

c) Rita gastou R$ 42,50 em uma viagem de táxi nessa cidade. Qual foi o número inteiro de quilômetros dessa viagem?

▸ *Resolução*

a) Sim, pode-se estabelecer uma função: para cada número real positivo que representa o total de quilômetros de uma viagem (variável independente, a qual chamaremos de x), associa-se um único valor de tarifa (variável dependente, a qual chamaremos de y).

b) Como 6,5 está entre 6 e 7, para calcular a tarifa quando $x = 6{,}5$, devemos substituir n por 6 em $y = 5{,}00 + 2{,}50n$.

Portanto, a tarifa é R$ 20,00.

c) Agora, queremos calcular n, com $n \in \mathbb{N}$, para $y = 42{,}50$.

Substituindo o valor de y em $y = 5{,}00 + 2{,}50n$, temos:

$$42{,}50 = 5 + 2{,}50 \cdot n \Rightarrow n = \frac{42{,}50 - 5}{2{,}50} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = 15$$

Logo, Rita fez uma viagem de 15 quilômetros.

◆ Reflita

Qual das viagens de táxi, na cidade referida no exercício resolvido **R2**, tem tarifa maior: uma viagem de 8,1 quilômetros ou uma de 8,9 quilômetros?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Para calcular o preço do consumo de água de seus usuários, uma companhia de saneamento básico considera o número inteiro de metros cúbicos de água consumidos e aplica o seguinte quadro:

SÉRGIO CASTRO/ESTADÃO CONTEÚDO

Hidrômetro.

Faixa de consumo (m^3)	Valor (R$)
Até 10	15,10 (valor fixo)
De 11 a 20	Acrescentar 2,35 por m^3
De 21 a 50	Acrescentar 5,50 por m^3
Acima de 50	Acrescentar 6,10 por m^3

Para cobrar também as despesas referentes ao esgoto, o preço total da conta é o dobro do valor referente ao consumo de água.

Por exemplo, o cálculo do consumo de 22 m^3 é feito da seguinte maneira:

$$22\ \text{m}^3 = \underbrace{10\ \text{m}^3}_{\substack{\text{faixa}\\ \text{até } 10\ \text{m}^3}} + \underbrace{10\ \text{m}^3}_{\substack{\text{faixa de}\\ 11\ \text{m}^3 \text{ a } 20\ \text{m}^3}} + \underbrace{2\ \text{m}^3}_{\substack{\text{faixa de}\\ 21\ \text{m}^3 \text{ a } 50\ \text{m}^3}}$$

Então, o consumo é dado por:

$$2 \cdot (\underbrace{\text{R\$ } 15{,}10}_{\substack{\text{faixa}\\ \text{até } 10\ \text{m}^3}} + 10 \cdot \underbrace{\text{R\$ } 2{,}35}_{\substack{\text{faixa de}\\ 11\ \text{m}^3 \text{ a } 20\ \text{m}^3}} + 2 \cdot \underbrace{\text{R\$ } 5{,}50}_{\substack{\text{faixa de}\\ 21\ \text{m}^3 \text{ a } 50\ \text{m}^3}}) = \text{R\$ } 99{,}20$$

Agora, responda às questões

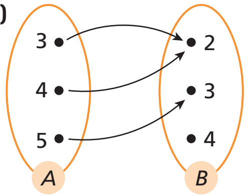
a) Quem consome 9 m^3 de água em um mês paga mais do que quem consome 7 m^3 mensalmente? não

b) Qual é o valor da conta para um consumo mensal de 19 m^3? E de 27 m^3? R$ 72,50; R$ 154,20

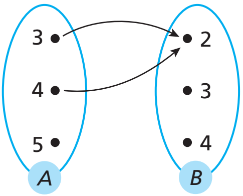
c) No mês em que houve um vazamento de água na casa de Flávia, ela recebeu uma conta de R$ 748,80. Qual foi o consumo de água na casa dela? 78 m^3

2. Verifique quais dos diagramas representam função de $A = \{3, 4, 5\}$ em $B = \{2, 3, 4\}$. Justifique suas respostas.

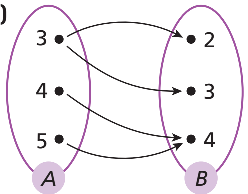
a)



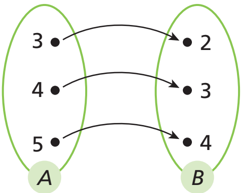
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3. Considere $A = \{-5, -3, -1, 1, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 9, 25, 36, 81\}$ e a lei $y = x^2$ que associa x de A com y de B.

a) Represente essa situação por meio de um diagrama. Ver resolução no Guia do professor.

b) Esse diagrama representa uma função? Justifique. Não, pois existe um elemento em *A* (o elemento 4) que não tem correspondente em *B*.

4. Um fabricante de parafusos verificou que o preço de custo p (em real) de cada parafuso dependia da medida x (em milímetro) do diâmetro da base de cada um e podia ser calculado pela lei matemática $p(x) = 0{,}01x + 0{,}06$.

a) Qual é a variável independente nessa situação? E a dependente? medida do diâmetro da base; preço de custo

b) Qual é o preço de custo de 1 parafuso com base de 3 milímetros de diâmetro? R$ 0,09

c) Quantos milímetros tem a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11? 5 mm

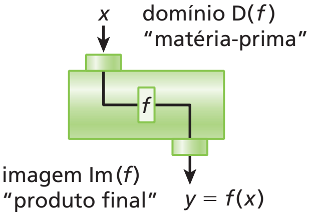
d) Qual é o custo de 500 parafusos com base de 3 milímetros de diâmetro? R$ 45,00

e) O fabricante vendeu 100 parafusos com base de 4 milímetros de diâmetro por R$ 20,00. Em relação ao preço de custo, qual foi o percentual de lucro nessa venda? 100%

2. a) É função, pois cada elemento de *A* tem um único correspondente em *B*.
b) Não é função, pois existe um elemento em *A* (o elemento 3) que tem dois correspondentes em *B*.
c) Não é função, pois existe um elemento em *A* (o elemento 5) que não tem correspondente em *B*.
d) É função, pois cada elemento de *A* tem um único correspondente em *B*.

1.3 Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

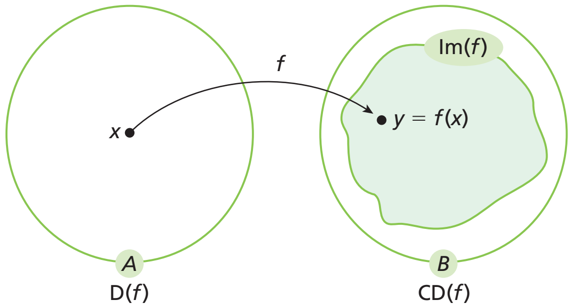
ADILSON SECCO



Dada uma função $f: A \rightarrow B$, temos:

- o conjunto *A* é chamado de **domínio** da função *f*, que indicamos por D ou D(*f*) (lemos: "domínio de *f*"), e o conjunto *B* é chamado de **contradomínio** da função *f*, que indicamos por CD ou CD(*f*) (lemos: "contradomínio de *f*");
- para cada $x \in D(f)$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de *x* pela função *f*. O conjunto formado por todas as imagens de *x* é chamado de **conjunto imagem** da função, que indicamos por Im ou Im(*f*) (lemos: "conjunto imagem de *f*").

Para definir uma função f, é preciso conhecer o domínio D(f), o contradomínio CD(f) e a maneira pela qual cada x do domínio se corresponde com um único $y = f(x)$ do contradomínio, em geral dada por uma lei.



ADILSON SECCO

◆ **Reflita**

Para toda função $f: A \to B$, tem-se $\text{Im}(f) = B$?

Não, pois em uma função podem existir elementos de B sem correspondentes em A.

◆ Domínio de uma função

Quando não estiverem explícitos o domínio e o contradomínio de uma função, vamos admitir que o contradomínio é o conjunto dos números reais e que o domínio é $\mathbb{R}$, excluídos os valores de x para os quais não vale a lei que associa x a y. Nesse caso, dizemos que a função é **real de variável real.**

Exemplos

a) Se a lei de uma função g é $g(x) = \dfrac{1}{x}$, e o domínio e o contradomínio não foram explicitados, subentende-se que $CD(g) = \mathbb{R}$ e que $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, já que, para $x = 0$, $g(x)$ seria uma fração com denominador nulo, o que não faz sentido.

b) Na função f dada por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$, temos $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1$ e $x \neq 2\}$, pois, se $x < -1$, $\sqrt{x+1}$ não é um número real e, se $x = 2$, o denominador da fração é nulo, o que não faz sentido.

1.4 Zero de uma função

Todo número real x que pertence ao domínio da função f e valida a equação $f(x) = 0$ é denominado **zero da função f**.

◆ **Reflita**

- Para que valor de x se tem $2^x = 4$?
- Para que valor de x se tem $4^x - 2 = 0$?
- Quais são os zeros da função $f(x) = (2^x - 4) \cdot (4^x - 2)$?

- $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$
- $4^x - 2 = 0 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^{2x} = 2^1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$
- $f(x) = 0 \Rightarrow (2^x - 4)(4^x - 2) = 0$
  $2^x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou
  $4^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Logo, os zeros da função f são 2 e $\dfrac{1}{2}$.

Comentário: É interessante notar a inversão na abordagem do conceito de zero de uma função que esta atividade propicia. Parte-se de duas equações em que se pede a obtenção das respectivas raízes e, em seguida, solicita-se o zero de uma função cuja lei de formação é dada pelo produto das expressões usadas nessas equações.

Exemplos

a) O zero da função f, tal que $f(x) = 2x - 4$, é 2, pois: $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

b) A função m, dada por $m(x) = \dfrac{1}{x}$, não tem zero, pois não há valor de x que anule $m(x)$.

c) O zero da função g, com $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+5}}$, é 0, pois: $g(0) = \dfrac{0}{\sqrt{0+5}} = \dfrac{0}{\sqrt{5}} = 0$

◆ **Observação**

Uma função pode ter um ou mais zeros ou nenhum zero.

Exercícios resolvidos

R3. Dar o conjunto imagem de f: $D(f) \to \mathbb{R}$ sabendo que $f(x) = 2x$ e considerando:

a) $D(f) = \{-2, 0, 7\}$ **b)** $D(f) = \mathbb{N}$

▶ ***Resolução***

a) Como $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$, $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ e $f(7) = 2 \cdot 7 = 14$; então, $\text{Im}(f) = \{-4, 0, 14\}$.

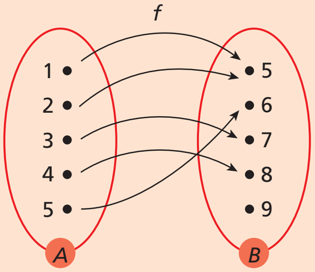
b) Im(f) é o conjunto dos números naturais pares.

◆ **Observação**

Todo número natural par é múltiplo de 2, pois todo número par é divisível por 2.

R4. Considerar a função f dada pelo diagrama ao lado, em que $x \in A$ e $y \in B$, e obter:

a) $D(f)$
b) $CD(f)$
c) $Im(f)$
d) o zero da função f
e) y quando $x = 2$
f) $f(x)$ quando $x = 3$
g) x quando $y = 8$
h) x quando $f(x) = 5$



▸ ***Resolução***

a) $D(f) = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $CD(f) = B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
c) $Im(f) = \{5, 6, 7, 8\}$
d) A função f não tem zero.
e) $x = 2 \Rightarrow y = 5$
f) $x = 3 \Rightarrow f(x) = 7$
g) $y = 8 \Rightarrow x = 4$
h) $f(x) = 5 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

R5. Determinar os zeros das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $g(x) = x + 9$
b) $h(x) = x^2 - 1$

▸ ***Resolução***

a) Devemos determinar o valor de x para que $g(x) = 0$.
$g(x) = 0 \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

b) Devemos determinar o valor de x para que $h(x) = 0$.
$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 5 \\ \hline 08 & 21 \\ 3 & \end{array}$$

$$\frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}$$

◆ Reflita

Números mistos são aqueles formados por uma parte inteira e por uma parte fracionária. Por exemplo, $\frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$, pois:

$$\begin{array}{r|l} 79 & 4 \\ \hline 39 & 19 \\ 3 & \end{array}$$

Encontre o número misto correspondente a $\frac{108}{5}$.

R6. Dada a função $v(x) = x^2 - x$, determinar $v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right)$.

▸ ***Resolução***

$v(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

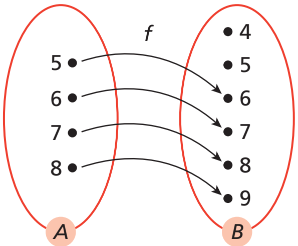
$$v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right) = 20 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{80}{4} - \frac{1}{4} = \frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$$

8. a) $D(f) = \mathbb{R}$
b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$
c) $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\}$
d) $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x \neq 3\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

5. Analise o diagrama abaixo e obtenha o que se pede.



$D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$

a) O domínio, o contradomínio e a imagem da função representada.
b) O valor de x para $f(x) = 4$. Não existe x tal que $f(x) = 4$.
c) O valor de $f(x)$ para $x = 5$. $f(5) = 6$

6. Expresse a área s de um retângulo cujo comprimento é o dobro da largura ℓ. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função definida por essa lei.
$s(\ell) = 2\ell^2$; $D(s) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$

7. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 4x + 1$. Determine:

a) $f(4)$ 17
b) $f(-2)$ -7
c) $f(-1) + f(0) - f(11)$ -47
d) $2f(3) - f(-3)$ 37

8. Obtenha o domínio de cada função.

a) $f(x) = 9x + 3$
b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 8x}{x + 3}$
c) $i(x) = \sqrt{x - 8}$
d) $j(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 3}$

9. Escreva o conjunto imagem de cada função.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, sendo $D(f) = \{1, 4, 9, 16, 25\}$.
b) $w(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, sendo $D(w) = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$.

10. Determine, se existir, os zeros reais das funções.

a) $h(x) = 4 - x$ 4
b) $s(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ 1
c) $m(x) = x^2 + 1$ Não há zero real.
d) $p(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ Não há zero real.

11. Que valores do domínio da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 6$, têm imagem igual a -6?
0 ou 2

12. Sabe-se que f é uma função definida por $f(x) = ax - 4$, com a real e $f(3) = 11$. Calcule $f(-5)$.
-29

13. Considere a função g, definida por $g(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $g(2) = 8$ e $g(-2) = -4$. Determine:

a) a e b; $a = 3$; $b = 2$
b) o zero da função. $-\frac{2}{3}$

9. a) $Im(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ **b)** $Im(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

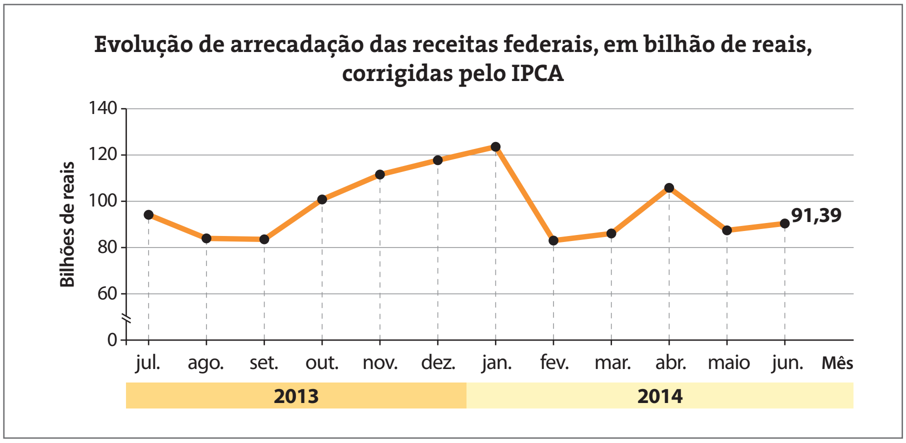
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2 Gráfico de uma função

Já vimos que é comum encontrarmos gráficos em revistas, jornais, internet, boletins governamentais e em outras fontes de informação. A representação gráfica auxilia na observação, na organização e na análise da variação de duas grandezas.

Nos exemplos a seguir, temos um tipo de gráfico que é constituído apenas pelos pontos destacados em preto. Traçamos a linha de segmentos que unem esses pontos para facilitar a leitura da variação dos valores da função.

Observe o gráfico abaixo.


Evolução de arrecadação das receitas federais, em bilhão de reais, corrigidas pelo IPCA

Dados obtidos em: <www.receita.fazenda.gov.br>. Acesso em: 24 set. 2015.

◆ Observação

O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é o índice oficial do Governo Federal para a medição das metas inflacionárias.

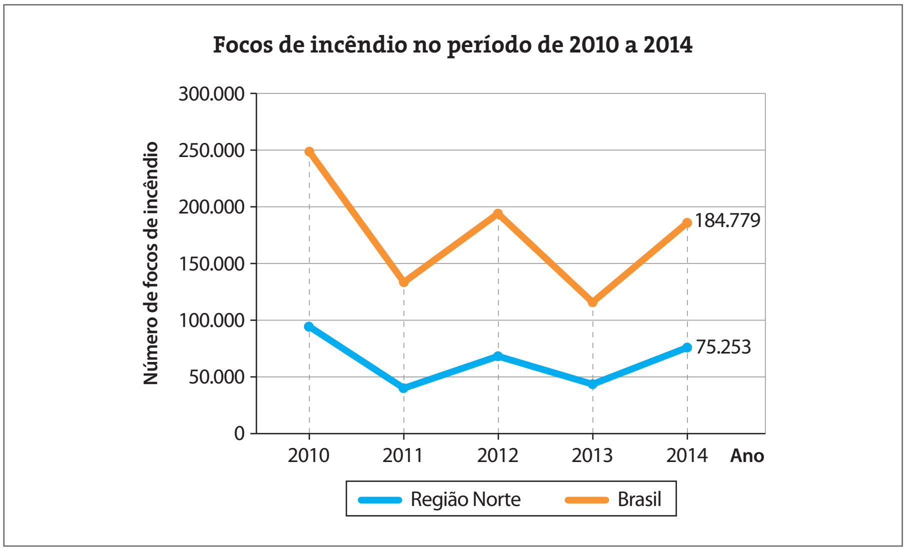
◆ Observação

Note que, no gráfico ao lado, usamos o símbolo ⫽ para indicar que o intervalo de 0 a 60 não é proporcional aos demais intervalos marcados no eixo vertical.

Observando o gráfico, podemos concluir que:

- a arrecadação cresceu de setembro de 2013 a janeiro de 2014, de fevereiro a abril de 2014 e de maio a junho de 2014;
- comparando a arrecadação de outubro de 2013 com a de junho de 2014, houve uma queda de cerca de 9 bilhões de reais.

Agora, vamos ver outro exemplo. Observe este gráfico.


Focos de incêndio no período de 2010 a 2014

Dados obtidos em: <www.inpe.br>. Acesso em: 28 set. 2015.

MARIO TAMA/GETTY IMAGES

Incêndio na Floresta Amazônica, 2014.

Além de propor um trabalho interdisciplinar com Geografia, esta atividade permite o exercício e o desenvolvimento da habilidade da oralidade dos alunos.

◆ Explore

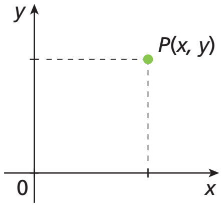
Reúnam-se em grupos de quatro alunos e façam uma pesquisa sobre a ocorrência de queimadas no Brasil. Verifiquem em que regiões sua incidência é maior, pesquisem as causas, os danos decorrentes e possíveis meios de evitar as queimadas. Apresentem os resultados com gráficos, fotos, mapas etc. e exponham as informações para a turma.

Esse gráfico, entre outras informações, indica que:

- o número de focos de incêndio no Brasil e na região Norte foi maior em 2010, com cerca de 250.000 e 90.000, respectivamente;
- 2013 foi o ano em que o número de focos de incêndio na região Norte mais se aproximou do número dos ocorridos em todo o Brasil. Nesse ano, a participação da região Norte foi cerca de 41% do total.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

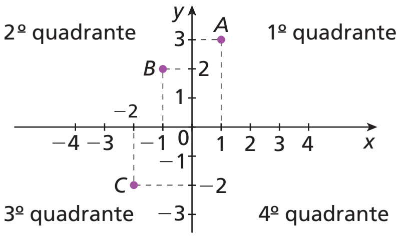
2.1 Plano cartesiano



Plano cartesiano é o plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais x (**eixo das abscissas**) e y (**eixo das ordenadas**), que o dividem em quatro regiões chamadas de **quadrantes**.

Um ponto P, representado no plano cartesiano, tem uma referência horizontal (x) e uma referência vertical (y), as quais, juntas, definem o **par ordenado** (x, y). Dizemos que x e y são **coordenadas** do ponto $P(x, y)$.

Observe o plano cartesiano abaixo.



◆ Reflita

O ponto $R(1, -2)$ tem localização diferente do ponto $S(-2, 1)$. Por quê?

Sim, porque o ponto $R(1, -2)$ tem abscissa 1 e ordenada -2, localizando-se no 4º quadrante, enquanto o ponto $S(-2, 1)$ tem abscissa -2 e ordenada 1, localizando-se no 2º quadrante.

Nesse plano, observamos que:

- $A(1, 3)$ tem abscissa 1, ordenada 3 e está no 1º quadrante.
- $B(-1, 2)$ tem abscissa -1, ordenada 2 e está no 2º quadrante.
- $C(-2, -2)$ tem abscissa -2, ordenada -2 e está no 3º quadrante.

Note que:

- A cada par ordenado corresponde um único ponto no plano cartesiano.
- A cada ponto do plano cartesiano corresponde um único par ordenado.
- Todo ponto $P(x, y)$ do 1º quadrante tem $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
- Todo ponto $P(x, y)$ do 2º quadrante tem $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
- Todo ponto $P(x, y)$ do 3º quadrante tem $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0$.
- Todo ponto $P(x, y)$ do 4º quadrante tem $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$.

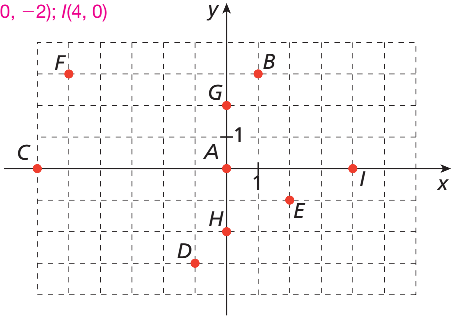
Na página 252, apresentamos a sinopse e indicamos a leitura do livro *O caderno secreto de Descartes*, que pode ampliar o conhecimento do aluno em relação ao assunto tratado aqui; devemos lembrar, porém, que, como toda obra literária, baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

14. Construa um plano cartesiano em uma folha quadriculada e marque os pontos indicados: $E(-1, 2)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, 3)$; $H(-3, 0)$; $I(-3, 4)$; $J(-4, 1)$; $K(-4, 3)$; $L(-5, 2)$ Ver resolução no Guia do professor.

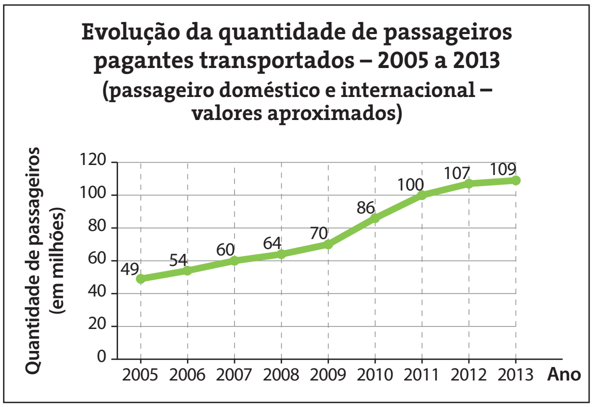
15. Indique as coordenadas dos pontos que estão representados no plano cartesiano abaixo.
$A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$



16. O ponto $(3, 5y + 10)$ pertence ao eixo das abscissas. Determine y. -2

17. O ponto $(2x, y + 3)$ está no 2º quadrante. Indique os valores que x e y podem assumir. $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$

18. Analise o gráfico a seguir, que mostra a evolução da quantidade de passageiros pagantes transportados no período de 2005 a 2013.


Evolução da quantidade de passageiros pagantes transportados – 2005 a 2013
(passageiro doméstico e internacional – valores aproximados)

Dados obtidos em: <www2.anac.gov.br/estatistica/anuarios.asp>. Acesso em: 1º out. 2015.

a) No período considerado, identifique os períodos em que a variação da quantidade de passageiros aumentou. Ver resolução no Guia do professor.

b) Em que período a variação da quantidade de passageiros cresceu mais rapidamente? de 2009 a 2010

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.2 Construção do gráfico de uma função

Para construir o gráfico de uma função, usamos o sistema de coordenadas cartesianas. O gráfico da função fica determinado por todos os pontos do plano cartesiano representados pelos pares ordenados $(x, f(x))$ que tenham x pertencente ao domínio de f.

Como exemplo, vamos construir o gráfico da função $f: A \rightarrow B$, dada pela lei $f(x) = 2x - 3$, em três situações.

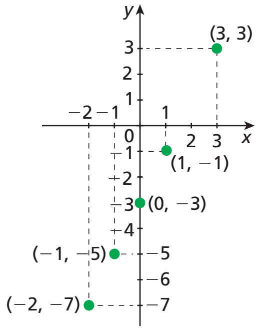
1ª situação: $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 3, 7, 9, 11\}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico, calculamos $y = f(x)$ para cada x do domínio A, substituindo o valor de x na lei da função. Observe na tabela ao lado.

Em seguida, marcamos os pontos no plano cartesiano, como mostra a figura ao lado da tabela.

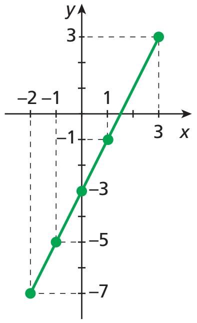
Os **pontos** do plano cartesiano constituem o gráfico da função f.

x	$y = f(x) = 2x - 3$	(x, y)
-2	$y = f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$y = f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$	$(1, -1)$
3	$y = f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$	$(3, 3)$



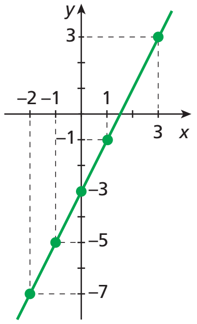
2ª situação: $A = [-2, 3]$ e $B = \mathbb{R}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico da função f, podemos usar os mesmos valores dados a x na 1ª situação, obtendo os mesmos valores de y. Além desses pontos, atribuindo a x valores do conjunto $[-2, 3]$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos do **segmento** que é o gráfico da função f.



3ª situação: $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$

Aqui também, com os valores dados a x na 1ª situação, obtemos os mesmos pontos (x, y). Além desses pontos, atribuindo a x valores de $\mathbb{R}$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos da **reta** que é o gráfico da função f descrita nessa situação.



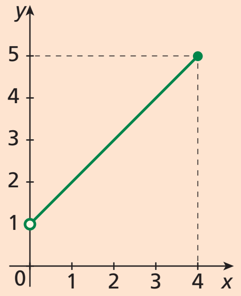
◆ Reflita

O conjunto imagem da função f na 1ª situação é igual a seu contradomínio?

$CD(f) = B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 3, 7, 9, 11\}$
$Im(f) = \{-7, -5, -3, -1, 3\}$
Logo, $Im(f) \neq CD(f)$.

Exercício resolvido

R7. O gráfico abaixo representa a função f, dada por $f(x) = x + 1$, com $0 < x \leqslant 4$. Determinar o domínio e a imagem de f.



◆ Observação

Note que:

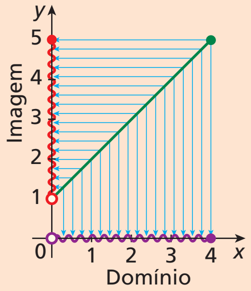
- sendo $0 < x$, o ponto de abscissa zero não pertence ao gráfico (bola vazia);
- sendo $x \leqslant 4$, o ponto de abscissa 4 pertence ao gráfico (bola cheia).

▶ ***Resolução***

O domínio de f é o conjunto dos números reais x que são abscissas dos pontos do gráfico da função, e o conjunto imagem de f é o conjunto dos números $f(x)$ para os quais $x \in D(f)$.

No plano cartesiano, obtemos $D(f)$ e $Im(f)$ por meio das projeções ortogonais do gráfico de f sobre os eixos x e y, respectivamente.

O domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 4\}$, e o conjunto imagem de f é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y \leqslant 5\}$.

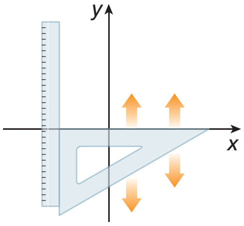


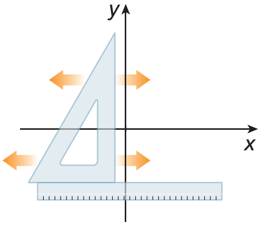
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno

19. Nesta atividade, que deve ser feita com um colega, não faça nenhum traçado. Apenas posicione um esquadro em um dos eixos do gráfico, localizado no final do exercício, e deslize-o ao lado de uma régua fixada, conforme as ilustrações abaixo.





Considere o gráfico apresentado no final do exercício, que representa uma função de A em B, sendo $A = [-2, 4]$ e $B = \mathbb{R}$, para resolver as questões.

a) Estimem os valores de:

- $f(3)$ 1
- $f(-2)$ -1
- $f(4)$ 3
- $f(2)$ 5

b) Estimem os valores de x tal que:

- $f(x) = 1$ 0; 3
- $f(x) = 3$ 0,9; 2,5; 4
- $f(x) = 0$ $-0{,}5$
- $f(x) = 4$ 1,3; 2,4

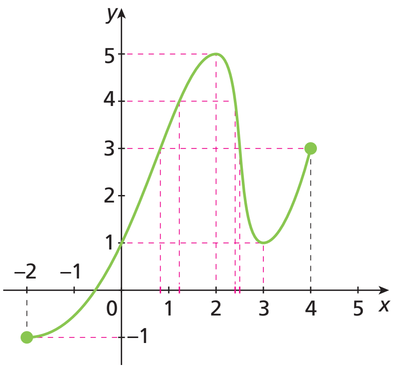
c) Estimem $\text{Im}(f)$. $\text{Im}(f) = [-1, 5]$

d) Imaginem todas as retas perpendiculares ao eixo y. Deem o número de pontos em que o gráfico de f fica interceptado por uma reta desse grupo e que passa pelo ponto:

- $(0, 6)$ nenhum
- $(0, 2)$ 3
- $(0, 4)$ 2
- $(0, 0)$ 1

e) Imaginem todas as retas perpendiculares ao eixo x e que passem por pontos de abscissas pertencentes ao domínio A. Agora, respondam:

- Alguma dessas retas corta o gráfico de f em mais de um ponto? não
- Alguma dessas retas não corta o gráfico de f? não



◆ Reconhecimento dos gráficos de uma função

Ao observar um gráfico, é possível verificar se a curva descrita corresponde ou não a uma função. Para isso, é necessário lembrar que uma função só está definida se, para cada elemento do domínio (valores do eixo x), há uma única imagem correspondente no contradomínio (valores do eixo y).

◆ Observação

Quando o gráfico de uma função real é uma linha sem pontos destacados (bola cheia ou bola vazia) em alguma de suas extremidades, consideraremos que essa linha continua indefinidamente. Presumiremos que a parte visível do gráfico possa indicar ou induzir como o gráfico continua, salvo observação em contrário.

Exemplos

Considerando $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$, vejamos quais dos gráficos abaixo representam uma função.

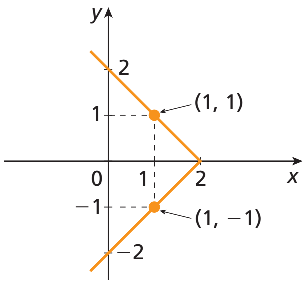


Gráfico 1. Existem elementos do domínio (no eixo x) que têm mais de um correspondente no contradomínio (no eixo y).

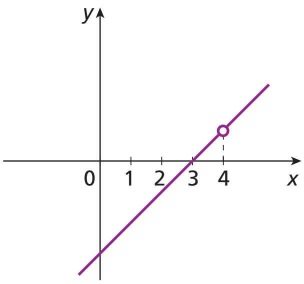


Gráfico 2. Há um elemento do domínio ($x = 4$) que não tem correspondente no contradomínio (no eixo y).

Esses gráficos **não representam** uma função.

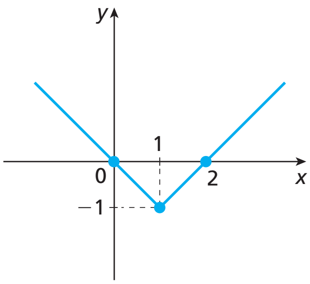


Gráfico 3. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y).

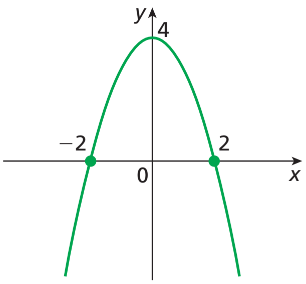


Gráfico 4. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y).

Esses gráficos **representam** uma função.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A representação gráfica de uma função pode facilitar a determinação de seu conjunto imagem e de seus zeros, isto é, das abscissas dos pontos $(x, 0)$ em que o gráfico corta o eixo x. Por exemplo:

- no gráfico 3: $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$; os zeros da função são 0 e 2;
- no gráfico 4: $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$; os zeros da função são -2 e 2.

◆ Reflita

Para o gráfico 2 representar uma função, que restrição poderia ser feita ao domínio?

Restrição: $x \neq 4$
Portanto: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

20. Em cada caso, construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico da função. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f: A \to B$, em que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dada por $f(x) = x^2$.

b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x - 1$.

c) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $k(x) = 7$.

21. Faça o que se pede. Não, pois $f(8) = 31 \neq -1$.

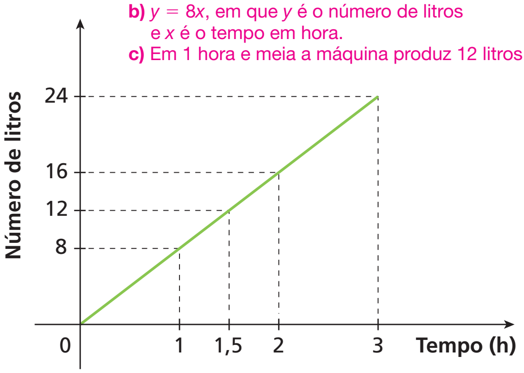
a) Verifique se o ponto representado pelo par ordenado $(8, -1)$ pertence ao gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 9$. Justifique.

b) Determine o valor de a para que o ponto $(-2, 1)$ pertença ao gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + 5$. 2

c) O domínio de uma função f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$. O ponto representado pelo par ordenado $(3, -1)$ pode pertencer ao gráfico de f? Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. Uma máquina produz, por hora, 8 litros de certa substância. O gráfico a seguir apresenta o número de litros que essa máquina produz, em função do tempo, em regime ininterrupto de 3 horas.

b) $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.
c) Em 1 hora e meia a máquina produz 12 litros.



variável independente: tempo; variável dependente: número de litros

a) Quais são as variáveis envolvidas nessa situação?

b) Qual é a lei que relaciona essas variáveis?

c) Qual é o significado do par ordenado (1,5; 12)?

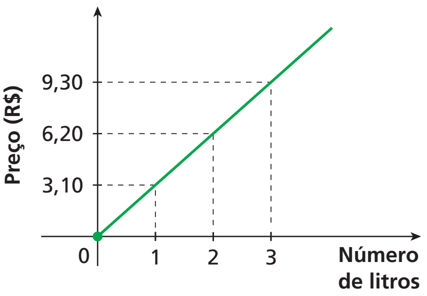
d) Quantos litros da substância a máquina produziria em 6 horas em regime ininterrupto? E em 10 horas? 6 horas → 48 litros
10 horas → 80 litros

e) Quantas horas são necessárias para a máquina produzir 4 litros da substância? 0,5 hora

23. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 2$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x + 2$.

Construa, em uma folha de papel quadriculado, os gráficos de f e de g, tendo como um dos pontos o de abscissa igual ao zero da função. Em seguida, para cada função, determine os valores de x para os quais y é positivo. Ver resolução no Guia do professor.

24. Em um posto de gasolina, o litro de gasolina comum custa R$ 3,10. Observe o gráfico abaixo e responda às perguntas.



a) Qual é a lei que relaciona o preço (y) com o número de litros (x)? $y = 3{,}10x$

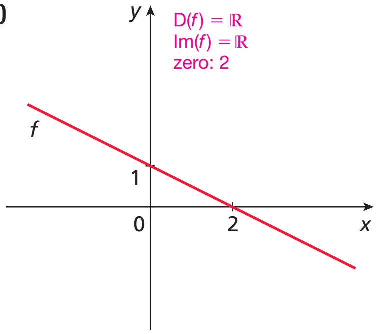
b) Quanto custa 1,5 litro de gasolina? R$ 4,65

c) Pagando um total de R$ 9,30, quantos litros de gasolina comprará um consumidor? E se pagar R$ 31,00? 3 ℓ; 10 ℓ

d) Quantos litros de gasolina, no máximo, poderão ser comprados com R$ 155,00? 50 ℓ

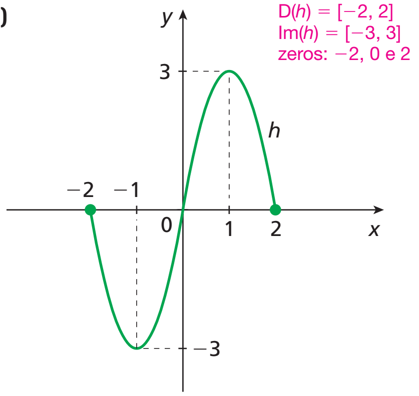
25. Determine o domínio, o conjunto imagem e os zeros das funções correspondentes a cada gráfico.

a)



$D(f) = \mathbb{R}$
$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
zero: 2

b)



$D(h) = [-2, 2]$
$\text{Im}(h) = [-3, 3]$
zeros: -2, 0 e 2

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Análise de gráficos de funções

3.1 Intervalos de crescimento e de decrescimento

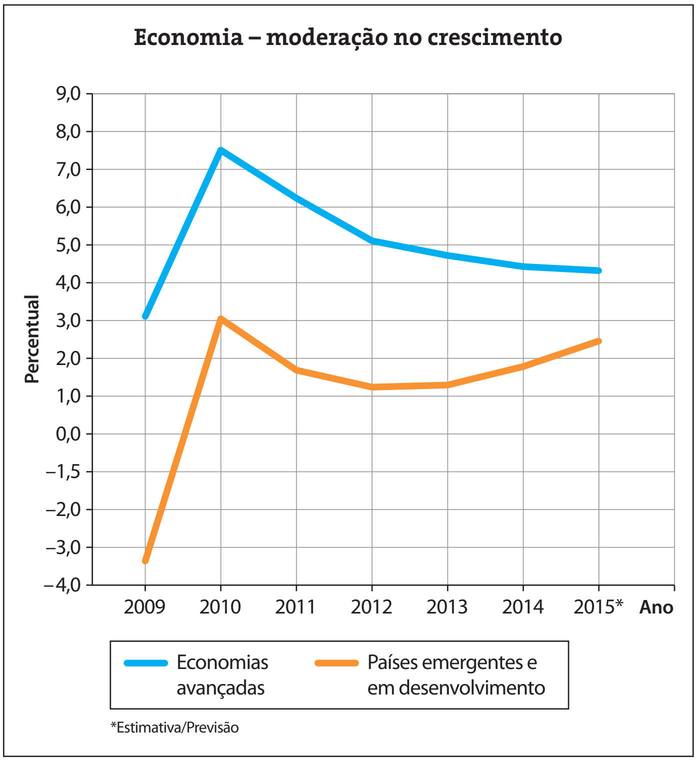
Acompanhe a representação gráfica ao lado.

O gráfico mostra a variação anual do Produto Interno Bruto (PIB), em porcentagem, comparando as economias avançadas com as economias dos países emergentes, no período de 2009 a 2015.

Nesse gráfico, notamos que a variação anual do PIB dos países emergentes e a das economias avançadas, nos primeiros anos, se assemelham.

Tanto as economias avançadas quanto as economias dos países emergentes apresentaram um aumento do PIB em 2010 com relação a 2009. Em 2011, houve uma queda do PIB com relação a 2010, e em 2012 com relação a 2011. A partir de 2012, o PIB dos países emergentes apresentou um aumento. Já o PIB das economias avançadas apresentou uma queda, e a previsão era de que continuasse assim em 2015.

Assim como verificamos o comportamento do PIB por meio desse gráfico, podemos verificar o comportamento das variáveis de uma função qualquer mediante a análise da representação gráfica da função, ou seja, analisar o **crescimento** ou o **decrescimento** da função para os valores do domínio.


Economia – moderação no crescimento

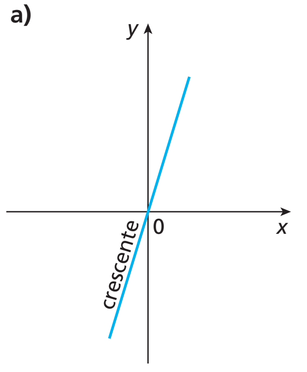
*Estimativa/Previsão

Dados obtidos em: <www.bcb.gov.br>. Acesso em: 28 set. 2015.

Exemplos

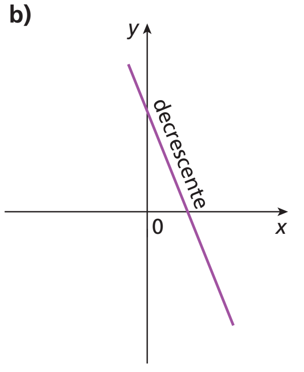
As funções representadas pelos gráficos abaixo têm domínio e contradomínio reais (são funções reais).

a)



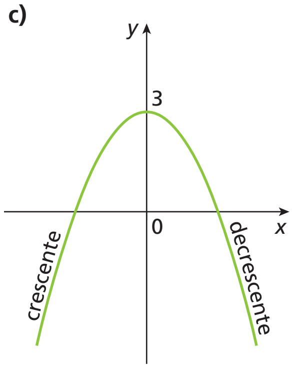
Essa reta representa uma **função crescente**, pois, quanto maior o valor de x, maior o valor de y.

b)



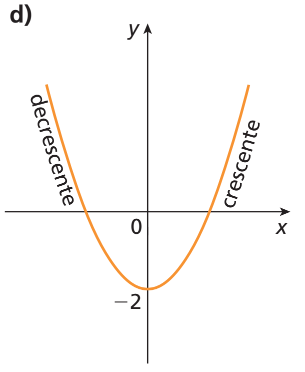
Essa reta representa uma **função decrescente**, pois, quanto maior o valor de x, menor o valor de y.

c)



Nesse caso, a função é **crescente** para $x \leqslant 0$ e **decrescente** para $x \geqslant 0$.

d)



Nesse caso, a função é **decrescente** para $x \leqslant 0$ e **crescente** para $x \geqslant 0$.

O objetivo do **Reflita** é antecipar e trabalhar (intuitivamente) os conceitos valor máximo e valor mínimo de uma função, que serão estudados a seguir. Espera-se que os alunos percebam que as funções dos itens **a** e **b** não apresentam valor máximo nem valor mínimo. No entanto, a função do item **c** tem valor máximo igual a 3, que corresponde à ordenada do ponto (0, 3), o mais "alto" do gráfico, mas não apresenta valor mínimo. Já a função do item **d** tem valor mínimo igual a −2, correspondente à ordenada do ponto (0, −2), o mais "baixo" do gráfico, mas não apresenta valor máximo.

Podemos concluir que:

- uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$;
- uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

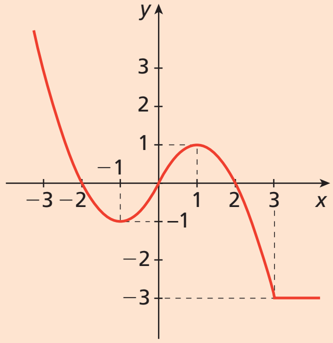
◆ Reflita

Descubra, se existir, o valor máximo e o valor mínimo que cada função representada nos exemplos acima pode assumir.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

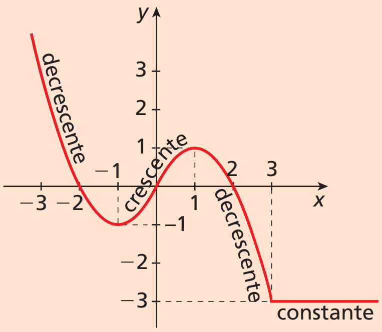
R8. Indicar o(s) intervalo(s) do domínio no(s) qual(is) a função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, representada no gráfico, é: crescente, decrescente e constante (não é crescente nem decrescente).



▶ *Resolução*

A função é:

- decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, 3]$, pois, nesses intervalos, quanto maior o valor de x (domínio), menor o valor de y (imagem);
- crescente em $[-1, 1]$, pois, nesse intervalo, quanto maior o valor de x, maior o valor de y;
- constante em $[3, +\infty[$, pois, nesse intervalo, o valor de y não varia.



3.2 Valor máximo e valor mínimo de uma função

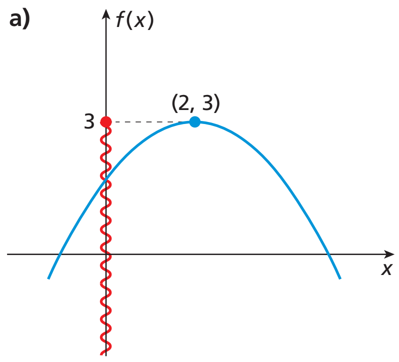
Algumas funções f têm $y_m \in \text{Im}(f)$ tal que não existe $y \in \text{Im}(f)$ maior que y_m. Dizemos, então, que y_m é o **valor máximo** da função.

Da mesma forma, se não existe y menor que y_m, ambos pertencentes ao conjunto imagem da função f, então y_m é o **valor mínimo** da função.

Exemplos

Observe, nos gráficos das funções abaixo, o conjunto imagem.

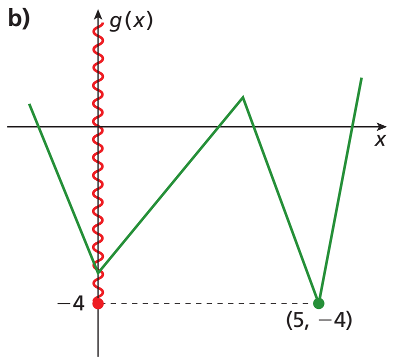
a)



- $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 3\}$
- f tem um máximo em $(2, 3)$.

Logo, $y_m = 3$ é o valor máximo de f.

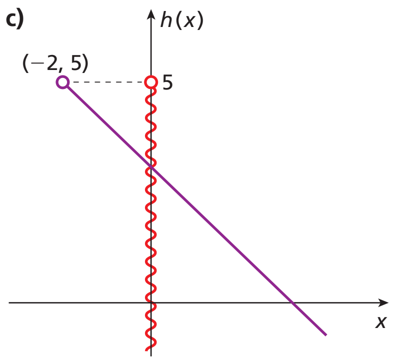
b)



- $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$
- g tem um mínimo em $(5, -4)$.

Logo, $y_m = -4$ é o valor mínimo de g.

c)



- $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 5\}$
- h não tem valor máximo nem valor mínimo.

- Em $]-3, 1[$ existe e é possível identificar o menor e o maior número inteiro. São eles -2 e 0.
- Em $]-3, 1[$ não existem nem o maior nem o menor número real.

  Podemos demonstrar a primeira afirmação por absurdo.

  Vamos supor que exista um número real x tal que $-3 < x < 1$, que seja o maior número de $]-3, 1[$.

  Considere o número real $y = \dfrac{x+1}{2}$.

  $-3 < x < 1 \Rightarrow -3 + 1 < x + 1 < 1 + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{-2}{2} < \dfrac{x+1}{2} < \dfrac{2}{2} \Rightarrow -1 < y < 1$

  Logo, $y \in]-3, 1[$.

  $x < 1 \Rightarrow x + x < x + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{2x}{2} < \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow x < y$

  Chegamos a um absurdo em relação à hipótese "x é o maior número de $]-3, 1[$.

  Analogamente, demonstra-se a segunda afirmação.
- Da mesma forma, não podemos identificar o menor número no intervalo $]-\infty, 1]$.

◆ Reflita

Caso existam, é possível identificar:

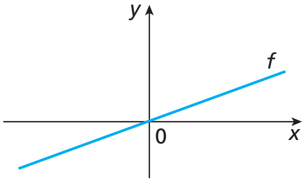
- o menor e o maior número inteiro do intervalo $]-3, 1[$?
- o menor e o maior número real do intervalo $]-3, 1[$?
- o menor número de $]-\infty, 1]$?

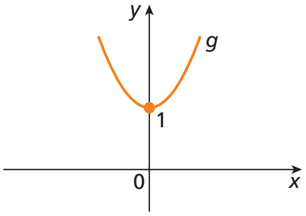
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

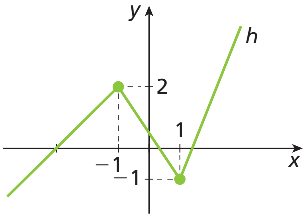
Registre as respostas em seu caderno

26. Observe os gráficos das funções de ℝ em ℝ e, em seguida, faça o que se pede.

a) *f* é crescente para $x \in \mathbb{R}$; *g* é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$; *h* é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.
b) Só *g* tem um valor mínimo, e esse valor é $y = 1$.







a) Identifique os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento de cada função.

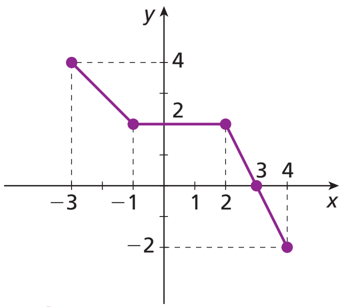
b) As funções apresentam um valor máximo ou um valor mínimo? Em caso afirmativo, que valores são esses?

27. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico das funções *g* e *h*, de ℝ em ℝ, e verifique se são crescentes ou decrescentes em todo o domínio.

a) $g(x) = x + 5$ **b)** $h(x) = -2x + 1$

Ver resolução no Guia do professor.

28. Observe o gráfico da função *f*.



f) Im(*f*) = [−2, 4]

Agora, responda às questões.

a) Qual é a imagem de 2 pela função *f*? 2

b) Para que valor de *x* a imagem é −2? 4

c) No intervalo [−1, 2], a função assume valores positivos ou negativos? Nesse intervalo, a função assume valores positivos.

d) No intervalo [−1, 2], a função é crescente? não

e) Qual é o domínio dessa função? D(*f*) = [−3, 4]

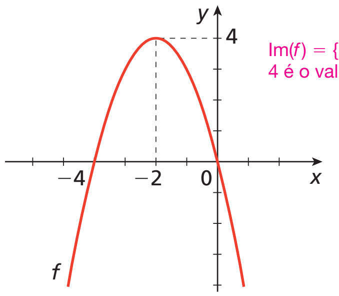
f) Qual é o conjunto imagem dessa função?

g) Qual é o valor máximo dessa função? 4

h) Qual é o valor mínimo dessa função? −2

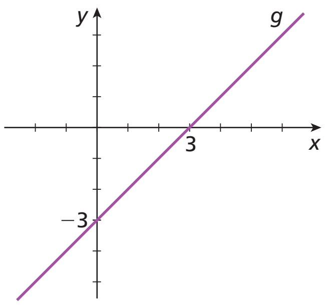
29. Determine o conjunto imagem e o valor máximo ou valor mínimo das funções de ℝ em ℝ representadas pelos gráficos abaixo.

a)



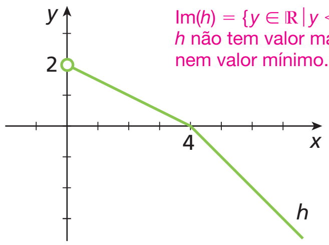
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
4 é o valor máximo de *f*.

b)



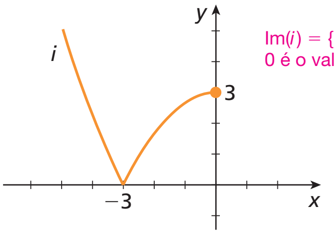
$\text{Im}(g) = \mathbb{R}$
g não tem valor máximo nem valor mínimo.

c)



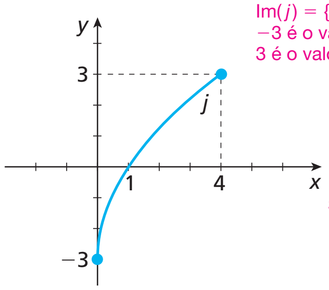
$\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$
h não tem valor máximo nem valor mínimo.

d)



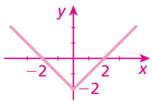
$\text{Im}(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
0 é o valor mínimo de *i*.

e)



$\text{Im}(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$
−3 é o valor mínimo de *j*.
3 é o valor máximo de *j*.

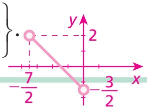
30. Resposta possível:



30. Construa o gráfico de uma função que tenha valor mínimo −2.

31. Construa o gráfico de uma função cujo conjunto imagem seja $\left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < y < 2\right\}$.

Resposta possível:



ADILSON SECCO
ADILSON SECCO
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3.3 Estudo do sinal de uma função

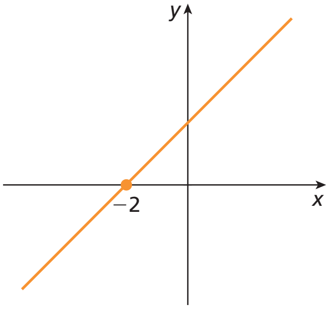
Podemos fazer o estudo do sinal de uma função por meio de sua representação gráfica.

No gráfico de uma função, todos os pontos acima do eixo *x* têm ordenada positiva ($y > 0$) e todos os pontos abaixo do eixo *x* têm ordenada negativa ($y < 0$). Nos pontos em que o gráfico corta o eixo *x*, a ordenada é nula ($y = 0$). Portanto, se, em determinado intervalo do domínio de uma função, os pontos do gráfico estão:

- acima do eixo *x*, dizemos que a função é **positiva** nesse intervalo;
- abaixo do eixo *x*, dizemos que a função é **negativa** nesse intervalo.

Exemplo

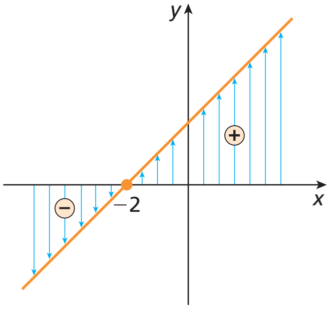
Vamos estudar o sinal da função *f* cujo gráfico está representado ao lado.



Note que os pontos de abscissa maior que −2 têm ordenada positiva, os pontos de abscissa menor que −2 têm ordenada negativa e o ponto de abscissa −2 tem ordenada zero.

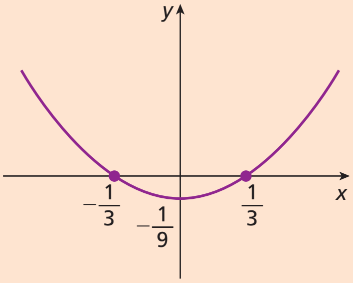
Assim:

- *f* é positiva para $x > -2$;
- *f* é negativa para $x < -2$;
- *f* é nula para $x = -2$.



Exercícios resolvidos

R9. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está representada no gráfico abaixo.



a) Em que intervalos do domínio a função *f* é positiva?
b) Em que intervalos do domínio a função *f* é negativa?
c) Para que valores de *x* a função *f* é nula?
d) Qual é o valor mínimo de *f*?

◆ Reflita

É possível uma função ser positiva em todo o seu domínio? Em caso afirmativo, explique como seria o gráfico dessa função.

Sim, é possível. O gráfico não cruzaria o eixo *x*; todos os seus pontos estariam acima desse eixo.

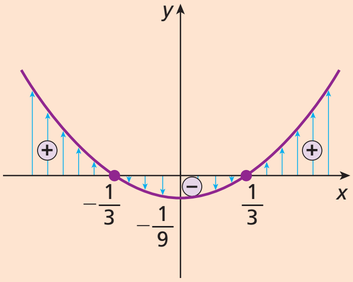
▸ Resolução

a) A função *f* é positiva nos intervalos $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ e $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

b) A função *f* é negativa no intervalo $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

c) A função *f* é nula em $x = \frac{1}{3}$ e em $x = -\frac{1}{3}$.

d) O valor mínimo de *f* é $-\frac{1}{9}$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R10. Estudar o sinal das funções:

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x - 1$

▶ *Resolução*

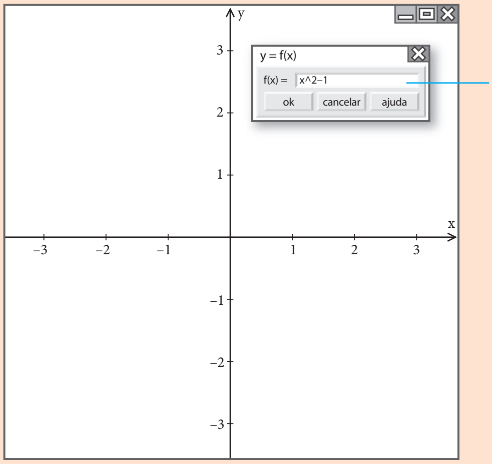
Podemos estudar o sinal de uma função a partir de seu gráfico. Vamos construir os gráficos das funções f e g utilizando um *software* de construção de gráficos.

Começaremos pela função dada pela lei $f(x) = x^2 - 1$.

◆ Observação

Em muitos *softwares*, há algumas maneiras diferentes para escrever as expressões matemáticas, por exemplo:

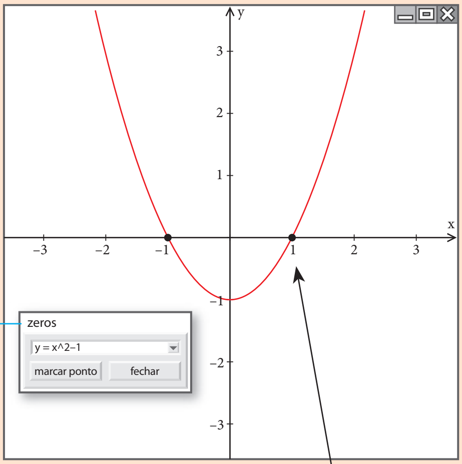
- sen *x* ⟶ sinx
- $\dfrac{x^3 + 3}{x}$ ⟶ (x^3+3)/x


y
x
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
ok
cancelar
ajuda

y = f(x)

f(x) = x^2–1

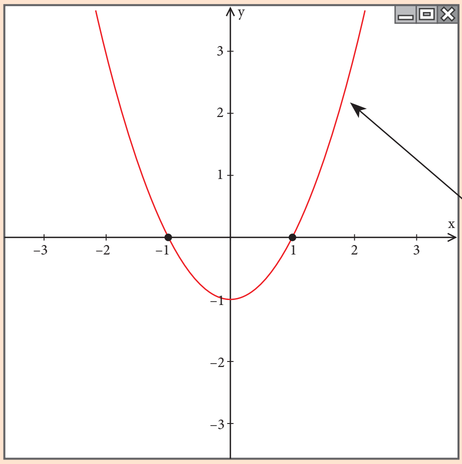
Campo para digitar a lei da função que queremos construir o gráfico.
Há diferentes maneiras de escrever $x^2 - 1$, por exemplo: x^2−1 ou x*x−1


y
x
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
zeros
marcar ponto
fechar

y = x^2–1

Selecionando a ferramenta “zeros da função”, marcamos os pontos cujas abscissas são os zeros da função.

Construído o gráfico da função *f*, encontramos os zeros da função. A função é nula para $x = -1$ e para $x = 1$.

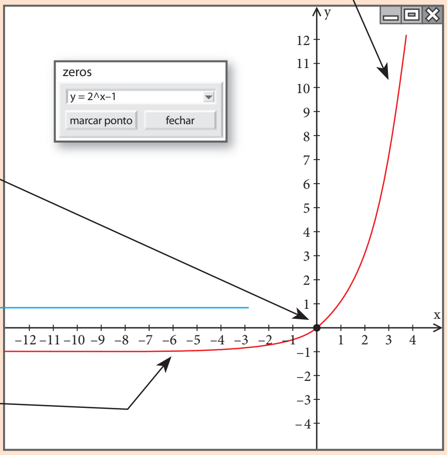

y
x
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3

Então, podemos observar que:

- a função *f* é positiva nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$;
- a função *f* é negativa no intervalo $]-1, 1[$.

Agora, vamos contruir o gráfico e estudar o sinal da função dada por $g(x) = 2^x - 1$.

Construímos o gráfico da função *g*. A função é crescente em todo o seu domínio.


y
x
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−12
−11
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
zeros
marcar ponto
fechar

y = 2^x–1

Encontramos o zero da função *g*. A função é nula para $x = 0$.

Muitas vezes precisamos mudar a escala usada nos eixos ordenados para conseguir observar melhor o gráfico construído.

Então, podemos afirmar que:

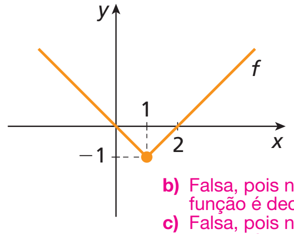
- a função *g* é positiva no intervalo $]0, +\infty[$;
- a função *g* é negativa no intervalo $]-\infty, 0[$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

32. O gráfico abaixo representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa e justifique as falsas.



b) Falsa, pois no intervalo $[0, 1]$ a função é decrescente.
c) Falsa, pois no intervalo $[0, 2]$ a função é negativa ou nula.

a) $f(0) = 0$ verdadeira

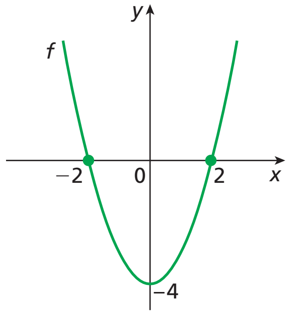
b) A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

c) A função é positiva em todo o domínio.

d) O valor mínimo da função é -1. verdadeira

e) $\text{Im}(f) = [-1, +\infty[$ verdadeira

33. Observe o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



a) Quais são os zeros da função? -2 e 2

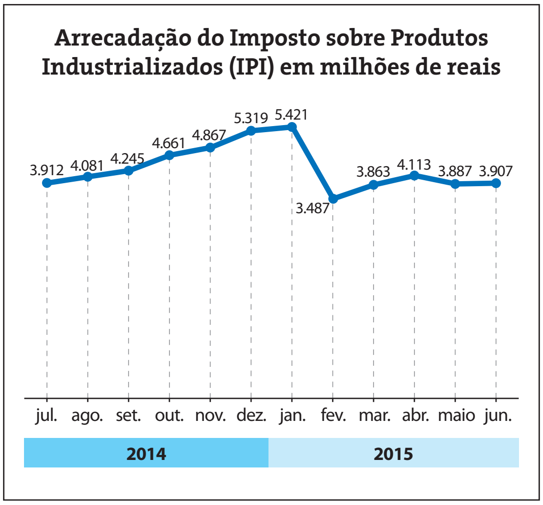
b) Em qual intervalo do domínio a função é crescente? E decrescente? crescente: $[0, +\infty[$; decrescente: $]-\infty, 0]$

c) Para que valores de x a função é positiva? E negativa? positiva: $x < -2$ ou $x > 2$; negativa: $-2 < x < 2$

d) Qual é o domínio da função? E o conjunto imagem? $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [-4, +\infty[$

e) Qual é o menor valor que essa função pode assumir? Esse valor é imagem de qual valor do domínio? -4; imagem de zero

34. O gráfico abaixo relaciona a arrecadação do IPI (Imposto sobre Produtos Industrializados) por mês (em milhões de reais) no período de julho de 2014 a junho de 2015.


Arrecadação do Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI) em milhões de reais

Dados obtidos em: <www.bcb.gov.br>.
Acesso em: 1º out. 2015.

Observando o gráfico, identifique:

a) os intervalos nos quais a arrecadação do IPI foi crescente; julho de 2014 a janeiro de 2015, fevereiro a abril de 2015 e maio a junho de 2015

b) os intervalos nos quais a arrecadação do IPI foi decrescente; janeiro a fevereiro de 2015 e abril a maio de 2015

c) as arrecadações do IPI máxima e mínima. 5.421 milhões de reais em janeiro de 2015; 3.487 milhões de reais em fevereiro de 2015

35. Para quais itens abaixo a função dada é positiva em todo o seu domínio? Justifique sua resposta. Se achar conveniente, use um *software* específico para construção de gráficos.

Itens **a** e **d**, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4 Função polinomial

Função polinomial na variável real x é toda função definida por

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (com $n \in \mathbb{N}$), para todo $x \in \mathbb{R}$.

◆ Observação

A função dada por $g(x) = x^{-1} + 2$, por exemplo, não é polinomial. Veja que o expoente de x, nesse caso, não é um número natural.

Na função polinomial:

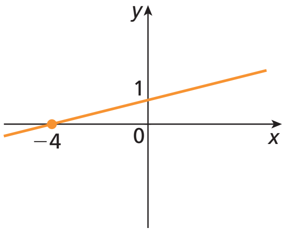
- a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 são números reais chamados de **coeficientes** da função;
- n é o grau do polinômio que expressa a função (com $a_n \neq 0$);
- o grau da função é determinado pelo grau do polinômio, e o grau do polinômio de uma só variável é dado pelo maior expoente da variável.

Exemplos

A função dada por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + \frac{2}{3}$, expressa por um polinômio de grau 3, é uma função polinomial de 3º grau. Os coeficientes dessa função são $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -3$, $a_1 = -7$ e $a_0 = \frac{2}{3}$.

Veja outros exemplos de funções polinomiais, acompanhadas de sua representação gráfica.

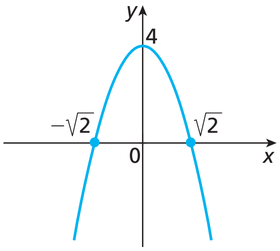
a) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$



f é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_0 = 1$; $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; zero da função *f*: −4

Essa função é crescente para todo o domínio.

b) $g(x) = -2x^2 + 4$

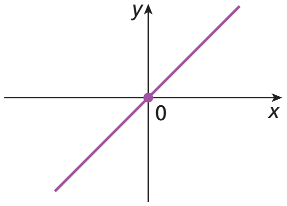


g é uma função polinomial de 2º grau com coeficientes $a_2 = -2$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 4$; $D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) =]-\infty, 4]$;

zeros da função *g*: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

O valor máximo dessa função é 4, que é a ordenada do ponto (0, 4), também conhecido como **ponto de máximo**.

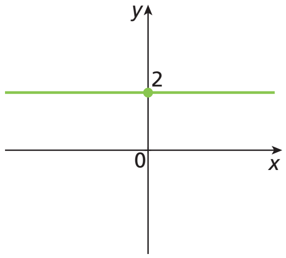
c) $h(x) = x$



h é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes $a_1 = 1$ e $a_0 = 0$; $D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \mathbb{R}$; zero da função *h*: 0

Qualquer *x* do domínio tem imagem *y* igual a *x*. Por isso, essa função é chamada de **função identidade**. Note que o gráfico da função identidade contém a bissetriz dos quadrantes ímpares.

d) $i(x) = 2$



i é uma função polinomial de grau zero com coeficiente $a_0 = 2$; $D(i) = \mathbb{R}$; $Im(i) = \{2\}$

Qualquer *x* do domínio tem imagem 2. Por isso, essa função é chamada de **função constante**. Note que o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo *x*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5 Funções definidas por mais de uma sentença

Algumas funções são definidas por mais de uma sentença.

Observe a situação a seguir.

Para saber qual é o imposto de renda de uma pessoa física (*y*), aplicamos à renda mensal (*x*) os cálculos definidos pela tabela estabelecida pelo governo. Veja a tabela para o exercício de 2016.

Base de cálculo mensal (em reais)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir do imposto (em reais)
Até 1.903,98	—	—
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15,0	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: Ministério da Fazenda.
Disponível em: <www.receita.fazenda.gov.br>.
Acesso em: 29 set. 2015.

MINISTÉRIO DA FAZENDA

JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

O Ministério da Fazenda é o órgão responsável por planejar, formular e executar as políticas econômicas nacionais. Entre suas funções está a fiscalização da arrecadação tributária. Na foto, Ministério da Fazenda em Brasília, DF, 2015.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo *x* é igual a R$ 1.500,00, o contribuinte está isento, isto é, o imposto é zero real.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo *x* é igual, por exemplo, a R$ 3.000,00, o imposto *y* a pagar é:

$$y = 3.000{,}00 \cdot 0{,}15 - 354{,}80 = 450{,}00 - 354{,}80 = 95{,}20$$

Logo, o imposto mensal a pagar é R$ 95,20.

Podemos modelar matematicamente essa situação por uma função, com domínio em um subconjunto dos números reais não negativos, dada por mais de uma sentença. Veja.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1.903{,}98 \\ 0{,}075 \cdot x - 142{,}80, \text{ se } 1.903{,}98 < x \leqslant 2.826{,}65 \\ 0{,}15 \cdot x - 354{,}80, \text{ se } 2.826{,}65 < x \leqslant 3.751{,}05 \\ 0{,}225 \cdot x - 636{,}13, \text{ se } 3.751{,}05 < x \leqslant 4.664{,}68 \\ 0{,}275 \cdot x - 869{,}36, \text{ se } x > 4.664{,}68 \end{cases}$$

Em uma aplicação como essa, espera-se que não haja salto no valor do imposto quando se passa de uma faixa para outra ou que, na prática, se houver diferença, ela não seja significativa.

Podemos constatar que, por exemplo, para uma base de cálculo igual a R$ 3.751,05, que é o limite superior de uma das faixas, obtemos uma diferença muito pequena entre o imposto a pagar com o cálculo em que se usa a expressão da própria faixa do domínio, $0{,}15 \cdot x - 354{,}80$, e o cálculo em que se usa a da faixa seguinte, $0{,}225 \cdot x - 636{,}13$:

- $f(x) = 0{,}15 \cdot x - 354{,}80$
  $f(3.751{,}05) = 0{,}15 \cdot 3.751{,}05 - 354{,}80 = 207{,}8575$
- $f(x) = 0{,}225 \cdot x - 636{,}13$
  $f(3.751{,}05) = 0{,}225 \cdot 3.751{,}05 - 636{,}13 = 207{,}85625$

◆ Reflita

Há salto expressivo no valor de $f(x)$ quando x se aproxima de R$ 1.903,98? E quando x se aproxima de R$ 2.826,65?

Para $x = 1.903{,}98$, temos:
- Usando a expressão da própria faixa do domínio: $f(x) = 0$
- Calculando pela faixa seguinte:
  $f(x) = 0{,}075 \cdot x - 142{,}80$
  $f(x) = 0{,}075 \cdot 1.903{,}98 - 142{,}80$
  $f(x) = -0{,}0015$

A diferença é R$ 0,0015. Logo, não é significativa.

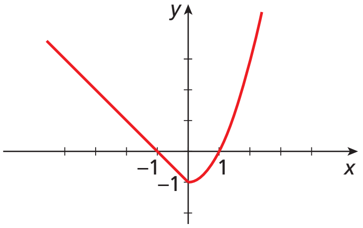
Para $x = 2.826{,}65$, temos:
- Usando a expressão da própria faixa do domínio:
  $f(x) = 0{,}075 \cdot x - 142{,}80$
  $f(x) = 0{,}075 \cdot 2.826{,}65 - 142{,}80$
  $f(x) = 69{,}19875$
- Calculando pela faixa seguinte:
  $f(x) = 0{,}15 \cdot x - 354{,}80$
  $f(x) = 0{,}15 \cdot 2.826{,}65 - 354{,}80$
  $f(x) = 69{,}1975$

A diferença é R$ 0,00125. Logo, não é significativa.

Comentário: Convém discutir com os alunos o significado de "um salto expressivo do valor de $f(x)$ nas quebras de domínio". Haveria justiça se duas pessoas tivessem uma diferença de rendimentos, digamos de R$ 1,00, e uma diferença de recolhimento de impostos de R$ 100,00?

Exemplo

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$



ADILSON SECCO

Observe que:

- O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.
- A imagem é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.
- f é decrescente em $]-\infty, 0]$.
- f é crescente em $[0, +\infty[$.
- f é positiva em $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$.
- f é negativa em $]-1, 1[$.
- Os zeros de f são -1 e 1.

Note que o comportamento do gráfico varia conforme o intervalo do domínio.

Exercício resolvido

R11. Considerando a função g tal que $g(x) = \begin{cases} x + 4, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 3x^2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, calcular:

a) $g(1)$ **b)** $g(3)$

▸ ***Resolução***

a) Para $x = 1$, usamos a primeira sentença.
Assim: $g(1) = 1 + 4 = 5$

b) Para $x = 3$, usamos a segunda sentença.
Assim: $g(3) = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$

38. a) $f(x) = \begin{cases} 10{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$

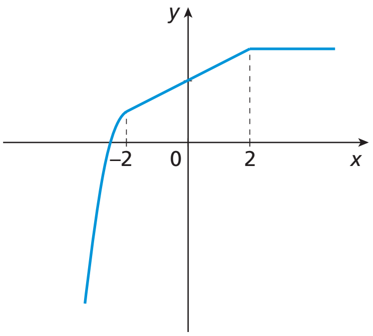
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

36. Escreva a lei da função cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, -5)$.
$f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. Observe a lei e o gráfico da função m de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$$m(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 3, \text{ se } x \leqslant -2 \\ \dfrac{x}{2} + 2, \text{ se } -2 < x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$



b) para $x > 2$

Responda às questões.

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de $m(x)$? $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$

b) Para que valores de x a função é constante?

c) Quantos zeros tem essa função? Justifique sua resposta. Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.

d) Em que intervalo do domínio a função é positiva? E negativa? positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$

38. Para estimular sua equipe, o departamento de vendas de uma fábrica de bicicletas elaborou a seguinte regra: se a venda semanal for de uma quantidade x, menor que 30 unidades, a comissão y que o vendedor receberá será de 3% do valor total v, em reais, das vendas; se a venda for de 30 a 100 unidades, a comissão passa para 5% de v; se a quantidade for superior a 100 unidades, a comissão passa para 8% de v. Cada bicicleta é vendida por R$ 350,00.

a) Escreva a lei de uma função que retrate a relação entre o número de bicicletas vendidas e a comissão do vendedor.

b) Quanto um vendedor receberá de comissão se vender 80 bicicletas em uma semana? E se vender 101? R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

39. A função a seguir é definida por três sentenças. Calcule o valor de $p(x)$ em cada caso.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, \text{ se } x \leqslant -4 \\ -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}, \text{ se } -4 < x \leqslant 3 \\ \dfrac{x+3}{3}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

a) $x = -6$ 9

b) $x = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{19}{7}$

c) $x = 3{,}78$ 2,26

d) $x = -4$ 4

e) $x = 3$ 2

f) $x = 0$ $\dfrac{20}{7}$

6 Função inversa

A seguir, vamos apresentar alguns conceitos que serão necessários para o entendimento do conceito de função inversa. Acompanhe.

Função sobrejetora

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** quando, para qualquer $y \in B$, sempre temos $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = B$.

Para saber se uma função é sobrejetora, é preciso verificar se o conjunto imagem é igual ao contradomínio.

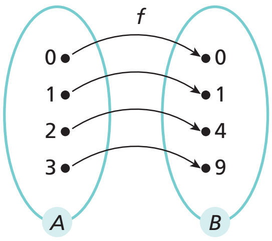
Reflita

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é sobrejetora? Justifique sua resposta.

Não, pois: $Im(f) = \mathbb{R}_+ \neq CD(f) = \mathbb{R}$

Exemplos

a) O diagrama ao lado representa a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x^2$.
Observe que todo elemento de B tem um correspondente em A, ou seja, o conjunto imagem da função é igual a seu contradomínio.
Então, a função $f: A \to B$ é sobrejetora.



b) A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x$ é sobrejetora?
Para qualquer número real x, temos que 2^x é um número real estritamente positivo. Portanto, em $\mathbb{R}$, que é o contradomínio dessa função, existem números que não têm correspondente algum do domínio, ou seja, o conjunto imagem da função não coincide com seu contradomínio.
Logo, a função g não é sobrejetora.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Função injetora

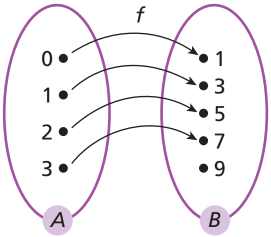
Uma função $f: A \rightarrow B$ é **injetora** se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo

O diagrama ao lado representa a função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = 2x + 1$.

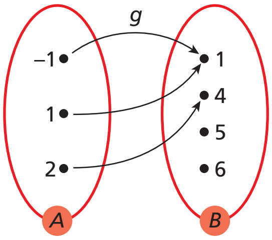
Observe que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B.

Portanto, a função $f: A \rightarrow B$ é injetora.



Reflita

A função $g: A \rightarrow B$ é sobrejetora? E injetora? Justifique sua resposta.



Não é sobrejetora, porque $CD(g) \neq Im(g)$. Não é injetora, porque dois elementos de A têm a mesma imagem: $g(-1) = g(1) = 1$

Função bijetora

Uma função $f: A \rightarrow B$ é **bijetora** se for sobrejetora e injetora.

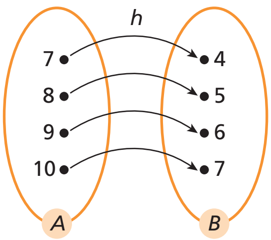
Exemplo

O diagrama ao lado representa a função $h: A \rightarrow B$, definida por $h(x) = x - 3$.

Observe que o contradomínio é igual ao conjunto imagem (é sobrejetora) e que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B (é injetora).

Portanto, a função h é bijetora.

Mesmo se admitíssemos $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x - 3$, ainda assim h seria bijetora.



Reflita

Em uma função bijetora $f: A \rightarrow B$, a cada elemento de A corresponde um só elemento de B e vice-versa?

Sim, pois uma função bijetora é sobrejetora e injetora.

Exercício resolvido

R12. Mostrar que a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $t(x) = x^2 + 1$, não é bijetora.

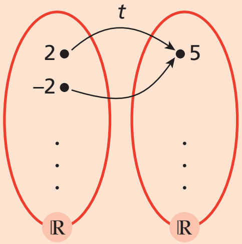
Resolução

Para mostrar que a função não é bijetora, precisamos mostrar que ela não é injetora (basta encontrar no domínio dois elementos com a mesma imagem) ou que ela não é sobrejetora (basta encontrar no contradomínio um elemento que não seja imagem de algum elemento do domínio). Substituindo x por 2 e por −2, por exemplo, temos:

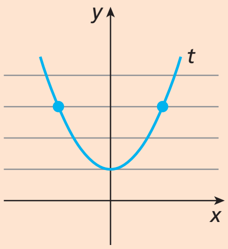
- $t(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
- $t(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Como, no domínio, há dois elementos distintos com a mesma imagem, concluímos que a função t não é injetora e, portanto, não é bijetora.

Podemos, com base no gráfico da função t, traçar retas paralelas ao eixo x e verificar que existe pelo menos uma que corta o gráfico em mais de um ponto, concluindo, de outro modo, que a função t não é injetora.



Quando uma reta paralela ao eixo x corta o gráfico em mais de um ponto, isso indica que, no domínio da função, existem elementos distintos com a mesma imagem. Então, a função não é injetora.



Observação

Em uma função f de A em B, a condição de função injetora, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, equivale à condição para quaisquer x_1 e x_2 de A, se $f(x_1) = f(x_2)$. Então, $x_1 = x_2$.

Por exemplo, 0 é elemento do contradomínio $\mathbb{R}$ e não há elemento x do domínio $\mathbb{R}$ tal que $0 = x^2 + 1$.

Reflita

Mostre que a função t não é sobrejetora.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

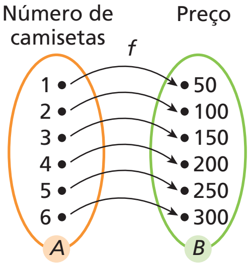
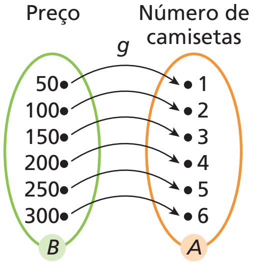
◆ Definição de função inversa

Acompanhe a situação a seguir.

Para facilitar seu trabalho, uma vendedora de camisetas fez uma tabela relacionando o número de camisetas e o preço.

Número de camisetas	1	2	3	4	5	6
Preço (R$)	50,00	100,00	150,00	200,00	250,00	300,00

Com esses valores, e considerando $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{50,00; 100,00; 150,00; 200,00; 250,00; 300,00\}$, podemos pensar em duas funções. Veja.

$f: A \to B$	$g: B \to A$
Função que associa o número de camisetas ao preço.  Número de camisetas Preço f 1 2 3 4 5 6 50 100 150 200 250 300 A B $D(f) = A$ $Im(f) = B$	Função que associa o preço ao número de camisetas.  Preço Número de camisetas g 50 100 150 200 250 300 1 2 3 4 5 6 B A $D(g) = B$ $Im(g) = A$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observe que f e g são funções bijetoras e $D(f) = Im(g)$ e $D(g) = Im(f)$. Nesse caso, dizemos que uma função é a **inversa** da outra. Costuma-se indicar a inversa de uma função f por $\mathbf{f^{-1}}$.

Dada uma função bijetora $f: A \to B$, chamamos de **função inversa** de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, temos $f(x) = y$ e $f^{-1}(y) = x$.

◆ Reflita

A função de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$ admite inversa? Justifique sua resposta.

Sim, pois essa função é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora.

Nem todas as funções admitem inversa; somente as que são bijetoras.

Se conhecemos a lei que define uma função bijetora $f: A \to B$, podemos obter a lei que define sua inversa, $f^{-1}: B \to A$.

Vamos retomar a situação anterior, em que tínhamos a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 50x$.

Partindo da lei que define f, encontramos a lei que define f^{-1}:

1º) Lembrando que $f(x)$ é a imagem de x através da função f e que y também representa essa imagem, escrevemos a lei que define f, substituindo $f(x)$ por y.

Na situação estudada, $f(x) = 50x$ fica na forma $y = 50x$.

2º) Invertemos as variáveis na lei que define f, ou seja, trocamos x por y e y por x.

No nosso exemplo, $y = 50x$ assume a forma $x = 50y$.

3º) Agora, expressando y em função de x, obtemos $f^{-1}(x)$: $x = 50y \Rightarrow y = \frac{x}{50}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{x}{50}$

Observe alguns valores atribuídos às funções f e f^{-1}, bem como a correspondência entre eles.

$f(x) = 50x$	$f(1) = 50$	$f(2) = 100$	$f(3) = 150$	$f(4) = 200$
$f^{-1}(x) = \frac{x}{50}$	$f^{-1}(50) = 1$	$f^{-1}(100) = 2$	$f^{-1}(150) = 3$	$f^{-1}(200) = 4$

◆ Reflita

Dê exemplo de uma função que não admite função inversa. Apresente sua função para os colegas e explique a eles por que a função escolhida não admite inversa.

Resposta possível:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, pois f não é bijetora.
Comentário: Ao expor e explicar verbalmente seu exemplo para a classe, os alunos estarão exercitando sua habilidade argumentativa e oral.

Exercício resolvido

R13. Considerar a função f de domínio real dada pela lei $f(x) = x^3$.

a) Qual é a lei da função inversa de f?

b) Sem construir os gráficos, determinar os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1}.

▸ *Resolução*

a) Partindo da lei que define f, temos:

- $f(x) = x^3$ é o mesmo que $y = x^3$.
- Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = y^3$
- Expressando y em função de x, obtemos:

$$x = y^3 \Rightarrow y^3 = x \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

Portanto: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

b) Para todo x real, os pontos P do gráfico de f têm coordenadas (x, x^3), e os pontos Q do gráfico de f^{-1} têm coordenadas (x^3, x).

Os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1} são tais que $x_P = x_Q$ e $y_P = y_Q$, ou seja:

$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$

- Fatorando $x^3 - x$ e observando que x é fator comum:

$x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1)$

- Aplicando a identidade $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ em $x^2 - 1$, temos:

$x^3 - x = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Então:

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

Portanto, os gráficos de f e f^{-1} interceptam-se nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Comentário: Na resolução do exercício **R13** há o pressuposto de que a função $f(x) = x^3$ é bijetora. Pode-se perguntar aos alunos por que se trata de uma função bijetora, o que pode ser observado por meio do esboço de seu gráfico.

◆ Observação

De maneira informal, podemos pensar que o inverso de elevar um número ao cubo é extrair a raiz cúbica desse número.

40. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{9x - 1}{2 - x}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$
c) $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$
e) $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

41. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 9}{4}$
b) $g^{-1}(x) = \dfrac{3 - x}{2}$
c) $h^{-1}(x) = \dfrac{-2x - 1}{14}$
d) $m^{-1}(x) = 3x - 5$
e) $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
f) $p^{-1}(x) = \dfrac{x^5}{2}$

42. a) As leis obtidas devem ser iguais às dadas.
b) A inversa da função inversa de uma função bijetora é a própria função.

43. b) Respostas possíveis: os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa são retas paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares; os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

40. Considerando que a função f definida por $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 9}$ admita inversa, determine:

a) $f^{-1}(x)$
b) $D(f)$
c) $D(f^{-1})$
d) $Im(f)$
e) $Im(f^{-1})$

41. Determine a lei que define a função inversa de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 4x + 9$
b) $g(x) = -2x + 3$
c) $h(x) = -7x - \dfrac{1}{2}$
d) $m(x) = \dfrac{x + 5}{3}$
e) $n(x) = x^3 + 1$
f) $p(x) = \sqrt[5]{2x}$

42. Considere as funções do exercício **41**.

a) Determine as leis que definem as funções inversas das funções obtidas, por exemplo, $[f^{-1}]^{-1}(x)$. Comparem-nas com as leis dadas.

b) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre a inversa da função inversa de uma função bijetora dada.

43. Considere as funções reais dadas pelas leis:

- $f(x) = x$
- $g(x) = x + 3$
- $h(x) = x - 1$
- $i(x) = x - 3$

a) No mesmo plano cartesiano, construa o gráfico de cada função dada e de sua respectiva função inversa. Ver resolução no Guia do professor.

b) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

44. Considere as funções reais dadas pelas leis:

- $f(x) = x$
- $g(x) = 2x$
- $h(x) = 3x$
- $i(x) = 4x$

a) No mesmo plano cartesiano, construa o gráfico de cada função dada e de sua respectiva função inversa. Ver resolução no Guia do professor.

b) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

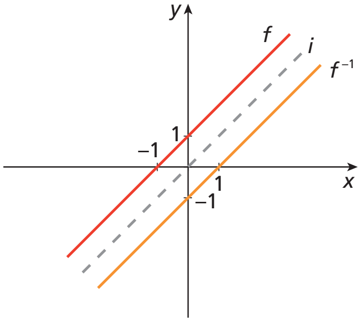
44. b) Respostas possíveis: os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa são retas que concorrem com a bissetriz dos quadrantes ímpares na origem do plano cartesiano; os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

◆ Gráfico da função inversa

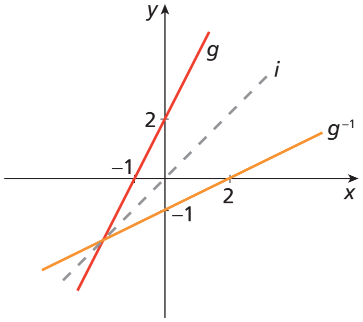
Os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade i, definida por $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplos

a) $f(x) = x + 1$
$f^{-1}(x) = x - 1$



b) $g(x) = 2x + 2$
$g^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1$



◆ Reflita

Se o par ordenado (a, b) pertence ao gráfico de uma função bijetora f, o par ordenado (b, a) pertence ao gráfico de sua inversa, f^{-1}? Justifique sua resposta.

Desde que exista f^{-1}, sim, pela própria definição de função inversa.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

45. Escreva a lei da função inversa de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = -x + 3$ $f^{-1}(x) = -x + 3$

b) $g(x) = 2x$ $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

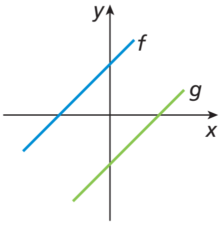
c) $h(x) = \frac{x}{3} - 2$ $h^{-1}(x) = 3x + 6$

d) $k(x) = 2x + 1$ $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

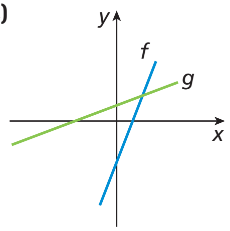
- No mesmo plano cartesiano, trace os gráficos de cada função e da respectiva inversa. Depois desenhe, em cada um, o gráfico da função identidade. O que você observa? Ver resolução no Guia do professor.

46. Em cada caso, a linha azul é o gráfico de uma função f, e a linha verde é o gráfico de uma função g.

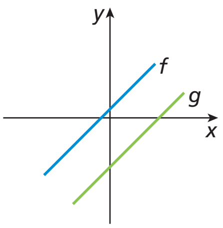
a)



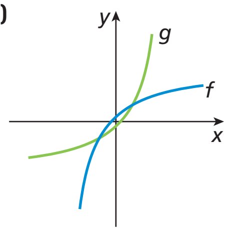
c)



b)



d)

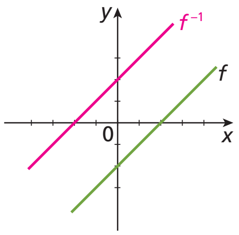


- Em quais itens a função f é a inversa da função g? Justifique sua resposta.

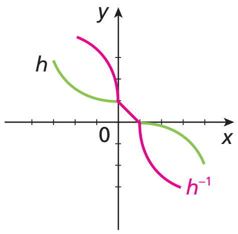
Em **a**, **c** e **d**, pois em cada um desses casos os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

47. Copie os gráficos abaixo no caderno e, sobre cada gráfico copiado, esboce o gráfico da função inversa à função dada.

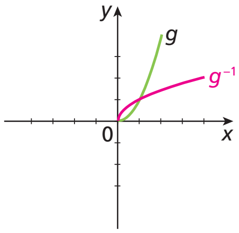
a)



c)

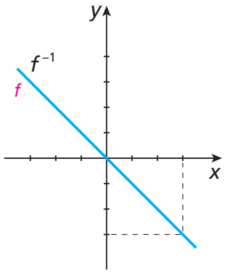


b)

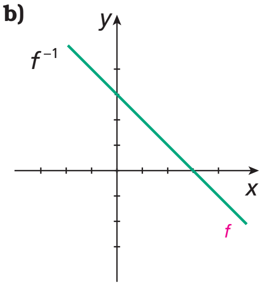


48. Para cada item, copie o gráfico da função inversa da função f. Sobre o gráfico copiado, esboce o gráfico de f.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

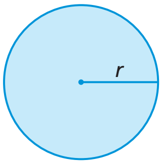
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

6. Ver gráfico no Guia do professor.
a) $f(x) > 0$ para $-1 < x < 3$
$f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 3$
$f(x) < 0$ para $x < -1$ ou $x > 3$
b) crescente: $]-\infty, 1]$
decrescente: $[2, +\infty[$
constante: $]1, 2[$

Aplicação

1. A fórmula para obter a área A de um círculo de raio r é $A = \pi r^2$ (em que π é aproximadamente 3,14).



a) Resposta possível:
$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = y = \pi x^2$

b) (x, y)
raio do círculo ┘ └ área do círculo de raio x

a) Escreva essa informação com notação de função matemática (y em função de x). Não se esqueça de definir o domínio e o contradomínio da função.

b) O que representa cada par ordenado (x, y) dessa função?

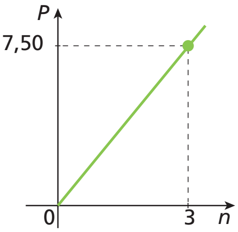
c) Qual é a variável dependente? y (área)

d) Qual é a variável independente? x (raio)

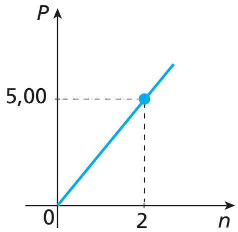
e) Sabemos que a área de um círculo de raio r é A. Qual seria a área de um círculo de raio $2r$? $4A$

2. Os gráficos abaixo representam o preço P, em reais, do litro do etanol em função do número n de litros em dois postos, A e B.

Posto A



Posto B

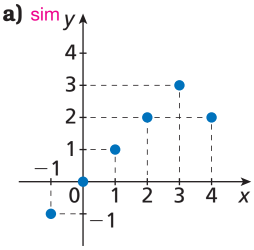


- Em qual posto é mais vantajoso abastecer?

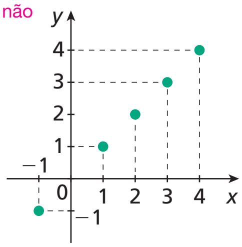
O preço é igual nos dois postos.

3. Dados $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \mathbb{R}$, verifique se os gráficos podem representar funções de A em B.

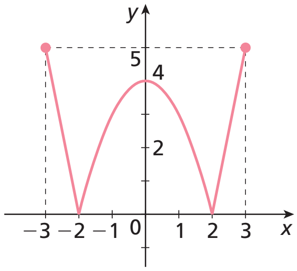
a) sim



b) não



4. Observe o gráfico da função f e faça o que se pede.



a) Determine $f(-2)$. 0

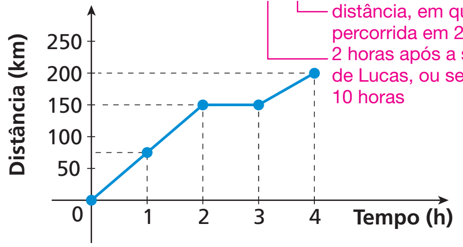
b) Estime o valor de $f(0{,}5)$. Resposta possível: 3,5

c) Estime o valor de x para $f(x) = 2$. Respostas possíveis: $-1{,}5$; $1{,}5$; $-2{,}5$; $2{,}5$

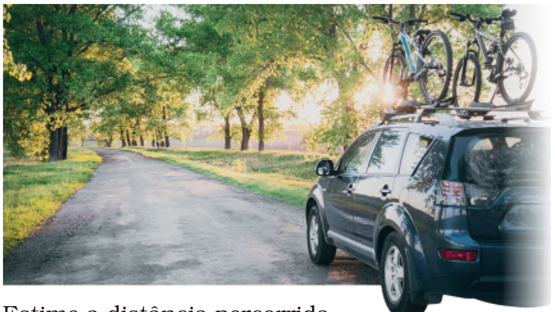
d) Determine $D(f)$ e $Im(f)$. $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) Identifique os zeros da função. -2 e 2

5. O gráfico a seguir mostra a distância percorrida por Lucas, em seu carro, das 8 às 12 horas de certo dia. O tempo indica o número de horas decorridas depois das 8 horas.



c) (2, 150)
└ distância, em quilômetro, percorrida em 2 horas
2 horas após a saída de Lucas, ou seja, 10 horas



NICKOLYA/SHUTTERSTOCK

a) Estime a distância percorrida por Lucas das 8 às 9 horas desse dia. Resposta possível: 75 km

b) Em que período Lucas ficou parado? das 10 às 11 horas

c) O que representa o par ordenado (2,150) nesse gráfico?

d) Quantos quilômetros Lucas percorreu das 11 às 12 horas? 50 km

6. Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x < 2 \\ -x + 3, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

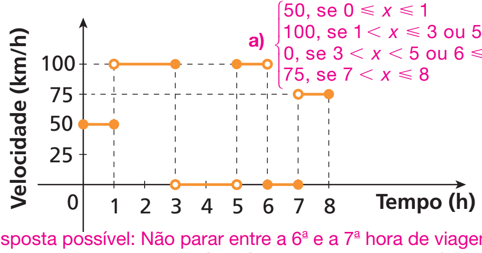
a) Estude o sinal da função.

b) Determine os intervalos em que a função é crescente, decrescente e constante.

c) Indique os zeros da função. -1 e 3

7. Priscila fez uma viagem de ônibus que durou 8 horas. A velocidade média do ônibus variou, em função do tempo, conforme mostra o gráfico abaixo.

a) $\begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \text{ ou } 5 \leqslant x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leqslant x \leqslant 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leqslant 8 \end{cases}$



d) Resposta possível: Não parar entre a 6ª e a 7ª hora de viagem, locomovendo-se nesse período à velocidade de 75 km/h.

a) Escreva a lei da função representada pelo gráfico.

b) Quantos quilômetros o ônibus percorreu nas primeiras 3 horas de viagem? 250 km

c) Quantas horas o ônibus permaneceu parado nessa viagem? 3 horas

d) Para Priscila chegar ao mesmo destino em 7 horas, o que deveria mudar nessa situação?

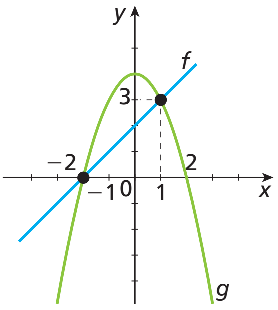
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

9. b) $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^*$ tal que $f^{-1}(x) = \frac{2}{x+1}$ **c)** $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Aprofundamento

8. No plano cartesiano a seguir, estão esboçados os gráficos da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



a) Em que intervalo a função g é crescente? $]-\infty, 0]$

b) Para quais valores de x temos $f(x) = g(x)$? -2 e 1

c) Em que intervalo do domínio as funções f e g são simultaneamente positivas? $]-2, 2[$

9. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x+1}{2}$
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) $f: \mathbb{R}^* \to B$ tal que $B = \mathbb{R} - \{-1\}$ e $f(x) = \frac{2-x}{x}$

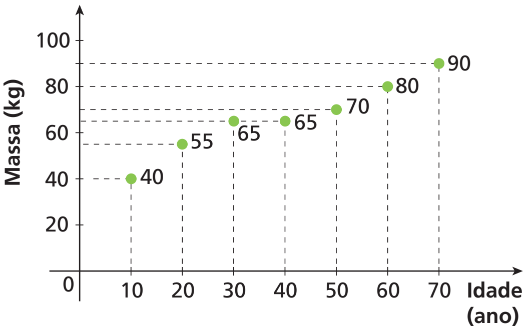
c) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$

d) $f: A \to \mathbb{R}_+$ tal que $A =]-\infty, 1]$ e $f(x) = (x-1)^2$
$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to A$ tal que $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

10. Sandra sempre se pesou e registrou os dados.

FERNANDO FAVORETTO

Veja, no gráfico abaixo, como variou a massa de Sandra a cada 10 anos de sua vida.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

a) Podemos concluir que a massa de Sandra é diretamente proporcional à idade? Justifique.

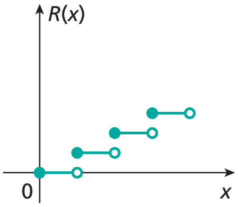
b) Podemos afirmar que, entre os 30 e os 40 anos, a massa de Sandra não se alterou? Justifique.

c) É verdade que a massa de Sandra aumentou mais rapidamente do nascimento até os 10 anos? Justifique. Sim, pois nos 10 primeiros anos a massa de Sandra aumentou aproximadamente 40 kg; um aumento superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

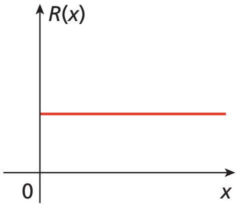
11. (Enem) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se $R(x) = kx(P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para x real, é: alternativa c

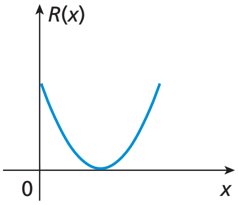
a)



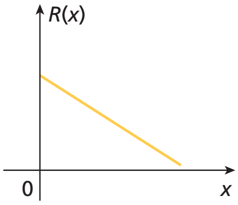
d)



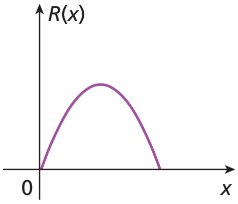
b)



e)



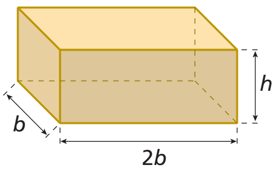
c)



10. a) Não, pois, para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais, é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.
b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.

Desafio

12. Uma empresa fabrica caixas de diferentes dimensões, mas de volume sempre igual a 2 m^3. O comprimento dessas caixas é o dobro da largura. Observe abaixo o esquema da caixa.



$$V = b \cdot 2b \cdot h$$

O material com o qual é feita a base superior e a base inferior da caixa custa R\$ 4,00 o metro quadrado, e o material das laterais custa R\$ 3,00 o metro quadrado.

Expresse o custo C do material para a fabricação da caixa em função da largura b da base. Calcule o preço de custo de uma caixa de 0,5 m de largura.

$C(b) = 16b^2 + \frac{18}{b}$; R\$ 40,00

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Consumo *c* de água	Valor *V* da conta (R$)
$0\ m^3 < c \leqslant 10\ m^3$	$V = 10$
$10\ m^3 < c \leqslant 20\ m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1{,}20 = V_1$
$20\ m^3 < c \leqslant 30\ m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1{,}50 = V_2$
$30\ m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2{,}00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a água.

O consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a 9 m^3, 18 m^3 e 36 m^3. Então, Caio pagou, em reais, respectivamente: alternativa a

a) 20,00; 39,20; 98,00
b) 10,00; 19,60; 49,00
c) 20,00; 40,00; 80,00
d) 18,00; 37,20; 96,00

2. Na função f: $A \to B$, definida por $y = f(x)$, D(f) é ______, CD(f) é ______ e as ______ dos pontos do plano determinados pelos pares ordenados (x, y), que obedecem à lei $y = f(x)$, formam o conjunto ______ de f. alternativa b

a) A; B; abscissas; imagem
b) A; B; ordenadas; imagem
c) B; A; imagens; vazio
d) B; A; ordens; real

3. Se o gráfico de uma função intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$, a abscissa a desse ponto é o ______ da função. alternativa c

a) valor
b) cruzamento
c) zero
d) meio

4. Para construir o gráfico de uma função f, devemos representar no plano cartesiano os pares ordenados (x, y), que tenham $x \in D(f)$ e tais que x é a referência ______ e $y = f(x)$ é a referência ______. alternativa b

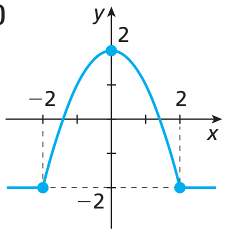
a) vertical; horizontal
b) horizontal; vertical
c) positiva; negativa
d) par; ímpar

5. O gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

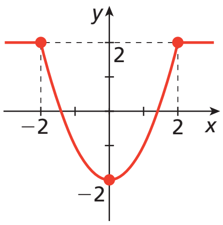
$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

é: alternativa d

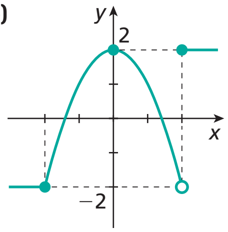
a)



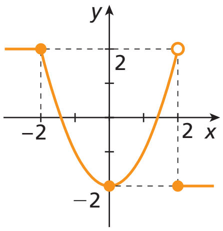
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

6. Se, em um intervalo I do domínio, uma função f passa de crescente a decrescente em (x_0, y_0), dizemos que, em I: alternativa c

a) x_0 é raiz de f.
b) x_0 é valor máximo.
c) y_0 é valor máximo.
d) y_0 é valor mínimo.

7. Somente as funções ______ admitem inversa. alternativa c

a) injetoras
b) sobrejetoras
c) bijetoras
d) positivas

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Identificar uma função.	X	X	X		X	X	X
Analisar e construir o gráfico de uma função.			X	X	X	X	
Resolver situações-problema que envolvam funções.	X						
Obter a função inversa de funções dadas.							X
Páginas do livro referentes ao conceito	54 a 58	58 a 62	58 a 60 63 a 65	61 a 64	63 a 64 72 a 74	66 a 68	75 a 78

Compreensão de texto

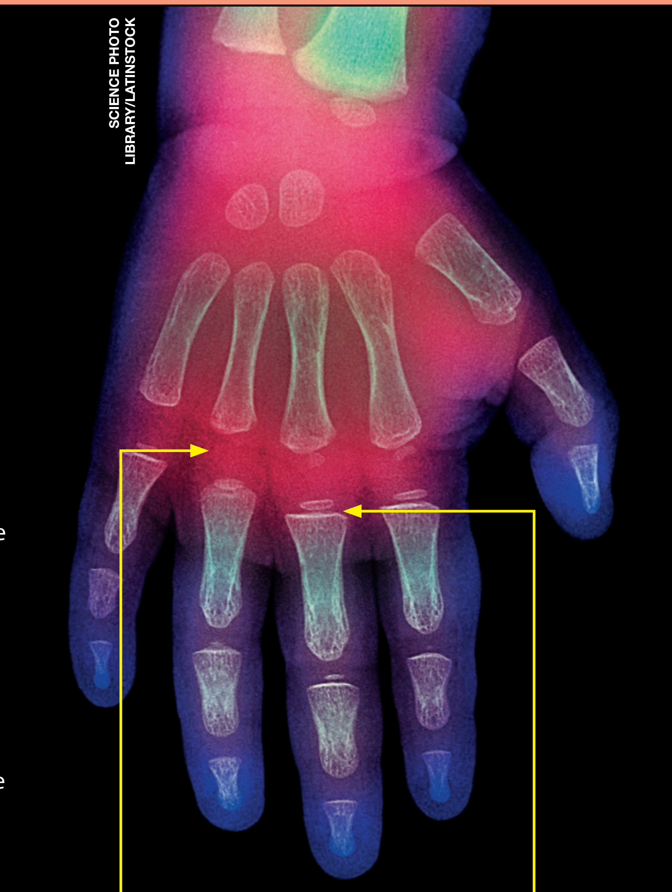
Este infográfico permite a abordagem interdisciplinar com Biologia.

A matemática dos ossos

Cálculos matemáticos podem indicar a provável curva de crescimento de um adolescente a partir da observação do desenvolvimento de seus ossos. Para isso, é preciso um aparelho de raio X, um bom especialista no assunto e algum conhecimento em funções matemáticas.

O amadurecimento envolve diversos fatores: desenvolvimento ósseo, mental, sexual. Faz parte desse processo a transformação do esqueleto.

No começo da vida, temos um número maior de ossos; eles são também menos densos e têm as extremidades cartilaginosas. Conforme crescemos, esses ossos ganham massa e algumas das extremidades se aproximam até se soldarem. Esse processo de maturação óssea pode ser observado pelo raio X e avaliado conforme idade e sexo, indicando uma provável estatura adulta. Essa é a matemática dos ossos.



SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

Nessa região, as zonas de cartilagem são grandes, mas quase não podem ser vistas, pois são menos densas e deixam a luz passar. As partes mais visíveis são de ossos mais densos.

Nas crianças, existem cerca de 30 centros de ossificação, muito mais que nos adultos. Este ossinho, por exemplo, desaparece quando a criança se torna adulta.

A idade óssea

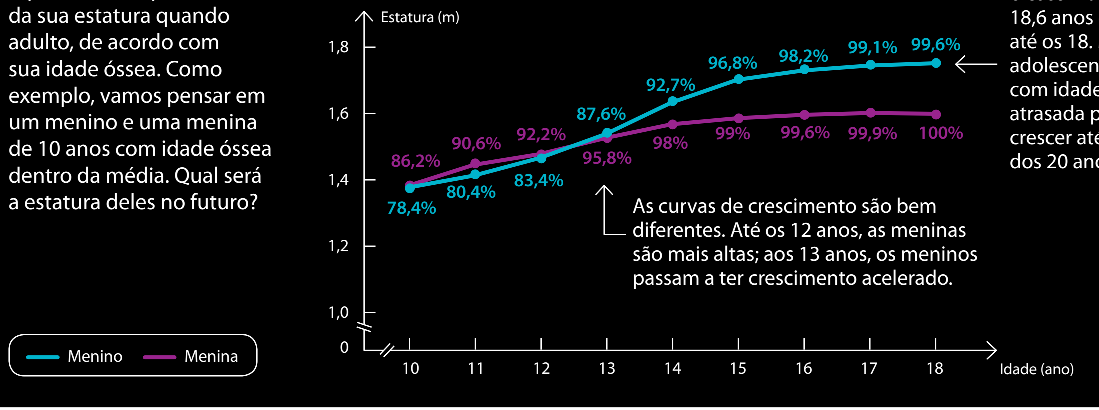
Analisando a densidade dos ossos, seu número e proximidade, o médico pode dizer qual é a idade óssea do indivíduo. Esta, em geral, corresponde à idade cronológica, mas às vezes pode se adiantar ou atrasar, interferindo no tempo do crescimento, o que não é um grande problema, é apenas um indicador do processo de amadurecimento.

Calculando a estatura

A estatura do adolescente representa um percentual da sua estatura quando adulto, de acordo com sua idade óssea. Como exemplo, vamos pensar em um menino e uma menina de 10 anos com idade óssea dentro da média. Qual será a estatura deles no futuro?

Idade e estatura

Aplicando os dados médicos em uma função matemática, saberemos a altura provável de cada um na idade adulta.



As curvas de crescimento são bem diferentes. Até os 12 anos, as meninas são mais altas; aos 13 anos, os meninos passam a ter crescimento acelerado.

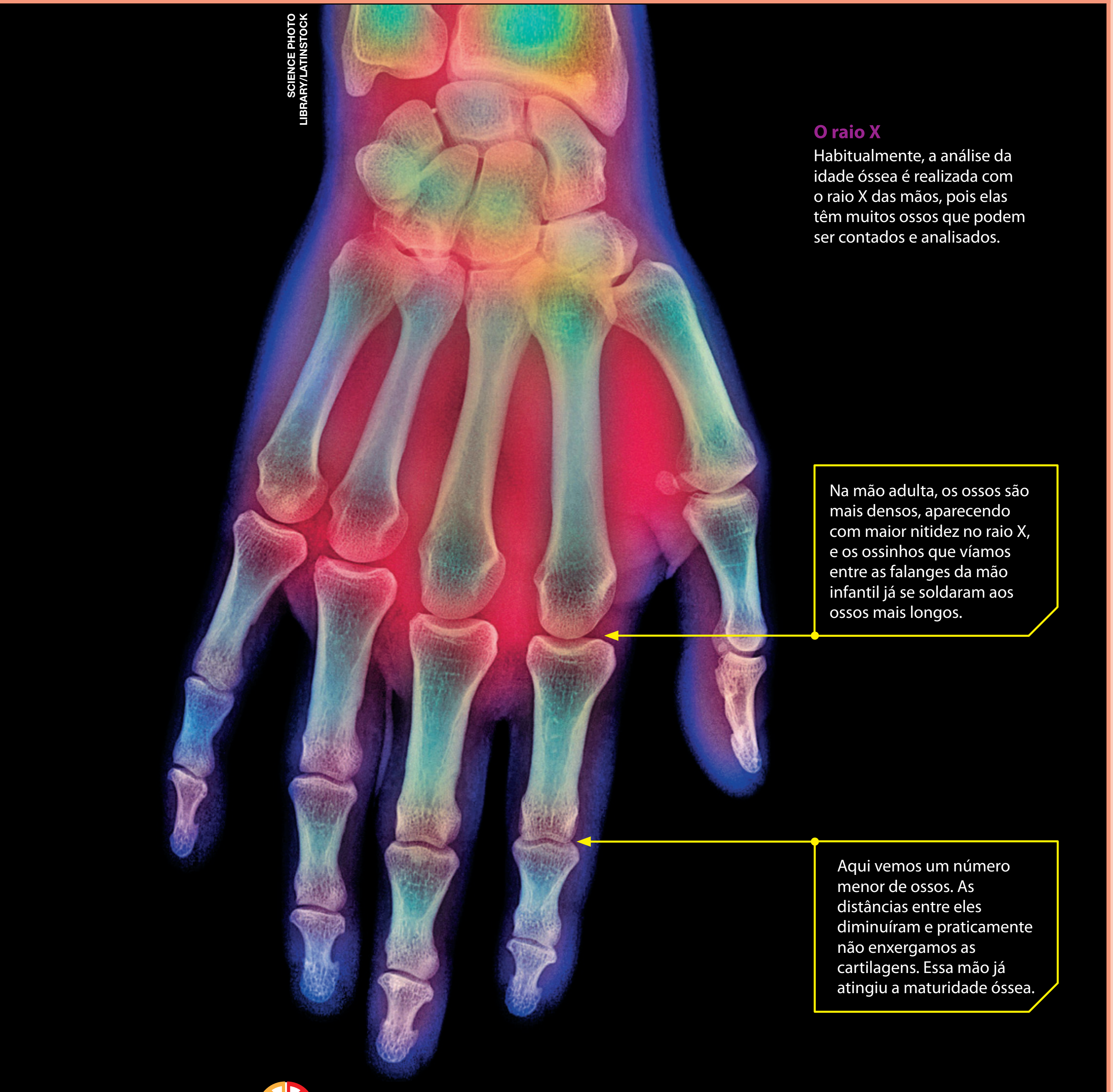
Em geral, eles crescem até os 18,6 anos e elas, até os 18. Mas adolescentes com idade óssea atrasada podem crescer até depois dos 20 anos.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Fonte: MARCONDES, Eduardo. Idade óssea em pediatria. *Revista Pediatria* (São Paulo). Disponível em: <www.pediatriasaopaulo.usp.br/upload/pdf/648.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2012.
Consultoria: Soraya Lopes Sader Milani, Endocrinologista Pediátrica com Doutorado em Baixa Estatura pela FMRP-USP.

1. Observando a idade óssea de uma pessoa, podemos perceber se seus ossos já completaram todo o processo de maturação, que deve corresponder à idade cronológica, ou seja, durante o processo de amadurecimento, ocorre a transformação do esqueleto, que resulta na estatura da pessoa.

2. Analisando as curvas, temos: dos 10 aos 12 anos, a curva de crescimento da menina é maior que a curva de crescimento do menino; a partir dos 12 anos, a curva de crescimento da menina é menor que a curva de crescimento do menino. Ou seja, até os 12 anos, as meninas,



SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

O raio X

Habitualmente, a análise da idade óssea é realizada com o raio X das mãos, pois elas têm muitos ossos que podem ser contados e analisados.

Na mão adulta, os ossos são mais densos, aparecendo com maior nitidez no raio X, e os ossinhos que víamos entre as falanges da mão infantil já se soldaram aos ossos mais longos.

Aqui vemos um número menor de ossos. As distâncias entre eles diminuíram e praticamente não enxergamos as cartilagens. Essa mão já atingiu a maturidade óssea.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. Que relação existe entre a idade óssea e a estatura de uma pessoa?
2. Observando o gráfico, percebemos que as curvas de crescimento de um menino e de uma menina são diferentes. Analise as curvas, pesquise e justifique as diferenças.
3. O gráfico apresenta, além das curvas de crescimento, algumas porcentagens.
   a) Qual é o significado desses valores?

3. a) As porcentagens apresentadas no gráfico indicam o percentual que a estatura do adolescente representa em relação à sua estatura quando adulto.

   b) Se com 10 anos um menino tem 1,36 m de altura e já atingiu 78,4% de sua estatura futura, qual será a altura desse menino quando tiver 16 anos, sabendo que, nessa idade, ele já terá atingido 98,2% da sua estatura quando adulto? Qual será sua provável altura quando chegar à fase adulta? 1,70 m; 1,73 m

4. Existem fatores ambientais que podem alterar o processo do crescimento físico? Cite alguns.

geralmente, são mais altas que os meninos, que, aos 13 anos, entram em uma fase de crescimento acelerado. Essa diferença acontece principalmente em função do desenvolvimento sexual, ou seja, as meninas sofrem os efeitos da puberdade antes dos meninos, o que interfere no crescimento.

4. Sim; a alimentação, a saúde, a higiene, a habitação e os cuidados gerais com a criança podem acelerar ou retardar o processo de crescimento.

Capítulo 4

Função afim

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Baiana vendendo comida típica no Pátio de Eventos Luiz Gonzaga, Caruaru, PE, 2015.

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função afim.
- Resolver situações-problema que envolvam funções afins.
- Analisar o gráfico de uma função afim.
- Resolver inequações que envolvam funções afins.

1 Função afim

Todos os anos, Bruna participa de uma feira de comidas nordestinas. Para isso, ela separa os valores referentes aos ingredientes e à mão de obra, o que representa R$ 1.200,00. Por dia, o aluguel do espaço é de R$ 80,00. Considerando apenas os valores citados, quanto Bruna gastará se oferecer seus produtos durante 5 dias, período de duração da feira?

Nessa situação, temos um gasto fixo, correspondente aos ingredientes e à mão de obra, que independe da quantidade de dias em que ela estará na feira, e um gasto variável, correspondente ao número de dias. Assim, o gasto total de Bruna será composto dessas duas parcelas:

$$\text{Valor gasto} = \text{gasto fixo} + \text{valor total dos dias}$$

O valor a ser gasto na feira por 5 dias pode ser calculado da seguinte maneira:

$$1.200 + 5 \cdot 80 = 1.200 + 400 = 1.600$$

Portanto, Bruna gastará R$ 1.600,00 em cinco dias.

Percebemos que o valor $g(x)$ gasto na feira é função da quantidade x de dias. Assim:

$$g(x) = 1.200 + 80 \cdot x$$

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função afim.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

◆ Observação

Os números reais a e b são os **coeficientes** da função afim.

Exemplos

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, em que $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 5$.

b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -7x$, em que $a = -7$ e $b = 0$.

c) $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $m(x) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}x$, em que $a = \sqrt{3}$ e $b = -\sqrt{2}$.

d) $n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -5$, em que $a = 0$ e $b = -5$.

◆ Casos particulares de função afim

A função afim pode ser constante, se $a = 0$, ou polinomial do 1º grau, se $a \neq 0$.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função constante** quando existe um número real b tal que $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -13$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{7}$

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função polinomial do 1º grau** quando existem números reais a e b, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -11x + \sqrt{2}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}x$

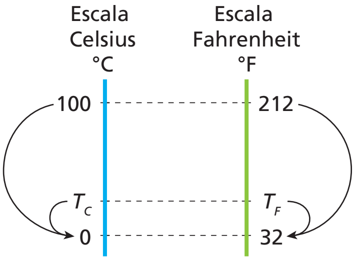
Uma função polinomial do 1º grau que tem o coeficiente $b = 0$ recebe o nome de **função linear**. Por exemplo, $f(x) = 3x$ e $g(x) = -6x$.

A função polinomial do 1º grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**. Nesse caso, temos $a = 1$ e $b = 0$.

Existem muitas situações que recaem em uma função afim. Acompanhe uma.

Uma revista de turismo dos EUA, onde a temperatura é medida na escala Fahrenheit, divulgou que a temperatura máxima atingida em um dia do verão italiano foi de 86 °F. Que temperatura era essa na escala Celsius?

Esse problema exige que trabalhemos com duas escalas termométricas, que se correspondem conforme o esquema ao lado.



ADILSON SECCO

Observe que 0 °C corresponde a 32 °F, e 100 °C correspondem a 212 °F. Sendo T_C a temperatura na escala Celsius e T_F a temperatura na escala Fahrenheit, vamos construir uma proporção relacionando essas duas escalas.

$$\frac{T_C - 0}{100 - 0} = \frac{T_F - 32}{212 - 32} \Rightarrow T_C = \frac{100(T_F - 32)}{180} \Rightarrow T_C = \frac{5(T_F - 32)}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_C = \frac{5}{9}T_F - \frac{160}{9} \text{ (lei de formação de uma função afim)}$$

Assim, para $T_F = 86$, temos: $T_C = \frac{5 \cdot 86}{9} - \frac{160}{9} = 30$

Portanto, 86 °F correspondem a 30 °C.

GIOVANNI BOSCHERINO/ALAMY/GLOW IMAGES

Praia de Tropea, litoral oeste da Calábria, Itália, 2015.

Exercícios resolvidos

R1. Dada a função afim g tal que $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$, calcular:

a) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ **b)** x, para $g(x) = 4$

▶ ***Resolução***

a) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{3}x - 1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 5 \Rightarrow x = 15$

R2. Dada uma função afim f, com $f(x) = ax + b$, e conhecidos $f(-1) = 7$ e $f(4) = 2$, determinar a lei de formação dessa função.

▶ ***Resolução***

Se $f(-1) = 7$, então, para $x = -1$, temos $f(x) = 7$.

$7 = a \cdot (-1) + b \Rightarrow -a + b = 7$ (I)

Se $f(4) = 2$, então, para $x = 4$, temos $f(x) = 2$.

$2 = a \cdot 4 + b \Rightarrow 4a + b = 2$ (II)

Para determinar os valores de a e b, basta resolver o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} -a + b = 7 \\ 4a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b = 28 \\ 4a + b = 2 \end{cases}$$
$$\overline{}$$
$$5b = 30 \Rightarrow b = 6$$

Vale a pena rever com os alunos os métodos de adição e de substituição para a resolução de sistemas lineares.

Substituindo b por 6 em (I), temos:

$-a + 6 = 7 \Rightarrow -a = 7 - 6 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$

Assim, a lei de formação dessa função é $f(x) = -x + 6$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

5. c) $f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$

1. Das funções abaixo, identifique quais são leis de funções afins. Nesses casos, determine o valor dos coeficientes a e b.

a) $g(x) = 2x + 4$ $a = 2$ e $b = 4$ **c)** $f(x) = -\sqrt{3}$ $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$

b) $i(x) = 2 + x^2$ Não é função afim.

- Por que algumas dessas funções não são afins?

A função i não é afim, porque não assume forma $ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Considerando a função f, dada por $f(x) = -3x + 1$, calcule:

a) $f(-2)$ 7 **c)** $f\left(\sqrt{2}\right)$ $-3\sqrt{2} + 1$

b) x, para $f(x) = 0$ $\frac{1}{3}$ **d)** x, para $f(x) = 19$ -6

- Para quais valores de x temos $f(x)$ maior que zero? E menor que zero?
- Você conhece alguma forma de representar essa função de maneira que possa estudá-la melhor?

Ver resolução no Guia do professor.

3. Determine o valor de a para que se tenha $f(3) = 8$ na função dada por $f(x) = ax + \frac{1}{2}$. $\frac{5}{2}$

4. Determine os valores de p e q para que a função j, dada por $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$, seja uma função identidade. $p = \pm\sqrt{2}$; $q = 3$

5. Em certa cidade, a assinatura residencial de uma linha telefônica custava R$ 34,50 e dava direito à utilização de 100 minutos mensais. Caso o consumidor excedesse os 100 minutos, ele pagaria R$ 0,08 por minuto excedente.

a) Quanto o consumidor pagaria por sua conta se utilizasse 82 minutos em um mês? E se utilizasse 300 minutos? R$ 34,50; R$ 50,50

b) Um consumidor pagou R$ 52,90 por sua conta telefônica. Quantos minutos esse consumidor usou? 330 minutos

c) Escreva no caderno a lei de formação da função que representa essa situação.

d) Se, em uma residência dessa cidade, havia três linhas telefônicas, qual era o valor mínimo gasto com telefone em um mês? R$ 103,50

6. Dada a função f, com $f(x) = 3x - 1$, determine:

a) $f(1) - f(0)$ 3 **c)** $f(3) - f(2)$ 3

b) $f(2) - f(1)$ 3 **d)** $f(4) - f(3)$ 3

- Observando os itens anteriores, identifique a variação que ocorre no valor de $f(x)$ quando é acrescentada uma unidade ao valor de x.
- Sem fazer contas, determine o valor de $f(28) - f(27)$.
- Refaça os itens anteriores para $g(x) = -3x - 1$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor do coeficiente de x na lei da função? De que forma?
- Que conclusão podemos estabelecer?

Ver resolução no Guia do professor.

7. A tabela a seguir apresenta alguns valores reais de x e os respectivos valores de $f(x)$ e $g(x)$ das funções afins f e g.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	3	5	7
$g(x)$	4	3	2	1	0

a) Considerando os valores apresentados na tabela, determine a lei de formação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$

b) Em um plano cartesiano, faça a representação gráfica dos pontos dados na tabela relativos à função f. Em seguida, elabore uma hipótese sobre como deve ser o gráfico de f, trace uma linha que passe pelos pontos obtidos e contemple sua hipótese. Ver resolução no Guia do professor.

c) Em outro plano cartesiano, faça o que se pede no item **b** para os dados relativos à função g. Ver resolução no Guia do professor.

d) Considerando os gráficos construídos nos itens **b** e **c**, que figura geométrica espera-se que seja empregada para representar graficamente uma função afim? uma reta

2 Gráfico da função afim

2.1 Taxa de variação

Dada uma função, podemos estudar seu comportamento analisando a relação entre a variação das imagens (Δy) e a variação dos respectivos elementos do domínio que as determinam (Δx), ou seja, podemos verificar como varia $f(x)$ atribuindo diferentes valores para x.

Como exemplo, vamos analisar o comportamento da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$.

Primeiro, escolhemos dois elementos do domínio e calculamos as respectivas imagens:

- Para $x_1 = 0$, temos $f(x_1) = y_1 = 1$.
- Para $x_2 = 1$, temos $f(x_2) = y_2 = -2$.

Em seguida, comparamos a variação entre as imagens obtidas com a variação dos respectivos elementos do domínio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-1}{1-0} = -3$$

Assim, o número -3 é a **taxa de variação** da função f no intervalo $[0, 1]$.

Agora, vamos calcular a taxa de variação dessa função em outro intervalo.

- Para $x_3 = -4$, temos $f(x_3) = y_3 = 13$.
- Para $x_4 = -2$, temos $f(x_4) = y_4 = 7$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{7-13}{-2-(-4)} = \frac{-6}{2} = -3$$

Percebemos que o número -3 é, novamente, a taxa de variação da função f no intervalo $[-4, -2]$.

Vamos calcular a taxa de variação em mais um intervalo.

Para $x_5 = -7$, temos $f(x_5) = y_5 = 22$.

Para $x_6 = \frac{1}{2}$, temos $f(x_6) = y_6 = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5} = \frac{-\frac{1}{2} - 22}{\frac{1}{2} - (-7)} = \frac{\frac{-45}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{-45}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{15} = -3$$

O número -3 é a taxa de variação da função f no intervalo $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$.

Observe que a taxa de variação da função f calculada nos intervalos $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$ e $[-4, -2]$ é a mesma calculada no intervalo $[0, 1]$.

Sabemos que uma função afim é definida por $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

Para $x = x_1$, temos $f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$.

Para $x = x_2$, temos $f(x_2) = y_2 = ax_2 + b$.

Para $x_1 \neq x_2$, temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Note que a taxa de variação não depende do intervalo escolhido; ela sempre vale a.

A taxa de variação de uma função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, é constante para qualquer intervalo do domínio e, numericamente, é igual ao coeficiente a.

O fato de a taxa de variação de uma função afim ser constante significa que para acréscimos iguais na variável x correspondem acréscimos iguais na variável $f(x)$.

◆ Observação

A lei de uma função afim pode ser escrita na forma $y = ax + b$. Essa sentença é chamada de **equação da reta** correspondente.

Veremos que o gráfico de uma função afim é uma reta.

◆ Reflita

- Será que, para qualquer intervalo do domínio dessa função, obtemos o valor -3?
- O que isso significa?

- Sim, em qualquer intervalo a taxa de variação é -3.
- Significa que a taxa de variação de uma função afim é constante para qualquer intervalo do domínio.

Comentário: Observe a conveniência de discutir com os alunos a demonstração, para essa função, da conclusão sobre a constância da taxa de variação. Para isso, atribuir a x valores x_2 e x_1 e depois calcular a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Se julgar oportuno, pedir aos alunos que calculem a taxa de variação em outros intervalos para que percebam que o valor obtido é sempre -3. Esse fato será verificado no exercício **R3**.

Exercício resolvido

R3. Verificar que a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$ é igual ao coeficiente de x, ou seja, -3.

▶ ***Resolução***

Consideremos x e $x + h$ (com $h \in \mathbb{R}^*$) dois elementos do domínio.

- $f(x) = -3x + 1$
- $f(x + h) = -3(x + h) + 1 = -3x - 3h + 1$

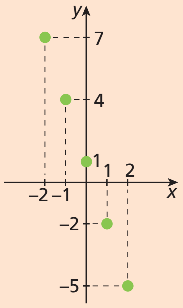
Assim: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \dfrac{-3x - 3h + 1 - (-3x + 1)}{h} =$

$= \dfrac{-3x - 3h + 1 + 3x - 1}{h} = \dfrac{-3h}{h} = -3$

Portanto, a taxa de variação da função de lei $f(x) = -3x + 1$ é -3.

Observe novamente que a taxa de variação encontrada (-3) é igual ao coeficiente a da função.

	$f(x) = -3x + 1$		
	x	$f(x)$	
	-2	7	
$+1$	-1	4	-3
	0	1	
$+2$	1	-2	-6
	2	-5	



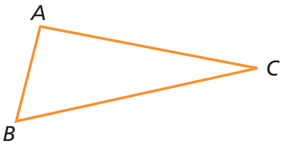
Quando o valor de x aumenta 1 unidade, o valor de $f(x)$ decresce 3 unidades; quando o valor de x aumenta 2 unidades, o valor de $f(x)$ decresce 6 unidades; e assim por diante.

2.2 Desigualdade triangular

Dados três pontos distintos, eles podem estar alinhados ou não: no primeiro caso, eles pertencem à mesma reta; no segundo, determinam um triângulo.

Em um triângulo, a medida de um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois. Observe:

- $AB < AC + BC$
- $BC < AB + AC$
- $AC < AB + BC$

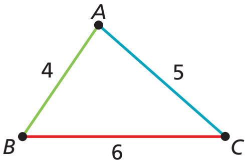


Desse modo, podemos considerar que dados três pontos, A, B e C, se as desigualdades entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, apresentadas acima, forem verificadas, então os três pontos determinam um triângulo e, portanto, não estão alinhados.

Exemplos

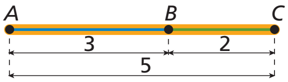
a) Dados os pontos A, B e C não alinhados, determinamos um triângulo cujos lados medem 4, 5 e 6. Analisando as medidas dos segmentos, percebemos que:

- $4 < 5 + 6$
- $5 < 4 + 6$
- $6 < 5 + 4$



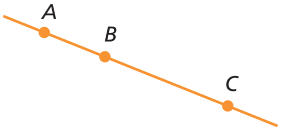
b) Dados os pontos A, B e C alinhados, obtemos segmentos que medem 2, 3 e 5. Analisando as medidas dos segmentos, percebemos que:

- $3 < 2 + 5$
- $2 < 3 + 5$
- $5 = 3 + 2$

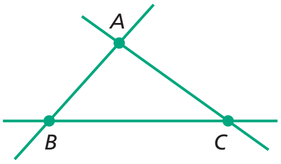


◆ **Observação**

- Três pontos distintos alinhados:



- Três pontos distintos não alinhados:



Note que, em ambos os casos, é possível obter três segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.3 A função afim e a reta

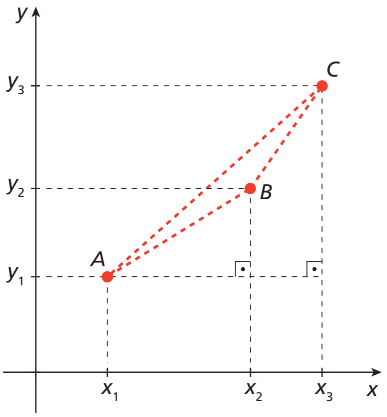
O gráfico de uma função afim é uma reta.

Demonstração

Seja a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Para provar que o gráfico dessa função é uma reta, devemos mostrar que três pontos distintos quaisquer do gráfico dessa função, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pertencem a uma mesma reta.

Vamos supor $x_1 < x_2 < x_3$.



ADILSON SECCO

Para mostrar que os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta, como vimos no exemplo **b** anterior, devemos mostrar que AC é igual a $AB + BC$.

Como o ponto A pertence ao gráfico de f, temos: $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$

Para o ponto B, temos: $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$

O ponto C também pertence ao gráfico de f, então: $y_3 = f(x_3) = ax_3 + b$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [ax_3 + b - (ax_1 + b)]^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - ax_1 - b)^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [a(x_3 - x_1)]^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2(1 + a^2)$$
$$\sqrt{(AC)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2(1 + a^2)}$$

Como $AC > 0$ e $x_3 - x_1 > 0$:

$$AC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Analogamente, aplicamos o teorema de Pitágoras para obter AB e BC:

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow AB = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$
$$(BC)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \Rightarrow BC = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

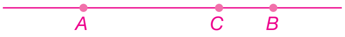
Assim:

$$AB + BC = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$
$$AB + BC = \left[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)\right]\sqrt{1 + a^2}$$
$$AB + BC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$
$$AB + BC = AC$$

Como $AB + BC = AC$, então A, B e C estão em uma mesma reta.

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta.

Não, os pontos podem estar alinhados, como os desta figura:



Verifica-se que $AC \neq AB + BC$ e, no entanto, os pontos A, B e C não determinam um triângulo.

◆ Reflita

Pode-se afirmar que, se $AC \neq AB + BC$, os pontos A, B e C não estão alinhados e, portanto, determinam um triângulo?

◆ Observação

Na função afim dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é chamado de **coeficiente angular**, e o termo constante b é chamado de **coeficiente linear** da reta que representa o gráfico da função f.

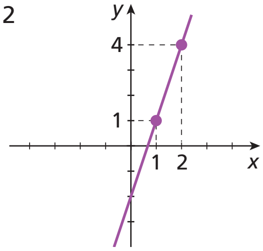
2.4 Construção do gráfico da função afim

Dois pontos distintos são suficientes para determinar uma reta. Então, com apenas dois pontos podemos determinar o gráfico de uma função polinomial do 1º grau.

Exemplos

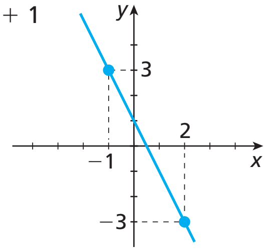
- $f(x) = 3x - 2$

x	$f(x)$
1	1
2	4



- $g(x) = -2x + 1$

x	$g(x)$
−1	3
2	−3



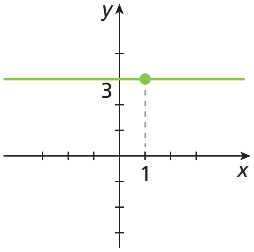
O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta oblíqua aos eixos x e y.

Como o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x, podemos determiná-lo conhecendo um único ponto.

Exemplos

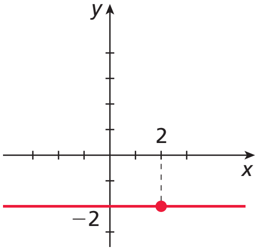
- $f(x) = 3$

x	$f(x)$
1	3



- $g(x) = -2$

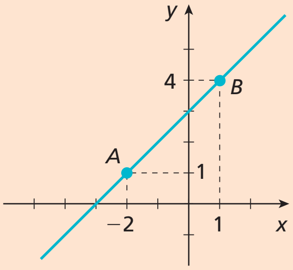
x	$g(x)$
2	−2



O gráfico da função constante $f(x) = 0$ coincide com o eixo x.

Exercícios resolvidos

R4. Dado o gráfico abaixo de uma função polinomial do 1º grau, determinar a lei de formação dessa função.



▸ *Resolução*

Vamos considerar $y = ax + b$ como sendo a lei da função.

Observamos as coordenadas de dois pontos do gráfico, nesse caso, A e B.

Como $A(-2, 1)$, então, para $x = -2$, temos $y = 1$.

Logo: $1 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow -2a + b = 1$ (I)

Como $B(1, 4)$, então, para $x = 1$, temos $y = 4$.

Logo: $4 = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = 4$ (II)

Agora, precisamos resolver o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 3$$

Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = x + 3$.

Espera-se que os alunos percebam que a função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$, não tem zeros, e que os zeros da função constante $f(x) = 0$ são todos os números reais. Caso os alunos tenham dificuldade, pedir que analisem o gráfico dessas funções.
No primeiro caso, o gráfico não intercepta o eixo x, e no segundo, o gráfico coincide com o eixo x.

Comentário: Observe que há duas intenções: levar o aluno a refletir sobre a abordagem assumida nesta obra, que é a associação entre Álgebra e Geometria; e levar o aluno, sempre que possível, a generalizar conscientemente suas conclusões. Essas intenções estão manifestas em outras atividades, seja em boxes *Reflita* ou em exercícios propostos.

◆ Reflita

Você já viu que os valores de x do domínio de f para os quais $f(x) = 0$ são chamados de zeros da função. Sabendo disso, quais são os zeros da função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$? E da função constante $f(x) = 0$?

◆ Reflita

- Qual é o valor de x no ponto em que o gráfico ao lado intercepta o eixo y?
- Qual é o ponto em que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$ intercepta o eixo y?

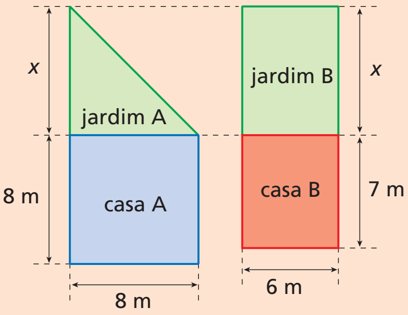
- Quando o gráfico intercepta o eixo y, temos $f(x) = 3$.
  Então, $x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$.
- O ponto em que o gráfico da função $f(x) = ax + b$ intercepta o eixo y é $(0, b)$.

Espera-se que os alunos percebam que, no ponto em que o gráfico de uma função f intercepta o eixo y, o valor de x é zero. Assim:
$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R5. Um arquiteto pretende construir duas casas com jardim, uma do lado da outra. Ao esboçar a planta com as duas casas vizinhas, ele teve dúvida quanto à medida de um dos lados de cada jardim, pois precisa construir as casas de modo que a área ocupada pela casa B e pelo jardim B seja maior que a área ocupada pela casa A e pelo jardim A.

Nessas condições, quais são os valores possíveis para x?



Espera-se que os alunos percebam que os gráficos de funções afins sem pontos comuns têm a mesma inclinação em relação ao eixo x. Portanto, correspondem a retas paralelas.

◆ Reflita

Gráficos de funções afins sem pontos comuns correspondem a retas paralelas?

▸ ***Resolução***

Vamos determinar as leis das funções que representam a área que cada casa e seu jardim ocupam em função da medida x.

Área ocupada pela casa A e pelo jardim A:

$$A_1 = 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x = 64 + 4x$$

Área ocupada pela casa B e pelo jardim B:

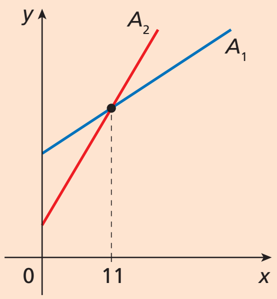
$$A_2 = 6 \cdot 7 + 6 \cdot x = 42 + 6x$$

Portanto, $A_1 = 4x + 64$ e $A_2 = 6x + 42$.

Para $A_1 = A_2$, temos $x = 11$, que é a abscissa do ponto de intersecção dos gráficos que representam A_1 e A_2.

Esboçando os gráficos, percebemos que A_2 é maior que A_1 quando $x > 11$, pois nesse intervalo o gráfico de A_2 está acima do gráfico de A_1.

Portanto, x tem de ser maior que 11 m.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

8. Construa o gráfico de cada uma das funções polinomiais do 1º grau. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$

c) $h(x) = -x + 2$

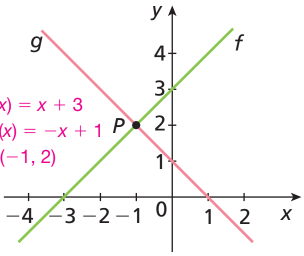
d) $i(x) = 5x - 4$

Responda:

- O que os gráficos das funções f e i têm em comum?
- E os gráficos das funções g e h?

9. Dê a lei de formação das funções polinomiais do 1º grau correspondentes às retas f e g, e encontre o ponto de intersecção dessas duas retas.

$f(x) = x + 3$
$g(x) = -x + 1$
$P(-1, 2)$



10. Em um mesmo plano cartesiano estão representados os gráficos de três funções. Sabe-se que duas das retas correspondentes a essas funções são paralelas, e a terceira reta é uma transversal que as intercepta. funções dos itens **b** e **d**

Se $f(x) = -2x + 3$ e $g(x) = 4x - 1$, diga quais das funções a seguir satisfazem a condição exposta.

a) $h(x) = 4$

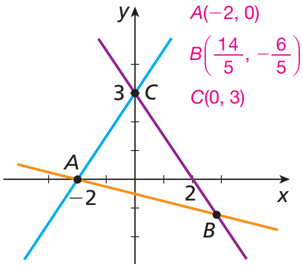
b) $i(x) = 4x + 6$

c) $m(x) = 2x - 3$

d) $p(x) = -2x + 2$

11. Observe o gráfico e dê as coordenadas de A, B e C, sabendo que a equação da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$$



$A(-2, 0)$
$B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$
$C(0, 3)$

12. Considere dois barris de 200 litros cada um. Um tem água até a metade de sua capacidade, e o outro tem 80 litros. Para encher o primeiro barril, utiliza-se uma torneira que escoa 20 litros de água por minuto; para encher o outro barril, utiliza-se uma torneira que escoa 40 litros de água por minuto. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, qual transbordará primeiro?
O barril que tem 80 litros.

13. Considere as funções polinomiais do 1º grau dadas por $f(x) = 3x$ e $g(x) = 3x - 1$.

- Diga o que as leis dessas funções têm em comum.
- Tente encontrar um ponto de intersecção das retas correspondentes a essas funções.
- Compare os gráficos de outras funções polinomiais do 1º grau que também tenham coeficiente angular 3, mas que diferem no coeficiente linear.
- Considerando os itens acima, o que você conclui?

Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.5 Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau

◆ Crescimento e decrescimento de uma função

Uma função polinomial do 1º grau, de lei $f(x) = ax + b$, pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor do coeficiente a da função.

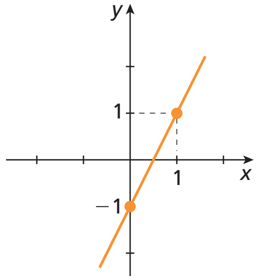
◆ Observação

Para uma função polinomial do 1º grau crescente, como a função f, a taxa de variação é positiva. No caso de uma função polinomial do 1º grau decrescente, como a função g, a taxa de variação é negativa.

Exemplos

- $f(x) = 2x - 1$ $(a > 0)$

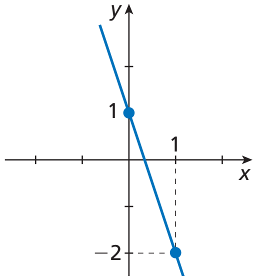
x	$f(x)$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3



Quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de $f(x)$ também aumentam. Portanto, a função f é **crescente**.

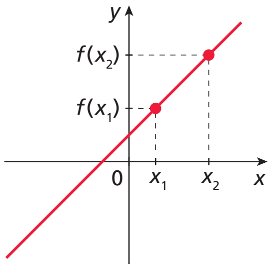
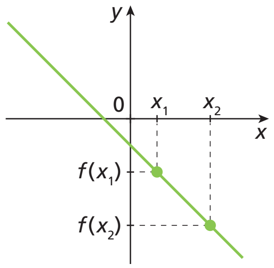
- $g(x) = -3x + 1$ $(a < 0)$

x	$g(x)$
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5



Quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de $g(x)$ diminuem. Portanto, a função g é **decrescente**.

De modo geral, temos:

Função crescente $(a > 0)$	Função decrescente $(a < 0)$
	
$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 > ax_1 \Rightarrow ax_2 + b > ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 < ax_1 \Rightarrow ax_2 + b < ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$

Exemplos

a) $f(x) = -\sqrt{2}\,x + 3$ é uma função decrescente, pois $-\sqrt{2} < 0$, ou seja, $a < 0$.

b) $g(x) = 0{,}5x - 2$ é uma função crescente, pois $0{,}5 > 0$, ou seja, $a > 0$.

Uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $b \in \mathbb{R}$ e $a = 0$, não é crescente nem decrescente. Nesse caso, a função é constante. Por exemplo, $h(x) = \pi$ é uma função constante, pois $a = 0$.

Exercício resolvido

R6. Dada a função afim de lei $f(x) = (-3 + m)x + 7$, discutir para que valores de m a função é crescente, decrescente ou constante.

▸ ***Resolução***

Observe que o coeficiente de x nessa função é $(-3 + m)$.

A função é crescente se: $-3 + m > 0 \Rightarrow m > 3$
A função é decrescente se: $-3 + m < 0 \Rightarrow m < 3$
} Nesses casos, temos uma função polinomial do 1º grau.

A função é constante se: $-3 + m = 0 \Rightarrow m = 3$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Zero da função polinomial do 1º grau

Vimos que zeros de uma função f são os números reais x para os quais $f(x) = 0$. Assim, o zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ é a raiz da equação do 1º grau $ax + b = 0$.

Para calcular o zero da função, devemos fazer:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

No gráfico, o zero de uma função polinomial do 1º grau é a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo x.

Intersecção da reta
- com o eixo y: ponto $(0, b)$
- com o eixo x: ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

Exemplo

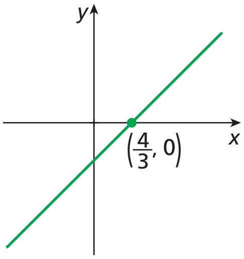
Vamos obter o zero da função f, dada por $f(x) = x - \frac{4}{3}$, e o ponto no qual a reta, que é seu gráfico, intercepta o eixo x.

Para isso, devemos resolver a seguinte equação:

$x - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ (zero da função)

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Como $a = 1$, f é uma função crescente.

Veja o gráfico ao lado.



Exercício resolvido

R7. Determinar o valor de m para que o gráfico da função j, com $j(x) = (-3 + 6m)x + 5$, intercepte o eixo x no ponto $(1, 0)$.

▸ ***Resolução***

Para $x = 1$, temos $j(x) = 0$.

Assim: $0 = (-3 + 6m) \cdot 1 + 5 \Rightarrow 6m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

Logo, para $m = -\frac{1}{3}$, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $(1, 0)$.

- Função identidade: $f(x) = x$
  Zero de f: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- O valor b, do termo constante da lei de formação da função f, é zero. Assim, o ponto em que o gráfico da função identidade intercepta o eixo y é $(0, 0)$, que é também o ponto em que o gráfico intercepta o eixo x.

◆ Reflita

- Qual é o zero da função identidade? $x = 0$
- Em que ponto o gráfico da função identidade corta os eixos x e y? $(0, 0)$

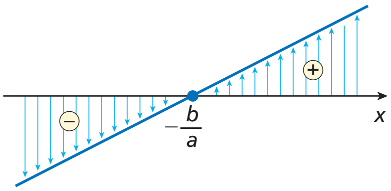
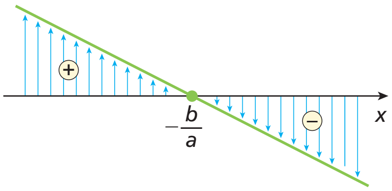
Estudo do sinal da função pelo gráfico

Para estudar o sinal da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$, temos de determinar para quais valores de x a função é positiva, nula ou negativa.

Podemos fazer esse estudo esboçando o gráfico da função. Para isso, analisamos se a função é crescente ou decrescente.

◆ Observação

Estudar o sinal de uma função significa determinar os valores de x para os quais seu gráfico está acima do eixo x, intercepta-o ou está abaixo dele.

Função crescente ($a > 0$)	Função decrescente ($a < 0$)
	
$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$	$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$

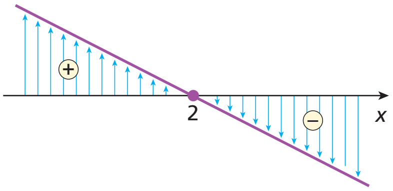
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exemplo

Vamos estudar o sinal da função polinomial do 1º grau f dada por $f(x) = -3x + 6$.

Primeiro, determinamos o zero de f: $-3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como o coeficiente de x é negativo, temos o esboço do gráfico ao lado.



Então, $f(x) = 0$ para $x = 2$; $f(x) > 0$ para $x < 2$ e $f(x) < 0$ para $x > 2$.

15. a) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{4}$; $f(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{4}$; $f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{4}$

b) $g(x) = 0$ para $x = 2$; $g(x) > 0$ para $x < 2$; $g(x) < 0$ para $x > 2$

20. b) A função é decrescente, porque a taxa de variação é negativa.

c) $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$

21. a) R$ 1.160,00 e R$ 1.040,00

b) $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$
$s_B(x) = 0{,}08x$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

14. Classifique cada função polinomial do 1º grau abaixo como crescente ou decrescente.

a) $f(x) = -5x + 2$ decrescente

b) $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$ crescente

c) $g(x) = x - \frac{3}{4}$ crescente

d) $f(x) = 1 - 2x$ decrescente

15. Estude o sinal das funções polinomiais do 1º grau dadas por:

a) $f(x) = 3x + \frac{3}{4}$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

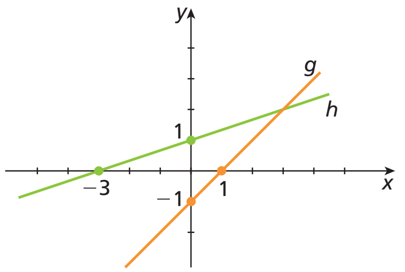
16. Determine a lei de formação de uma função polinomial do 1º grau sabendo que o zero da função é $-\frac{1}{2}$ e que o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y é $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

17. Dada a função de lei $f(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right)x + 7$, discuta para que valores de m a função é crescente e para que valores de m ela é decrescente.

A função é crescente para $m > \frac{1}{2}$ e decrescente para $m < \frac{1}{2}$.

18. Sabendo que o zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = (-5 + k)x - (3k - 2)$ é -4, verifique se f é crescente ou decrescente. decrescente

19. Observe o gráfico das funções afins g e h.



A função g, pois forma com o eixo x (sentido positivo) um ângulo maior.

a) Sem fazer cálculos, estime qual das funções tem maior taxa de variação. Justifique sua resposta.

b) Calcule o coeficiente angular das retas que são os gráficos de g e h. g: 1; h: $\frac{1}{3}$

c) Determine o coeficiente linear de cada uma das retas representadas no gráfico. g: −1; h: 1

d) Determine o ponto de intersecção das retas. (3, 2)

e) Para quais valores de x tem-se $h(x)$ menor que $g(x)$? $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

20. Sabendo que o zero de uma função polinomial do 1º grau f é 2 e $f(-1) = 4$, faça o que se pede.

a) Qual é a taxa de variação da função f? $-\frac{4}{3}$

b) A função f é crescente ou decrescente? Por quê?

c) Determine a lei de formação dessa função.

d) Esboce o gráfico de f. Ver resolução no Guia do professor.

21. Na época do Natal, a loja A oferece aos funcionários temporários, que trabalham 6 horas por dia, um salário fixo de R$ 900,00 mais uma comissão de 2% (em reais) sobre o total vendido; já a loja B não oferece salário fixo para o mesmo tipo de funcionário, mas paga 8% (em reais) de comissão sobre o total vendido.

a) Para um total de vendas de R$ 13.000,00, qual é o salário recebido na loja A? E na loja B?

b) Escreva a lei de formação das funções correspondentes ao salário recebido em cada uma das lojas pelo total de vendas.

c) Qual deve ser o total de vendas para que um funcionário da loja A receba R$ 1.600 de salário? E da loja B? loja A: R$ 35.000,00
loja B: R$ 20.000,00

d) A partir de que valor de vendas é mais vantajoso trabalhar na loja B? a partir de valores acima de R$ 15.000,00

22. Um marceneiro vende alguns modelos de armário para cozinha ao preço de R$ 450,00 a unidade. Ele gasta com matéria-prima um valor fixo mensal de R$ 2.250,00, além de R$ 75,00 de mão de obra por armário produzido.

a) Se forem vendidos 3 armários em um mês, o marceneiro terá lucro ou prejuízo? De quanto? prejuízo; de R$ 1.125,00

b) Escreva a lei de formação das funções: v, que relaciona o valor das vendas com o número x de armários vendidos; g, que relaciona o gasto na produção com o número x de armários produzidos; l, que relaciona o lucro obtido com o número x de armários vendidos.

c) Para não ter lucro nem prejuízo, quantos armários o marceneiro precisará vender em um mês? 6 armários

d) Quantos armários ele deve vender para ter lucro mensal de R$ 1.500,00? 10 armários

e) Qual será o lucro desse marceneiro com a venda de 15 desses armários? R$ 3.375,00

f) As funções v, g e l são afins? Justifique sua resposta. Não, porque o domínio dessas funções não é $\mathbb{R}$.

22. b) $v(x) = 450x$; $g(x) = 2.250 + 75x$; $l(x) = 375x - 2.250$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Resolução de situações-problema pelo gráfico da função

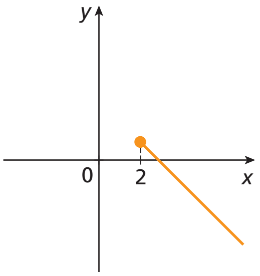
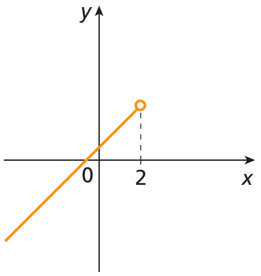
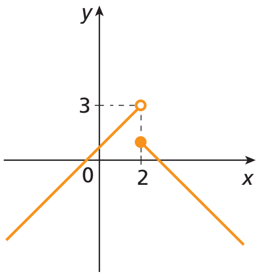
Em muitas situações-problema, usamos o gráfico de funções cujas leis são do tipo $y = ax + b$, com domínio restrito, ou seja, subconjuntos de $\mathbb{R}$ (distintos de $\mathbb{R}$). Vamos analisar algumas dessas situações por meio de exemplos.

Exemplos

a) Vamos escrever o domínio e o conjunto imagem da função:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, \text{ se } x \geqslant 2 \\ x + 1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

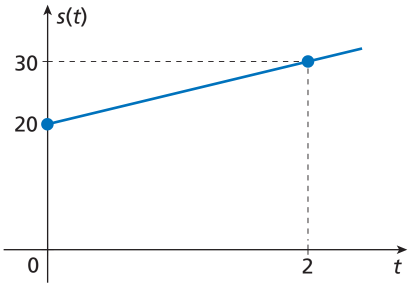
Para isso, vamos construir o gráfico de f por partes.

Primeiro, construímos o gráfico de f para $x \geqslant 2$.	Em seguida, construímos o gráfico de f para $x < 2$.	Finalmente, construímos o gráfico de f.
		
Para $x \geqslant 2$, o gráfico da função f segue a lei $y = 3 - x$.	Para $x < 2$, o gráfico da função f segue a lei $y = x + 1$.	Para $x \geqslant 2$, o gráfico de f está contido na reta $y = 3 - x$ e, para $x < 2$, na reta $y = x + 1$.

Observando o gráfico, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 3\}$.

b) O movimento uniforme caracteriza-se pela velocidade constante e diferente de zero de dado automóvel. Por esse motivo, o espaço percorrido em intervalos de tempos iguais é sempre o mesmo. Assim, a função horária desse movimento é dada pela lei $s(t) = s_0 + v \cdot t$, em que $s(t)$ é a posição (em metro) do automóvel no instante t (em segundo); s_0 é o espaço inicial quando $t = 0$ segundo; e v é a velocidade constante (em metro por segundo).

Observando o gráfico abaixo, vamos resolver algumas questões.



- Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico?
  Observando o gráfico, percebemos que $s_0 = 20$ m; então, $s(t) = 20 + vt$.
  Como $s(2) = 30$, temos: $20 + 2v = 30 \Rightarrow v = 5$
  Assim, a função horária do movimento é: $s(t) = 20 + 5t$
- Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?
  Observando o gráfico, temos $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 20\}$.
- Qual será a posição do automóvel após 10 segundos?
  Para $t = 10$, temos: $s(10) = 20 + 5 \cdot 10 \Rightarrow s(10) = 70$
  Portanto, após 10 segundos o automóvel estará na posição 70 metros.
- Após quanto tempo o automóvel estará na posição 120 metros?
  Para $s(t) = 120$, temos: $20 + 5t = 120 \Rightarrow t = 20$
  Logo, após 20 segundos o automóvel estará na posição 120 metros.

◆ Observação

Para construir o gráfico do exemplo ao lado, adotamos escalas diferentes para os eixos vertical e horizontal, o que não invalida os dados usados para efetuar os cálculos necessários.

Avaliar a conveniência de citar que v é a taxa de variação do espaço percorrido Δs pelo tempo decorrido Δt.

Assim:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{(30 - 20)}{(2 - 0)} = 5$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução no Guia do professor.

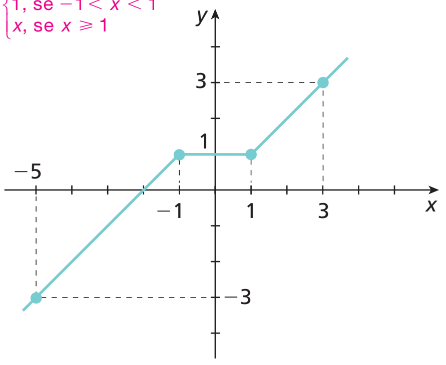
23. Construa o gráfico da função a seguir e, depois, identifique o conjunto imagem.

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ x, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

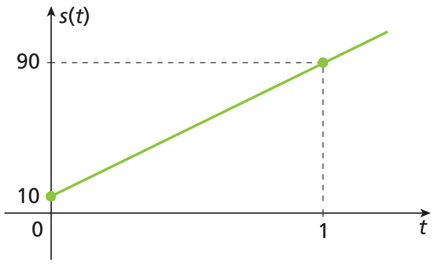
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ ou } y = 2\}$

24. Observe o gráfico e determine a lei de formação da função correspondente.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$



25. Considere o gráfico a seguir, que representa a posição (em quilômetro) de um carro em função do tempo (em hora).



a) Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico? $s(t) = 10 + 80t$

b) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função? $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $\text{Im}(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 10\}$

c) Qual será a posição do carro após 4 horas? 330 quilômetros

d) Após quanto tempo o carro estará na posição 250 quilômetros? 3 horas

26. Na casa de Isadora, o computador está com problema; por isso, ela precisará ir até uma *lan house* para acessar seus e-mails. Há duas opções: a *lan house* Tecnologia e a *lan house* Modernidade.

O quadro abaixo apresenta os valores cobrados em cada estabelecimento.

Tecnologia	Modernidade
até 30 minutos: R$ 3,00	até 30 minutos: R$ 2,50
até 60 minutos: R$ 6,00	até 60 minutos: R$ 5,00
hora excedente: R$ 8,00 (proporcional ao tempo)	hora excedente: R$ 7,00 (proporcional ao tempo)

Além do gasto com a internet, Isadora terá de pagar o transporte: R$ 7,00 (ida e volta) se for até a *lan house* Tecnologia e R$ 10,00 (ida e volta) se for até a *lan house* Modernidade.

a) Isadora usará a internet por 45 minutos. Quanto gastará se preferir a *lan house* Tecnologia? E se preferir a *lan house* Modernidade? R$ 13,00 e R$ 15,00

b) A partir de quantas horas é mais vantajoso Isadora usar a internet na *lan house* Modernidade em vez de na *lan house* Tecnologia? acima de 3 horas

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Inequações

3.1 Inequações do 1º grau

Toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo $ax + b$ (com $a \neq 0$) e o segundo membro é zero é chamada de **inequação do 1º grau** na incógnita x.

Exemplos

- $4x - 3 \geqslant 0$
- $8x > 0$
- $-\sqrt{7}x + 1 \leqslant 0$
- $-5x - 0{,}2 < 0$

Para resolver inequações, devemos conhecer os princípios de equivalência das desigualdades que envolvem adição e multiplicação de números reais.

Princípio aditivo de equivalência das desigualdades

Ao adicionar aos dois membros de uma desigualdade um mesmo número, obtemos outra desigualdade de mesmo sentido.

Exemplos

a) $-4 \underbrace{> -7 \Rightarrow -4 + 12 >}_{\text{sinal mantido}} -7 + 12 \Rightarrow 8 > 5$

b) $-2 \underbrace{< 3 \Rightarrow -2 + (-6) <}_{\text{sinal mantido}} 3 + (-6) \Rightarrow -8 < -3$

Princípio multiplicativo de equivalência das desigualdades

Ao multiplicar os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **positivo**, obtemos outra desigualdade de mesmo sentido.

Exemplos

a) $-12 \underbrace{< 8 \Rightarrow -12 \cdot 2 <}_{\text{sinal mantido}} 8 \cdot 2 \Rightarrow -24 < 16$

b) $21 \underbrace{> 15 \Rightarrow 21 \cdot \frac{1}{3} >}_{\text{sinal mantido}} 15 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 7 > 5$

Ao multiplicar os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **negativo**, obtemos outra desigualdade de sentido invertido.

Exemplos

a) $14 \underbrace{> 1 \Rightarrow 14 \cdot (-3) <}_{\text{sinal invertido}} 1 \cdot (-3) \Rightarrow -42 < -3$

b) $-32 \underbrace{< 64 \Rightarrow -32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) >}_{\text{sinal invertido}} 64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 16 > -32$

Exercícios resolvidos

R8. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $3(x + 2) \leqslant 2(2x + 4)$.

Resolução

$3(x + 2) \leqslant 2(2x + 4) \Rightarrow 3x + 6 \leqslant 4x + 8 \Rightarrow 3x - 4x \leqslant 8 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x \leqslant 2 \Rightarrow x \geqslant -2$

Logo, o conjunto solução da inequação é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$

R9. Determinar o conjunto solução da inequação $\frac{x + 4}{3} - \frac{3x + 2}{4} \geqslant 0$.

Resolução

$\frac{x + 4}{3} - \frac{3x + 2}{4} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{4(x + 4) - 3(3x + 2)}{12} \geqslant \frac{0}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 16 - 9x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow -5x + 10 \geqslant 0 \Rightarrow -5x \geqslant -10 \Rightarrow x \leqslant 2$

Assim, o conjunto solução da inequação é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

Observação

Para resolver o exercício **R8**, também usamos a propriedade distributiva da multiplicação.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

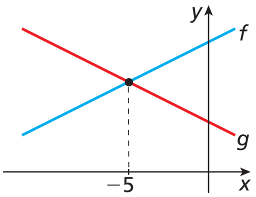
27. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a) $3x - 12 \leqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

b) $5(-x + 1) + 2(3x - 4) > -1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $\frac{-x + 3}{2} < \frac{2x + 5}{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$

28. Os gráficos de duas funções, f e g, estão representados no plano cartesiano abaixo.



Analisando o gráfico, resolva as questões a seguir.

a) Para qual valor de x tem-se $f(x) = g(x)$? $x = -5$

b) Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$? $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

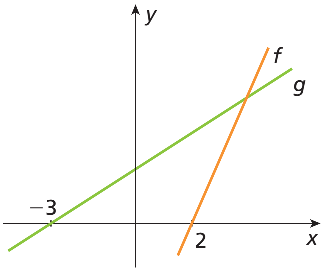
c) Determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

29. Em um mesmo plano cartesiano, utilizando um *software* específico, construa os gráficos das funções f e g dadas por $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

a) Analise os intervalos do domínio em que $f(x) < g(x)$.

b) Monte a inequação, resolva-a e compare a solução com sua análise dos gráficos. O que você conclui? Ver resolução no Guia do professor.

30. Considere a representação gráfica das funções f e g.



a) Para quais valores de x tem-se:

- $f(x) = 0$? $x = 2$
- $f(x) > 0$? $x > 2$
- $f(x) < 0$? $x < 2$

b) Determine os valores de x em que:

- $g(x) = 0$ $x = -3$
- $g(x) > 0$ $x > -3$
- $g(x) < 0$ $x < -3$

c) Considerando a função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, dê o sinal de h para os seguintes valores de x:

- $x < -3$ positiva
- $-3 < x < 2$ negativa
- $x > 2$ positiva

d) Encontre o conjunto solução da inequação $h(x) \geqslant 0$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

e) Com base nas respostas dos itens anteriores, elabore com um colega uma estratégia para resolver uma inequação do tipo $f(x) \cdot g(x) > 0$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

30. e) Espera-se que o aluno perceba que é necessário fazer o estudo do sinal de cada função e depois verificar o sinal do produto das duas funções nos intervalos definidos pelas raízes de cada uma delas. Em seguida, verifica-se qual dos intervalos satisfaz a inequação.

3.2 Inequação-produto e inequação-quociente

Agora, vamos estudar inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins.

Sendo f e g funções na variável real x, chamamos de **inequação-produto** as sentenças expressas por: $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

◆ Observação

O primeiro membro da inequação pode ser formado pelo produto de mais de duas funções.

Exemplos

a) $\left(\frac{1}{3} - 4x\right) \cdot (x - 1) > 0$

b) $(0{,}45x - 7) \cdot (8 - 2x) < 0$

c) $(89x + 1) \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right) \geqslant 0$

d) $(3x + 4) \cdot \left(x - \sqrt{11}\right) \cdot (5 - 2x) \leqslant 0$

Sendo f e g funções na variável real x, com $g(x) \neq 0$, chamamos de **inequação-quociente** as sentenças expressas por:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \text{ e } \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

Exemplos

a) $\frac{x + 7}{x} > 0$

b) $\frac{\sqrt{3}x}{x - 13} < 0$

c) $\frac{0{,}32x - 2}{x + 9} \geqslant 0$

d) $\frac{x}{23 - x} \leqslant 0$

Exercícios resolvidos

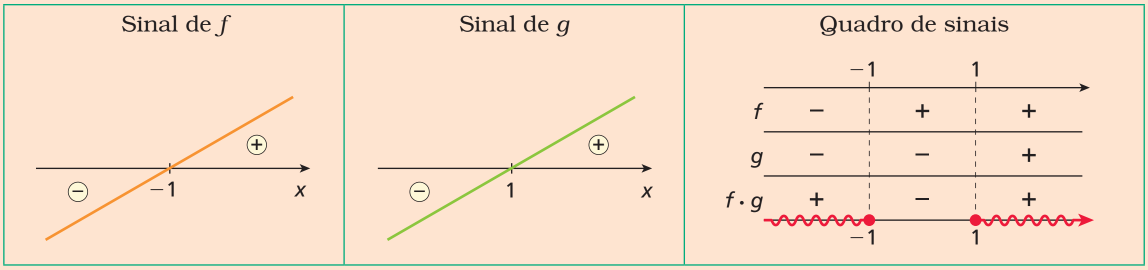
R10. Determinar, em $\mathbb{R}$, a solução da inequação $x^2 - 1 \geqslant 0$.

▸ ***Resolução***

Podemos fatorar a expressão $x^2 - 1$. Veja: $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

Assim, escrevemos essa inequação como a inequação-produto $(x + 1) \cdot (x - 1) \geqslant 0$.

Seja $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$. Para que o produto $f(x) \cdot g(x)$ seja positivo ou nulo, devemos ter $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ ou, então, $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$.


Sinal de *f*

Sinal de *g*

Quadro de sinais

Os valores de x que tornam o produto $(x + 1) \cdot (x - 1)$ maior ou igual a zero podem ser indicados pelo intervalo: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Logo, o conjunto solução da inequação $x^2 - 1 \geqslant 0$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

R11. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{2 - 5x}{x + 1} \leqslant -1$.

▸ ***Resolução***

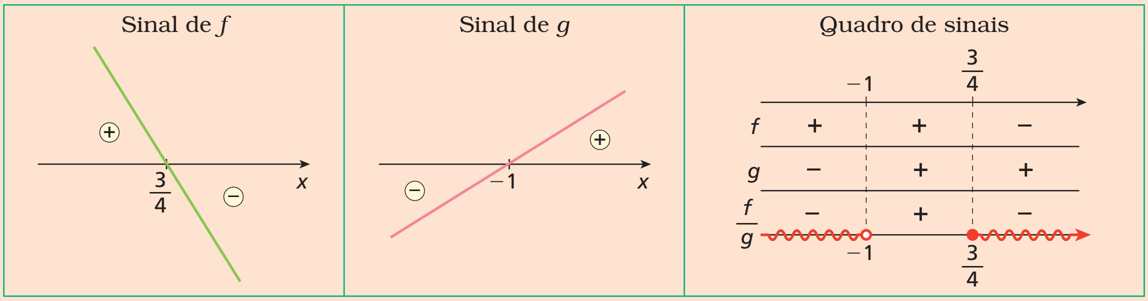
Essa inequação tem o segundo membro diferente de zero. Então, fazemos:

$$\frac{2 - 5x}{x + 1} \leqslant -1 \Rightarrow \frac{2 - 5x}{x + 1} + 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-4x + 3}{x + 1} \leqslant 0$$

Seja $f(x) = -4x + 3$ e $g(x) = x + 1$. Para que o quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ seja negativo ou nulo, devemos ter $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) < 0$ ou, então, $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) > 0$.

◆ **Observação**

Preste atenção para não cometer o erro de estudar os sinais das funções $y = 2 - 5x$ e $y = x + 1$. O quadro de sinais só pode ser usado quando a inequação-quociente tem o segundo membro igual a zero.


Sinal de *f*

Sinal de *g*

Quadro de sinais

Observe que -1 não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$.

Ou seja: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Os valores de x que tornam o quociente $\dfrac{-4x + 3}{x + 1}$ menor ou igual a zero podem ser indicados pelo intervalo: $]-\infty, -1[\cup \left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right[$

Logo, o conjunto solução da inequação é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant \frac{3}{4}\right\}.$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

31. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada inequação-produto e cada inequação-quociente.

a) $(x+2)\cdot\left(-\frac{1}{2}+3x\right)>0$

b) $\frac{x+7}{2-x}<0$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-7 \text{ ou } x>2\}$

c) $(x-5)\cdot(-x+3)\cdot(2x+1)\leqslant 0$

d) $-\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x+2}\geqslant -2$

e) $x^2-x-6<0$ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x<3\}$

32. (FGV) O maior número inteiro que satisfaz a inequação $\frac{5}{x-3}>3$ é: alternativa a

a) um múltiplo de 2.
b) um múltiplo de 5.
c) um número primo.
d) divisível por 3.
e) divisível por 7.

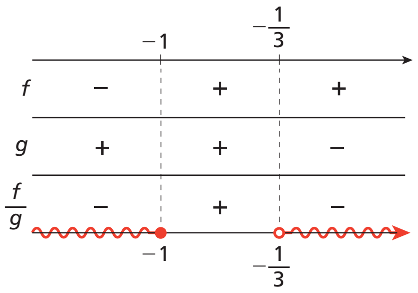
33. (PUC) Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a sentença $\frac{1}{x-20}\leqslant\frac{1}{12-x}$? alternativa b

a) Dezesseis.
b) Quinze.
c) Catorze.
d) Treze.
e) Menos de treze.

34. (Mackenzie-SP) Sendo $f(x)=x+2$ e $g(x)=-x+1$, a soma dos valores inteiros de x tais que $f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$ é: alternativa a

a) -2 **b)** -3 **c)** 0 **d)** 3 **e)** 2

35. Sabendo que f e g são funções afins, analise este quadro de sinais, usado para resolver uma inequação.



ADILSON SECCO

b) f é crescente e g é decrescente.

a) Qual é o zero da função f? E da função g? -1; $-\frac{1}{3}$

b) As funções f e g são crescentes ou decrescentes?

c) Esse quadro de sinais está sendo usado para resolver uma inequação-produto ou uma inequação-quociente? inequação-quociente

d) De acordo com esse quadro de sinais, qual é a solução da inequação? $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant -1 \text{ ou } x>-\frac{1}{3}\right\}$

e) A inequação $\frac{3x+3}{-3x-1}<0$ poderia ter a solução apresentada no quadro de sinais? Por quê?

f) Escreva uma inequação cuja solução seja a resposta apresentada no quadro de sinais. Apresente para os colegas a inequação que você encontrou e analise as inequações encontradas por eles. Há somente uma opção de resposta?

31. a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2 \text{ ou } x>\frac{1}{6}\right\}$ **c)** $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3 \text{ ou } x\geqslant 5\right\}$ **d)** $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2 \text{ ou } x\geqslant -\frac{3}{4}\right\}$

35. e) Não, pois $3\cdot(-1)+3=0$.

f) Resposta possível: $\frac{x+1}{-3x-1}\leqslant 0$

Espera-se que os alunos percebam que há várias inequações-quociente cuja solução é a apresentada no quadro de sinais, basta que f seja uma função afim crescente de zero igual a -1 e g seja uma função afim decrescente de zero igual a $-\frac{1}{3}$.

3.3 Inequações simultâneas

Inequações simultâneas são inequações apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações.

Exemplos

a) $\frac{1}{2}\leqslant 7x-2<3x+\sqrt{5}$

b) $\begin{cases}6x+(8+x)>9x-0{,}3\\ \sqrt{2}x-x\leqslant x+\frac{7}{5}\end{cases}$

Para resolver inequações desse tipo, devemos encontrar a solução de cada inequação e fazer a intersecção das soluções.

Exercícios resolvidos

R12. Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações: $\begin{cases}x-(3+2x)<4\\ 7x-x^2\geqslant -x(x-4)-9\end{cases}$

▶ ***Resolução***

Inicialmente, devemos resolver cada uma das inequações do sistema.

(I) $x-(3+2x)<4\Rightarrow x-3-2x<4\Rightarrow -x<7\Rightarrow x>-7$

Portanto, $S_{\text{I}}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>-7\}$.

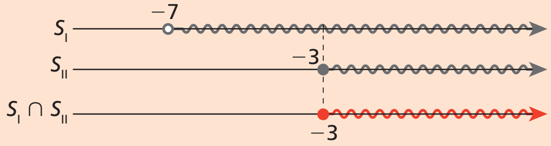
(II) $7x - x^2 \geqslant -x(x - 4) - 9$

$7x - x^2 \geqslant -x^2 + 4x - 9$

$3x \geqslant -9 \Rightarrow x \geqslant -3$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

Agora, faremos a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

R13. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $3 \leqslant 2x - 2 < x + 5$.

▸ ***Resolução***

Inicialmente, devemos determinar a solução das inequações:

$3 \leqslant 2x - 2$ (I) e

$2x - 2 < x + 5$ (II)

(I) $3 \leqslant 2x - 2 \Rightarrow 3 + 2 \leqslant 2x \Rightarrow 5 \leqslant 2x \Rightarrow$

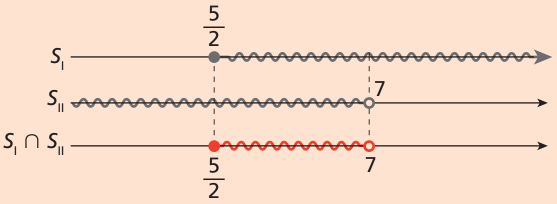
$\Rightarrow x \geqslant \dfrac{5}{2}$

Portanto, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{5}{2}\right\}$.

(II) $2x - 2 < x + 5 \Rightarrow 2x - x < 5 + 2 \Rightarrow x < 7$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$.

Agora, precisamos fazer a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



Logo, o conjunto solução da inequação é

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{5}{2} \leqslant x < 7\right\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

36. Encontre a solução das inequações em $\mathbb{R}$.

a) $5 \leqslant 3x - 4 < x + 2$ $S = \varnothing$

b) $\dfrac{3x}{5} \leqslant \dfrac{5x + 2}{4} \leqslant \dfrac{-x + 1}{2}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{10}{13} \leqslant x \leqslant 0\right\}$

c) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ 4x - 7 \leqslant x - 4 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

d) $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leqslant 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

37. Uma empresa de planos de saúde está lançando duas novas modalidades de planos:

- Plano Azul: valor fixo anual de R$ 140,00 mais R$ 50,00 por consulta realizada no decorrer do ano. O usuário terá direito a até 20 consultas anuais.
- Plano Laranja: valor fixo anual de R$ 220,00 mais R$ 40,00 por consulta realizada no decorrer do ano. O usuário terá direito a até 60 consultas anuais.

a) Escreva uma lei matemática que represente o valor total pago por uma pessoa que usa o Plano Azul em função do número de consultas realizadas nesse período. $140 + 50x$

b) Refaça o item anterior considerando uma pessoa que utiliza o Plano Laranja. $220 + 40x$

c) Calcule a quantidade de consultas que devem ser realizadas no decorrer de um ano para que o valor total pago seja o mesmo para ambos os planos. 8 consultas

d) Considerando que o número anual de consultas efetuadas por uma pessoa possa ser expresso pela inequação $8 < x < 18$, em que x é o número de consultas, identifique qual dos planos é mais vantajoso para essa pessoa. Plano Laranja

e) Se o número x de consultas realizadas por uma pessoa em um ano pode ser representado pela inequação $4 < x < 7$, verifique qual dos planos é mais vantajoso nesse caso. Plano Azul

38. Um agricultor tem um terreno e duas opções: plantar soja ou plantar feijão. O gasto com a plantação de soja será R$ 10.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, R$ 2,00. Já o gasto com a plantação de feijão será R$ 12.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, R$ 3,00.

a) Que lei de formação dá o valor $V_s(x)$ obtido na produção de soja em função do número x de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação.

b) Que lei de formação dá o valor $V_f(x)$ obtido na produção de feijão em função do número x de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação. $V_f(x) = 3x - 12.000$ **a)** $V_s(x) = 2x - 10.000$

c) Para quantos quilogramas teremos $V_s(x) = V_f(x)$? 2.000 quilogramas

d) Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema: $\begin{cases} V_s(x) > V_f(x) \\ V_s(x) < V_f(x) \end{cases}$ $S = \varnothing$

e) Se o agricultor pretende produzir 10.000 quilogramas, em qual das duas culturas (soja ou feijão) ele terá mais lucro? cultura de feijão

f) Que quantidade mínima, em quilograma, esse agricultor precisa produzir para que seja mais vantajoso plantar feijão? 2.001 quilogramas

3.4 Identificação do domínio de uma função por meio de inequações

Algumas funções reais não têm como domínio o conjunto ℝ. Pela natureza de suas leis, apresentam restrição de valores, tendo como domínio um subconjunto de ℝ (distinto de ℝ).

Para identificar o domínio de algumas dessas funções, podemos aplicar o estudo das inequações.

Exercícios resolvidos

R14. Identificar o domínio da função dada por $y = \dfrac{1}{x+1}$.

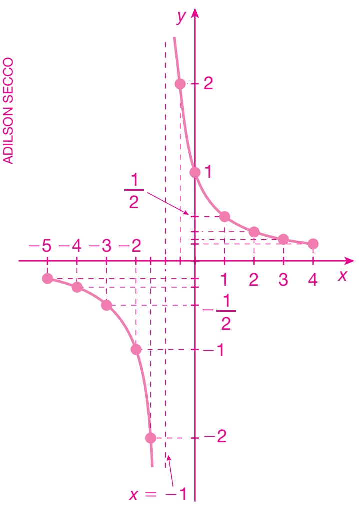
▸ ***Resolução***

Como o denominador de uma fração não pode ser nulo, devemos ter:

$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

$y = \dfrac{1}{x+1}$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$



ADILSON SECCO

Comentário: Espera-se que os alunos percebam que o gráfico investigado não intercepta a reta $x = -1$ nem intercepta o eixo x.

◆ Reflita

Investigue como seria o gráfico da função dada por: $y = \dfrac{1}{x+1}$

(*Dica*: Ao esboçar o gráfico, considere o domínio da função e atribua valores para x.)

R15. Determinar o domínio da função h, dada por $h(x) = \sqrt{\dfrac{2x-2}{x-7}}$.

▸ ***Resolução***

Como o denominador de expressões fracionárias não pode ser nulo e o radicando não pode ser negativo, devemos ter:

$$\frac{\overbrace{2x-2}^{f(x)}}{\underbrace{x-7}_{g(x)}} \geqslant 0 \text{ e } x - 7 \neq 0$$

Inicialmente, vamos resolver a inequação-quociente.

Para $f(x) = 0$, temos:

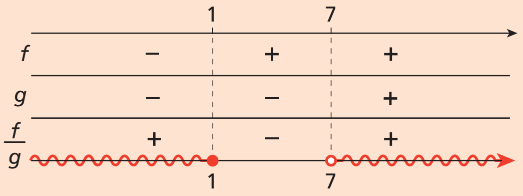
$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Como a função f é crescente, concluímos que $f(x) > 0$ para $x > 1$ e $f(x) < 0$ para $x < 1$.

Para $g(x) = 0$, temos:

$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

Como a função g é crescente, concluímos que $g(x) > 0$ para $x > 7$ e $g(x) < 0$ para $x < 7$.



ADILSON SECCO

Para obter o domínio da função h, temos de excluir o valor de x que anula o denominador, ou seja, excluímos o número 7, pois, para $x = 7$, temos $x - 7 = 0$.

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x > 7\}$.

Espera-se que os alunos percebam que $x - 7$ tem de ser diferente de zero, mas que $2x - 2$ pode ser zero.

Dessa maneira, $\dfrac{2x-2}{x-7}$ pode ser zero.

Então, devemos considerar $\dfrac{2x-2}{x-7} \geqslant 0$ e $x - 7 \neq 0$.

◆ Reflita

Por que, no exercício **R15**, não é possível dizer que o domínio pode ser obtido diretamente pela resolução da inequação $\dfrac{2x-2}{x-7} > 0$?

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno

39. Encontre o domínio das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $j(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$ $D(j) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{-2x+3}{\sqrt{1-x}}$

d) $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

e) $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\dfrac{1}{2}\right\}$ **c)** $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

◆ Observação

Caso o índice da raiz seja ímpar, não há restrições quanto ao sinal do radicando. Por exemplo, o domínio da função f dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Dadas as funções abaixo, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, identifique as que são afins, coloque-as na forma $f(x) = ax + b$ e determine os números reais a e b.

a) $y = 5(x - 1) - 4(x - 3)$ $a = 1$ e $b = 7$

b) $y = \dfrac{1}{x}$ Não é função afim.

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ Não é função afim.

d) $f(x) = \dfrac{3 - x}{4}$ $a = -\dfrac{1}{4}$ e $b = \dfrac{3}{4}$

2. Se $f(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$, $p = 10^8$ e $q = 10^{10}$, determine o valor de $\dfrac{f(p) - f(q)}{q - p}$. $-\dfrac{2}{3}$

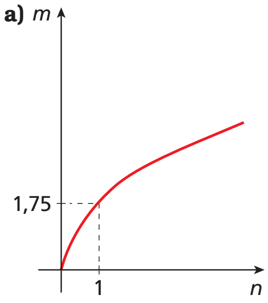
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

3. Seja f uma função afim definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio dessa função que produzem imagem no intervalo $[-3, 3]$.

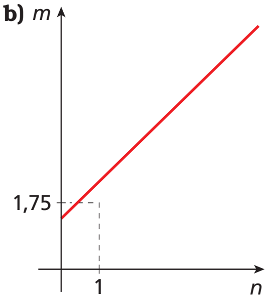
4. (Enem) As frutas que antes se compravam por dúzia, hoje em dia, podem ser compradas por quilograma, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R\$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é: alternativa e

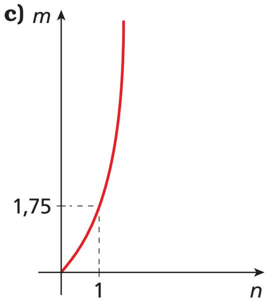
a)



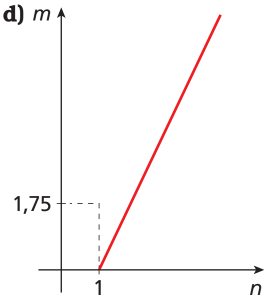
b)



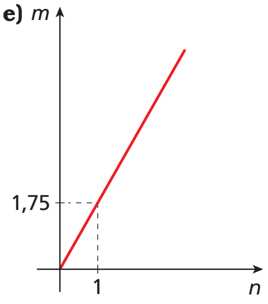
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5. b) decrescente **c)** $\left(\dfrac{3}{5}, 0\right)$ e $(0, 3)$ **e)** $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

5. Dada a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 - 5x$, responda às perguntas.

a) Que tipo de curva representa graficamente essa função? reta oblíqua aos eixos x e y

b) A função dada é crescente ou decrescente?

c) Qual é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo x? E com o eixo y?

d) Qual é o zero da função? $x = \dfrac{3}{5}$

e) Quais são o domínio e a imagem da função?

f) Qual é o ponto de intersecção do gráfico de f com o da função $g(x) = 2x - 4$? $P(1, -2)$

6. Determine a lei de uma função polinomial do 1º grau cujo gráfico passe pelos pontos $\left(-1, \dfrac{4}{3}\right)$ e $\left(-2, -\dfrac{5}{3}\right)$. $y = 3x + \dfrac{13}{3}$

7. Os pontos de intersecção das retas que representam as funções afins f, g e h determinam os vértices de um triângulo.

a) Quais são os vértices desse triângulo se $f(x) = -x + 3$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = 3$? $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(6, 3)$

b) Construa os gráficos dessas funções em um mesmo plano cartesiano. Ver resolução no Guia do professor.

c) Classifique as funções f, g e h em crescente, decrescente ou constante. f é decrescente, g é crescente e h é constante.

8. a) $y = 50 \cdot x$ **b)** 100 pagantes **c)** 400 frequentadores

8. O preço do ingresso de uma peça de teatro é R\$ 50,00, e o custo da apresentação de uma sessão é R\$ 5.000,00. Supondo não haver ingressos promocionais, responda às perguntas.

a) Que expressão relaciona o faturamento por sessão dessa peça com o número de ingressos vendidos?

b) Qual deve ser o número mínimo de pagantes para que uma apresentação não acarrete prejuízo?

c) Considerando quatro apresentações semanais, qual deve ser o número mínimo de frequentadores por semana para que não haja prejuízo?

d) Qual é o lucro máximo por sessão se o teatro tem 180 lugares? R\$ 4.000,00

9. Determine a imagem da função f dada por $f(x) = -2x + 3$, definida em $A = [-2, 4[$. Em seguida, construa seu gráfico. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leqslant 7\}$
Ver resolução no Guia do professor.

10. Faça um esboço dos gráficos das funções afins dadas em cada item, em um mesmo plano cartesiano. Em seguida, analise o que essas funções têm em comum. Se você quiser, utilize um *software* de construção de gráficos. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 3x - 1$ e $y_3 = 3x$

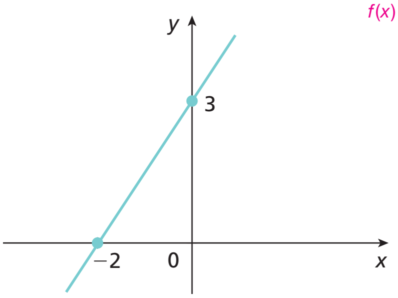
b) $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x + 1$ e $y_3 = -2x + 1$

c) $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x + 4$ e $y_3 = -x - 2$

Exercícios complementares

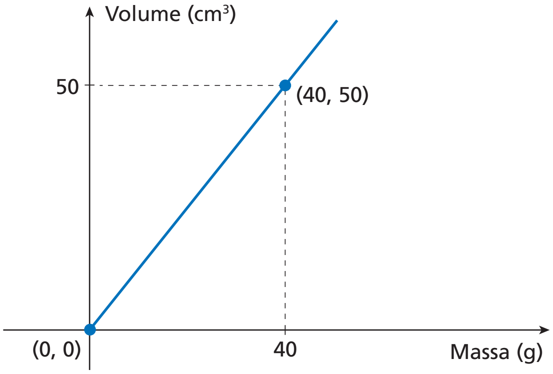
11. Determine a lei de formação da função cujo gráfico é:

$f(x) = \frac{3}{2}x + 3$



- O gráfico dessa função intercepta o gráfico da função afim dada por $g(x) = 2x$? Em caso afirmativo, quais são as coordenadas do ponto em que isso acontece? sim, no ponto $P(6, 12)$

12. (Vunesp) Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.

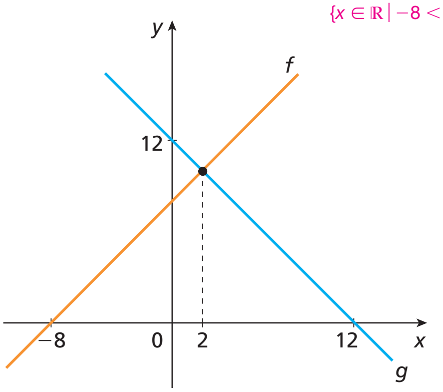


Com base nos dados do gráfico, determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico. $v(m) = \frac{5}{4}m$

b) qual é a massa (em grama) de 30 cm^3 de álcool. 24 g

13. Para que valores de x as funções f e g, representadas abaixo, são simultaneamente positivas e não nulas? $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$



14. (Enem) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por FT.

O lucro total (LT) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$. Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo? alternativa d

a) 0
b) 1
c) 3
d) 4
e) 5

15. Escreva o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{x}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{-2x + 3}}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < \frac{3}{2}\right\}$

16. (Fuvest-SP) Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora de uso, R$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$ 320,00. Considere um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é: alternativa c

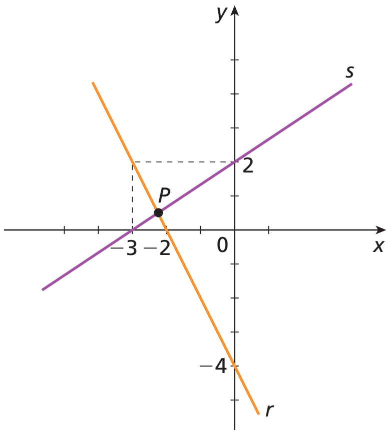
a) 25
b) 26
c) 27
d) 28
e) 29

17. f é positiva para $x > 0$, se $p > -\frac{3}{2}$
f é positiva para $x < 0$, se $p < -\frac{3}{2}$

Aprofundamento

17. Dada a função $f(x) = (2p + 3)x$, quais são os valores de p para que f seja positiva?

18. Determine as coordenadas do ponto P. $P\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$



19. (Mackenzie-SP) Os gráficos de $y = x - 1$ e $y = 2$ definem com os eixos uma região de área: alternativa c

a) 6
b) $\frac{5}{2}$
c) 4
d) 3
e) $\frac{7}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. A sentença ▬ é a lei de uma função afim. alternativa b

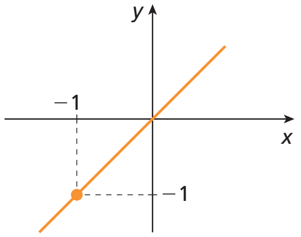
a) $f(x) = 1 - x^2$
b) $f(x) = -5 + x$
c) $f(x) = \sqrt{x} + 3$
d) $f(x) = x^3$

2. O valor a ser pago por uma mercadoria de valor m, após um desconto de 15%, pode ser dado por: alternativa b

a) $f(m) = m - 0{,}15$
b) $f(m) = 0{,}85m$
c) $f(m) = -0{,}15m$
d) $f(x) = 1{,}15m$

3. O gráfico abaixo não representa: alternativa a

a) uma função constante.
b) uma função identidade.
c) uma função polinomial do 1º grau.
d) uma função linear.



4. Considere as funções afins $f(x) = x - 1$ e $g(x) = -1$. As retas correspondentes a essas funções: alternativa c

a) são paralelas.
b) passam pela origem.
c) são concorrentes.
d) são paralelas ao eixo x.

5. A transportadora Vaptvupt cobra R\$ 10,00 mais R\$ 1,00 por quilômetro rodado para fazer uma entrega. Já a transportadora Ligeirinho cobra R\$ 0,75 por quilômetro rodado e uma taxa fixa de R\$ 15,00. Se x é o número de quilômetros rodados, então podemos dizer que a Vaptvupt cobra menos que a Ligeirinho no intervalo: alternativa d

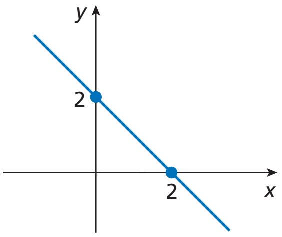
a) $15 \leqslant x < 25$
b) $x \leqslant 15$
c) $x > 20$
d) $x < 20$

6. O zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ e as coordenadas do ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo y são, respectivamente: alternativa a

a) $-\frac{b}{a}$ e $(0, b)$
b) b e $(a, 0)$
c) $-\frac{b}{a}$ e $(a, 0)$
d) a e $(0, b)$

7. Os valores de x para os quais a função afim, representada pelo gráfico abaixo, é positiva são: alternativa b

a) $x > 2$
b) $x < 2$
c) $x > -2$
d) $x < -2$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. A solução da inequação $\frac{x-1}{x+2} \leqslant 2$ é: alternativa c

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x > -2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x \neq -2\}$

9. $S = \varnothing$ é solução da inequação: alternativa d

a) $(x + 1) \cdot (x - 1) > 0$
b) $\frac{(x+1)}{(x-1)} < 0$
c) $x + 2 > x + 1 > x$
d) $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

10. O domínio da função f, dada por $f(x) = \frac{1}{x+2}$, é ▬, e da função g, de lei $g(x) = \sqrt{x-3}$, é ▬. alternativa a

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$; $D(g) = \varnothing$
d) $D(f) = \varnothing$; $D(g) = \{3\}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar uma função afim.	X	X	X							
Resolver situações-problema que envolvam funções afins.		X			X					
Analisar o gráfico de uma função afim.			X	X		X	X			
Resolver inequações que envolvam funções afins.					X			X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	86 a 88	86 a 89	86 a 90 92 a 94	92 a 94	96 a 103	92 a 95	94 a 96	98 a 100	100 a 102	102

Pesquisa e ação

Coleta e análise de dados

A prática de atividades físicas contribui para o condicionamento físico e a saúde corporal, além de ser uma forma de entretenimento, pois permite conhecer novas pessoas, fazer novos amigos e se divertir.

Nesta seção, você participará de uma atividade física para coletar dados que serão usados na construção de gráficos de espaço (em metro) em função do tempo (em segundo).

NULLPLUS/GETTY IMAGES

Melhora na circulação sanguínea, fortalecimento do sistema imunológico, diminuição do estresse, melhora na coordenação dos movimentos e do equilíbrio e aumento da resistência dos ossos são alguns dos benefícios da prática regular da atividade física.

Procedimentos

1) Reúna-se a quatro colegas e dirijam-se à quadra de esportes da escola. Vocês vão precisar de cronômetro, fita métrica (ou trena) e fita-crepe (ou giz de lousa).

2) Antes de iniciar a atividade, vocês devem delimitar o espaço a ser percorrido. Sugerimos uma distância de aproximadamente 20 metros. Vocês podem demarcar essa medida utilizando a fita métrica ou a trena e, em seguida, marcar com a fita-crepe ou o giz.

3) Todos os integrantes do grupo devem percorrer exatamente a mesma distância. Mas as formas de percorrê-la devem variar: o primeiro aluno faz o percurso correndo; o segundo, andando; o terceiro, pulando; o quarto, caminhando de costas; o último, caminhando de lado. Todos devem manter a velocidade constante durante o percurso, ou seja, a velocidade de cada integrante deve ser a mesma do começo ao fim do trajeto. (*Dica*: Para tentar manter a velocidade constante, o ideal é começar a atividade – correr, andar, pular – antes do início delimitado para o trajeto.)

4) Para fazer o registro do tempo gasto do início ao fim do percurso delimitado no item **2**, é preciso utilizar o cronômetro. Não se esqueçam de que o percurso é fixo para todos, devendo a contagem do tempo começar a partir do ponto demarcado. Essa informação é muito importante para a elaboração dos gráficos que serão feitos após a parte prática da atividade.

5) Depois de coletar os dados da distância percorrida e do tempo gasto em cada atividade (correr, caminhar, pular, andar de costas, andar de lado), o grupo deve construir os gráficos. Como consideramos a velocidade constante, vamos usar a fórmula $s = s_0 + vt$, que é a lei de uma função, para construir o gráfico correspondente a cada integrante do grupo. Os gráficos deverão ser feitos, preferencialmente, em folhas de papel milimetrado.

6) Para identificar os gráficos, usam-se apenas números, ou seja, gráfico 1, gráfico 2, e assim sucessivamente.

7) Após a construção, os gráficos devem ser trocados entre os grupos. Nessa etapa, a tarefa é identificar o gráfico que corresponde a cada atividade praticada. Por exemplo, o grupo deve relacionar o gráfico 1, elaborado por outro grupo, à atividade de pular no decorrer do percurso.

8) Cada grupo vai apresentar suas escolhas para a turma e justificá-las. Nesse momento, o grupo que elaborou o gráfico deve confirmar se a relação (gráfico/atividade) está correta ou não.

9) Para finalizar, cada grupo deve entregar dois relatórios para o professor: um sobre a experiência de seu grupo, com todos os dados coletados, identificando a atividade desenvolvida por cada integrante e relatando os procedimentos para a construção dos gráficos, a velocidade média de cada integrante etc.; outro apresentando a análise dos gráficos elaborados pelo outro grupo.

Capítulo

5

Função quadrática

CULTURA/GETTY IMAGES

Um paraquedista pode chegar até 240 km/h em uma queda livre, se durante a queda ele abrir os braços e as pernas para estabilizar o salto.

1 Função quadrática

Essa e outras situações apresentadas neste capítulo permitem um trabalho interdisciplinar com Física. Se achar adequado, promover esse diálogo.

É chamado de *queda livre* o movimento na vertical que os corpos, soltos a partir do repouso, sofrem pela ação da gravidade, desprezando-se a resistência do ar. Um paraquedista, conhecendo seu tempo de queda livre — isto é, do momento em que salta da aeronave até o momento em que abre o paraquedas —, pode determinar a distância que percorreu por meio de uma função. A distância percorrida Δs (em metro) pelo paraquedista em queda livre, depois de um intervalo de tempo t (medido em segundo a partir do zero), pode ser modelada pela função $\Delta s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. A constante g corresponde à aceleração da gravidade, que, nas proximidades da superfície da Terra, vale aproximadamente 9,8 m/s^2. Assim, $\Delta s(t) = 4{,}9t^2$.

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função quadrática.

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função quadrática.
- Resolver situações-problema que envolvam funções quadráticas.
- Analisar o gráfico de uma função quadrática.
- Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.

◆ Observação

Os números reais *a*, *b* e *c* são os **coeficientes** da função quadrática.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando existem números reais *a*, *b* e *c*, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = 2x^2 + 3x - 15$, em que $a = 2$, $b = 3$ e $c = -15$.

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de lei $g(x) = -\dfrac{x^2}{4} + 5$, em que $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = 0$ e $c = 5$.

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $h(x) = -x + \sqrt{2}x^2$, em que $a = \sqrt{2}$, $b = -1$ e $c = 0$.

d) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de lei $i(x) = -\dfrac{3}{2}x^2$, em que $a = -\dfrac{3}{2}$, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe que as funções dadas pelas leis abaixo não são quadráticas, pois nenhuma dessas funções pode ser expressa por um polinômio do 2º grau.

- $f(x) = 10^x$
- $h(x) = \sqrt{x}$
- $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- $i(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$

Há várias situações para as quais é possível criar um modelo matemático, e muitas delas podem ser representadas por funções quadráticas.

Na situação do paraquedista, por exemplo, qual seria a distância percorrida por ele se o tempo de queda livre fosse de 15 s? E se esse tempo fosse de 20 s?

Considere a função $\Delta s(t) = 4{,}9t^2$.

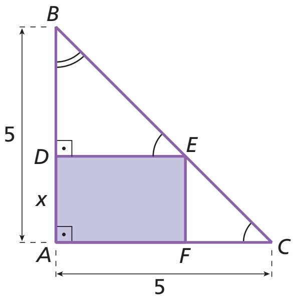
- Para $t = 15$, temos: $\Delta s(15) = 4{,}9 \cdot (15)^2 = 1.102{,}5$

  Após 15 s de queda livre, o paraquedista estava a 1.102,5 m de onde fez o salto.

- Para $t = 20$, temos: $\Delta s(20) = 4{,}9 \cdot (20)^2 = 1.960$

  Então, se o tempo de queda livre fosse de 20 s, o paraquedista estaria a 1.960 m do ponto em que saltou, ou seja, estaria mais próximo da superfície da Terra se comparado à distância com 15 s de queda livre.

Agora, observe uma situação de Geometria.



ADILSON SECCO

Um triângulo retângulo isósceles *ABC* tem catetos que medem 5 unidades de comprimento. Escolhe-se um ponto *E* qualquer sobre o segmento $\overline{BC}$ e constrói-se um retângulo *ADEF*, como mostra a figura ao lado.

É possível posicionar o ponto *E* em $\overline{BC}$ para que a área do retângulo *ADEF* seja 8 u.a. (unidades de área)?

Uma das formas de resolver esse problema é descrever a situação algebricamente. Vamos expressar a área do retângulo *ADEF* em função das medidas de seus lados.

Considerando *x* a medida do segmento $\overline{AD}$, o segmento $\overline{DB}$ mede $5 - x$.

Os triângulos *DBE* e *ABC* são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes congruentes. Dessa forma, temos dois triângulos retângulos isósceles e, portanto, o segmento $\overline{DE}$ também mede $5 - x$.

Assim, a área *A* do retângulo *ADEF* em função de *x* pode ser expressa por:

$A(x) = x \cdot (5 - x) = 5x - x^2$

Para verificar se o retângulo *ADEF* pode ter área 8 u.a., basta substituir $A(x)$ por 8 na lei e determinar o valor de *x* correspondente. Veja:

$8 = 5x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 5x - 8 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = -7$

Como $\Delta < 0$, não existe *x* real que satisfaça essa equação.

Podemos concluir que não é possível posicionar o ponto *E* em $\overline{BC}$ para que a área do retângulo seja 8 u.a.

◆ Observação

Para resolver uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, usamos a fórmula:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que

$\Delta = b^2 - 4ac$

Exercícios resolvidos

R1. Dada a função quadrática de lei $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2$, calcular:

a) $g\left(\frac{3}{4}\right)$

b) x para $g(x) = \frac{1}{2}$

Resolução

a) $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{21}{16}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{3} + x^2 = 0$

$x\left(\frac{1}{3} + x\right) = 0$

$x = 0$ ou $\frac{1}{3} + x = 0$

$x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$

R2. Seja f uma função quadrática em que $f(0) = 2$, $f(2) = 12$ e $f(-1) = 6$. Determinar a lei de formação dessa função.

Resolução

Sabe-se que a lei de uma função quadrática é $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dessa forma:

- Se $f(0) = 2$, temos:
  $2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 2 \quad \text{(I)}$
- Se $f(2) = 12$, temos:
  $12 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 12 \quad \text{(II)}$
- Se $f(-1) = 6$, temos:
  $6 = a(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow a - b + c = 6 \quad \text{(III)}$

Assim, obtemos um sistema de três equações com três incógnitas:

$$\begin{cases} c = 2 \text{ (I)} \\ 4a + 2b + c = 12 \text{ (II)} \\ a - b + c = 6 \text{ (III)} \end{cases}$$

Pela equação (I), temos $c = 2$.

Para determinar os valores de a e b, basta resolver o sistema formado pelas equações (II) e (III), substituindo c por 2:

$$\begin{cases} 4a + 2b + 2 = 12 \\ a - b + 2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Multiplicamos ambos os membros por 2.

$$\begin{cases} 4a + \cancel{2b} = 10 \\ 2a - \cancel{2b} = 8 \end{cases}$$
$$6a + 0 = 18 \Rightarrow a = 3$$

Substituindo a por 3 em $a - b = 4$, obtemos:

$3 - b = 4 \Rightarrow -b = 4 - 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$

Para escrever a lei de formação da função quadrática, substituímos os valores encontrados ($a = 3$, $b = -1$ e $c = 2$) na lei $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Assim, $f(x) = 3x^2 - x + 2$ é a lei de formação dessa função.

◆ Observação

O sistema de equações
$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$
poderia ser resolvido também pelo método da substituição.

R3. Para que valores reais de p a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)]x^2 - 4x + 8$ é quadrática?

Resolução

Para que a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)]x^2 - 4x + 8$ seja quadrática, de acordo com a definição, é necessário que o coeficiente do termo x^2 seja não nulo.

Dessa forma, é preciso que $(p - 3)(p + 5) \neq 0$.

Observe que $(p - 3)(p + 5)$ será diferente de zero quando ocorrerem simultaneamente as seguintes condições:

- $p - 3 \neq 0 \Rightarrow p \neq 3$
- $p + 5 \neq 0 \Rightarrow p \neq -5$

Assim, a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)]x^2 - 4x + 8$ é quadrática para $p \neq 3$ e $p \neq -5$, com $p \in \mathbb{R}$.

Espera-se que os alunos percebam que, se o coeficiente do termo x^2 for igual a zero, ou seja, se $f(x) = 0x^2 + bx + c$, então f será uma função afim, cuja lei pode ser representada por $f(x) = bx + c$.

◆ Reflita

Por que na definição de função quadrática o coeficiente do termo x^2 tem que ser diferente de zero?

1. a) $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$ **c)** Não é lei de uma função quadrática.
b) $a = 1$, $b = 0$ e $c = \sqrt{7}$ **d)** Não é lei de uma função quadrática.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Das leis de funções em $\mathbb{R}$ abaixo, identifique quais são leis de funções quadráticas e escreva o valor dos coeficientes a, b e c.

a) $g(x) = x^2 - x$
b) $h(x) = x^2 + \sqrt{7}$
c) $i(x) = \sqrt[3]{x} + 2$
d) $m(x) = (x - 20)^3$

2. Dada a função f, tal que $f(x) = -x^2 + 5x + 6$, calcule, quando possível:

a) $f(-1)$ 0
b) $f(\sqrt{2})$ $4 + 5\sqrt{2}$
c) $f\left(-\frac{4}{5}\right)$ $\frac{34}{25}$
d) x para $f(x) = 0$ $x = -1$ ou $x = 6$
e) x para $f(x) = \frac{49}{4}$ $\frac{5}{2}$
f) x para $f(x) = 20$ Não existe x real que satisfaça $f(x) = 20$.

- Analisando esses valores, é possível determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente? Ver resolução no Guia do professor.
- Na sua opinião, haveria uma forma de representar essa função que facilitasse sua análise?

3. Sabendo que f é uma função quadrática tal que $f(0) = -4$, $f(3) = 8$ e $f(-2) = 4$, calcule o valor de $f(-3)$. $\frac{64}{5}$

4. Que valores reais de p tornam as funções f e g quadráticas?

a) $f(x) = (2p - 3)x^2 + 7xp + 2$ $p \neq \frac{3}{2}$
b) $g(x) = [(3p + 5)(p + 7)]x^2 + 3x + 11$ $p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

5. Um grupo de estudo formou uma lista de discussão pela internet. O combinado foi que, depois de cada aula, os integrantes trocariam *e-mails* com as conclusões individuais sobre a aula e os mandariam para todos os integrantes da lista.

Todos cumpriram o combinado.

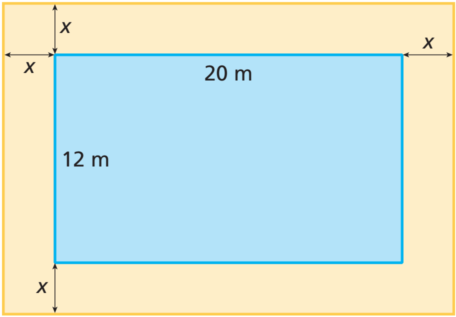
a) Se o grupo fosse formado por 2 pessoas, quantos *e-mails* seriam enviados após uma aula? E se o grupo fosse formado por 3 pessoas, quantos *e-mails* seriam enviados? E se fossem 4 pessoas? E se fossem 10? 2; 6; 12; 90

b) Construa um quadro com os resultados obtidos no item **a** e mostre como você calculou o número de *e-mails* para cada número de pessoas. Ver resolução no Guia do professor.

c) Encontre a expressão que determina o número de *e-mails* em função do número de pessoas do grupo. Sendo n o número de pessoas, o número de *e-mails* é $n(n - 1)$.

d) Calcule o número de integrantes do grupo sabendo que foram enviados 132 *e-mails* após uma aula. 12 integrantes

6. Uma piscina retangular foi planejada conforme a figura abaixo.



ADILSON SECCO

A área A do piso em volta dessa piscina depende da medida x escolhida. Faça o que se pede.

a) Qual é a lei de formação que expressa a área desse piso em função de x? $A = 4x^2 + 64x$

b) Calcule a área A, em metro quadrado, para x igual a 3 m. $A = 228\ \text{m}^2$

7. Em certa fase de um campeonato, os times jogaram turno e returno, ou seja, cada time jogou duas vezes com cada um dos outros times: uma partida no próprio campo e outra no campo do adversário. Sabendo que nessa fase houve 56 jogos, quantos eram os times? $x(x - 1) = 56$ 8 times

8. Qual é a sentença que determina o número d de diagonais de um polígono convexo de n lados? $d = \frac{n(n-1)}{2} - n$ ou $d = \frac{n(n-3)}{2}$

2 Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada **parábola**.

Quando representam uma função quadrática, as parábolas podem ter a abertura (**concavidade**) voltada para cima ou para baixo.

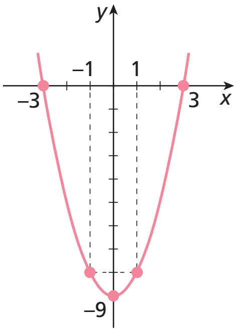
FUSE/GETTY IMAGES

Nem toda curva é uma parábola. Na foto, que mostra as crianças brincando de salto em altura, a curva que a corda descreve é denominada **catenária**.

Exemplos

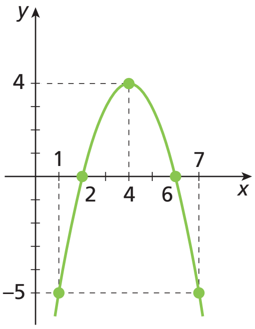
a) $f(x) = x^2 - 9$ $(a > 0)$

x	$y = f(x)$
-3	0
-1	-8
0	-9
1	-8
3	0



b) $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ $(a < 0)$

x	$y = g(x)$
1	-5
2	0
4	4
6	0
7	-5



Na prática, observamos o sinal do coeficiente a da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ para determinar o sentido da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, como no exemplo **a**, a parábola tem a concavidade voltada para **cima**.
- Se $a < 0$, como no exemplo **b**, a parábola tem a concavidade voltada para **baixo**.

2.1 Elementos da parábola

Em situações práticas, é útil identificar os seguintes elementos de uma parábola:

- o ponto em que ela intercepta o eixo y;
- os zeros da função que ela representa;
- o vértice.

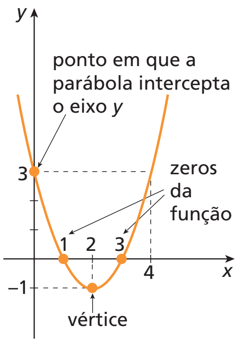
◆ Observação

Mais adiante, estudaremos cada um desses elementos, pois, com base neles, é possível construir o esboço do gráfico e analisar a função quadrática.

Exemplos

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

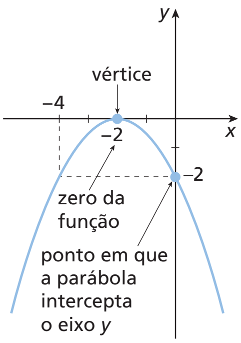
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	0	-1	0	3



- (0, 3) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- 1 e 3 são os zeros da função.
- O ponto $(2, -1)$ é o vértice.

b) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

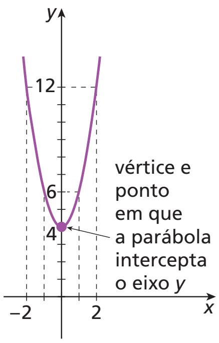
x	0	-2	-4
$h(x)$	-2	0	-2



- $(0, -2)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- -2 é o zero da função.
- O ponto $(-2, 0)$ é o vértice.

c) $j(x) = 2x^2 + 4$

x	0	1	-1	2	-2
$j(x)$	4	6	6	12	12



- (0, 4) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- Não há zeros da função.
- O ponto (0, 4) é o vértice.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R4. Seja f a função quadrática definida por $f(x) = (m - 3)x^2 + 2x - m$.

a) Analisar a concavidade da parábola que representa f em função de m.

b) Verificar se existe algum valor de m que faça o gráfico da função passar pelo ponto $(0, -3)$.

▸ *Resolução*

a) A concavidade da parábola depende do sinal do coeficiente a da função.

- Para a parábola ter a concavidade voltada para cima, o coeficiente de x^2 deve ser positivo:

  $m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3$

- Para a parábola ter a concavidade voltada para baixo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo:

  $m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$

b) Substituindo as coordenadas do ponto $(0, -3)$ na lei da função f dada, temos:

$-3 = (m - 3) \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - m \Rightarrow m = 3$

Mas, se $m = 3$, a função f não é quadrática, pois: $a = 3 - 3 = 0$

Portanto, não existe valor real para m tal que a parábola passe pelo ponto $(0, -3)$.

11. a) • se $k > 0$, a concavidade é voltada para cima;
• se $k < 0$, a concavidade é voltada para baixo.
b) • se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
• se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

9. Atribua valores para x e calcule a imagem correspondente. Em seguida, construa a parábola de cada função.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
b) $g(x) = -x^2 + 6x - 5$
c) $h(x) = x^2 + 4x + 4$
d) $i(x) = -x^2 + 4x - 4$
e) $j(x) = x^2 + 2x + 2$
f) $k(x) = -x^2 - 2x - 2$

- Agora, verifique em cada parábola se a concavidade está voltada para cima ou para baixo e determine o número de zeros de cada função.

Ver resolução no Guia do professor.

10. Analise a concavidade de cada parábola, conhecendo algumas características da função.

a) Os zeros da função são -20 e -10, e o vértice da parábola é $(-15, -10)$. concavidade voltada para cima

b) A função não tem zeros reais, e a intersecção do gráfico com o eixo y ocorre em $(0, -4)$.
concavidade voltada para baixo

11. Analise, em função de k, a concavidade das parábolas que representam as funções quadráticas cujas leis são dadas por:

a) $f(x) = kx^2 - 2x + 10$

b) $f(x) = \left(\dfrac{k - 5}{k + 1}\right)x^2 - 20$

12. Observe a tabela com alguns pontos do gráfico da função f dada por $f(x) = \dfrac{1}{100}x^2 - 2x + 2$.

x	$y = f(x)$
0	2
1	0,01
2	−1,96
3	−3,91
−1	4,01
−2	6,04
−3	8,09

a) Esses pontos são suficientes para traçar a parábola?

b) Determine mais três pontos para auxiliar na construção da parábola.

c) Explique como e por que você escolheu esses pontos.

d) Se você conhecesse os zeros da função, seria mais fácil construir essa parábola?

Ver resolução no Guia do professor.

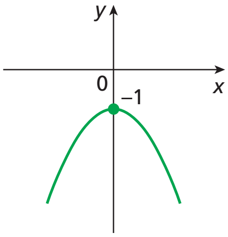
◆ Ponto em que a parábola intercepta o eixo *y*

Como vimos, o ponto em que a parábola intercepta o eixo *y* é um dos elementos importantes para seu estudo.

Considere a função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$. As coordenadas do ponto em que a parábola correspondente intercepta o eixo *y* são $(0, c)$.

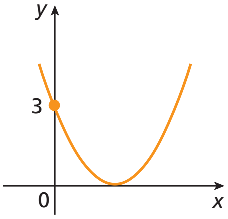
Exemplos

a) $f(x) = -x^2 - 1$



- A parábola intercepta o eixo *y* no ponto $(0, -1)$.
- A ordenada -1 desse ponto é o coeficiente *c* da função *f*.

b) $g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$



- A parábola intercepta o eixo *y* no ponto $(0, 3)$.
- A ordenada 3 desse ponto é o coeficiente *c* da função *g*.

◆ Reflita

Existe alguma função quadrática cujo gráfico não intercepta o eixo *y*? Explique sua resposta.

Não. Como o domínio de uma função quadrática é $\mathbb{R}$, o gráfico correspondente a essa função sempre intercepta o eixo *y*, pois o elemento 0 (abscissa do ponto em que o gráfico intercepta o eixo *y*) pertence a $\mathbb{R}$.

◆ Zeros da função

Os zeros da função também são valores importantes para a análise da parábola.

Já vimos que os zeros de uma função *f* são os números reais *x* para os quais temos $f(x) = 0$, ou seja, os zeros da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Para determinar essas raízes, podemos utilizar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

No gráfico, os zeros de uma função quadrática são as abscissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo *x*.

◆ Observação

Denominamos discriminante de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ o radical $b^2 - 4ac$, que é representado pela letra grega Δ.

Exemplos

a) Vamos verificar se a função *f* dada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo *x*.

Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

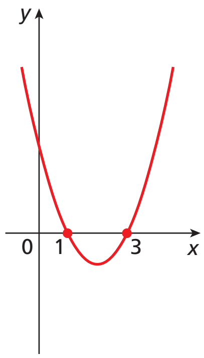
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Assim, os zeros da função são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo *x* em dois pontos: $(1, 0)$ e $(3, 0)$



A parábola pode interceptar o eixo *x* em:

- dois pontos (se $\Delta > 0$)
- um único ponto (se $\Delta = 0$)
- nenhum ponto (se $\Delta < 0$)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Quando a parábola intercepta o eixo x em um único ponto, dizemos que a parábola **tangencia** o eixo x.

b) Vamos verificar se a função f cuja lei é $f(x) = x^2 - 4x + 4$ tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo x.

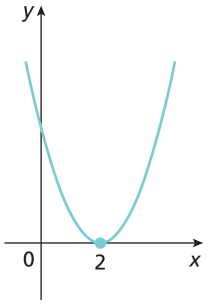
Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$ (zero real duplo da função)

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo x em um único ponto: (2, 0)



c) Vamos verificar se a função f, com $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo x.

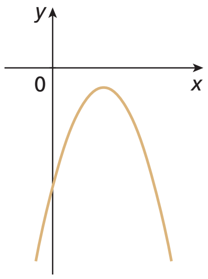
Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4$

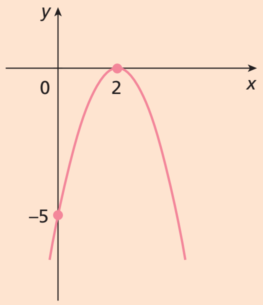
Como $\Delta < 0$, a equação $-x^2 + 4x - 5 = 0$ não tem raízes reais e, portanto, a função f não tem zeros reais.

Logo, o gráfico da função não intercepta o eixo x.



Exercícios resolvidos

R5. Determinar a lei da função quadrática correspondente ao gráfico a seguir.



▶ ***Resolução***

Observe que a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -5)$.

Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo

$f(x) = ax^2 + bx - 5$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Note também que a parábola intercepta o eixo x em um único ponto de coordenadas (2, 0). Isso significa que 2 é o zero real duplo da função.

Substituindo as coordenadas do ponto (2, 0) na lei da função, obtemos uma equação:

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5$

$0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5$

$4a + 2b - 5 = 0 \quad \text{(I)}$

Como a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto, temos $\Delta = 0$.

Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot (-5) = 0$

$b^2 = -20a$

$a = -\dfrac{b^2}{20} \quad \text{(II)}$

Substituindo a equação (II) na equação (I), temos:

$$4 \cdot \left(-\frac{b^2}{20}\right) + 2b - 5 = 0 \Rightarrow -\frac{b^2}{5} + 2b - 5 = 0$$

Resolvendo essa equação:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) = 0$$

$$b = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = 5$$

Pela equação (II), temos:

$$a = -\frac{5^2}{20} = -\frac{25}{20} = -\frac{5}{4}$$

Portanto, a lei da função é

$$f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5x - 5.$$

R6. Considerando a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 6x - k$, determinar para quais valores reais de k a função f:

a) tem dois zeros reais distintos.

b) tem um zero real duplo.

c) não tem zeros reais.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Resolução

Vamos calcular o discriminante da equação $2x^2 - 6x - k = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) = 36 + 8k$

a) Para que a função f tenha dois zeros reais distintos, o discriminante deve ser positivo ($\Delta > 0$).

Logo: $36 + 8k > 0 \Rightarrow k > -\dfrac{9}{2}$

b) Para que a função f tenha um zero real duplo, o discriminante deve ser nulo ($\Delta = 0$).

Logo: $36 + 8k = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{9}{2}$

c) Para que a função f não tenha zeros reais, o discriminante deve ser negativo ($\Delta < 0$).

Logo: $36 + 8k < 0 \Rightarrow k < -\dfrac{9}{2}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

13. Determine o ponto em que o gráfico de cada função intercepta o eixo y.

a) $f(x) = -2x^2 + x - 1$ $(0, -1)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$ $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$

c) $f(x) = x^2 + x$ $(0, 0)$

- Conhecer esse ponto facilita a construção do gráfico? Por quê? resposta pessoal

14. Obtenha, quando existir, os zeros reais das funções dadas por:

a) $g(x) = x^2 + 3x + 2$ -2 e -1

b) $g(x) = 2x^2 + x + 1$ Não existem zeros reais.

c) $g(x) = -9x^2 + 6x - 1$ $\dfrac{1}{3}$

- Conhecer os zeros da função facilita a construção do gráfico? Por quê? resposta pessoal

15. Calcule os valores reais de k para que as funções quadráticas não tenham zeros reais.

a) $h(x) = kx^2 - x + 25$ $k > \dfrac{1}{100}$

b) $h(x) = 2x^2 - 5x + k$ $k > \dfrac{25}{8}$

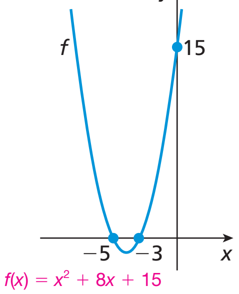
16. Dada a função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + 3$, encontre os valores de a e b para cada caso.

a) 1 e 3 são os zeros da função. $a = 1$ e $b = -4$

b) -1 e -3 são os zeros da função. $a = 1$ e $b = 4$

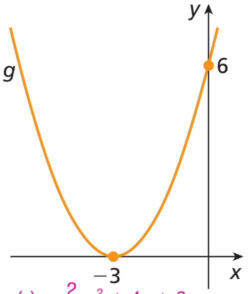
17. Escreva a lei da função quadrática relativa ao gráfico.

a)



$f(x) = x^2 + 8x + 15$

b)



$g(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

18. A parábola determinada pela função quadrática de lei $f(x) = 2x^2 - cx + (c - 2)$, com $c \in \mathbb{R}$, tangencia o eixo das abscissas. Calcule $f(f(2))$. 2

19. Considere as funções dadas por $f(x) = x^2 - 5x + b$ e $g(x) = 2x + 1$, com $b \in \mathbb{R}$. Para quais valores de b os gráficos de f e g não têm pontos em comum? $b > \dfrac{53}{4}$

20. Determine os valores de m real sabendo que o gráfico da função quadrática de lei $f(x) = -mx^2 + 2m^2$ tem concavidade voltada para baixo e que o ponto de intersecção desse gráfico com o eixo y é $(0, 18)$.

Em seguida, determine os pontos em que o gráfico da função encontrada intercepta o eixo x.

$m = 3$; $\left(\sqrt{6}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$

21. Por que é correto o procedimento de identificar o coeficiente c de uma função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ como a ordenada do ponto de intersecção do gráfico com o eixo y?

Liste os motivos que, em sua opinião, explicam esse procedimento. Ver resolução no Guia do professor.

Feito isso, siga os passos:

I. Desenhe no plano cartesiano uma parábola qualquer que represente uma função quadrática.

II. Na parábola desenhada, identifique o valor de x do ponto em que ela intercepta o eixo y. $x = 0$

III. Substitua na lei da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ o valor de x que você encontrou no passo anterior e encontre sua imagem. $f(0) = c$

- Compare os passos descritos com os motivos que você listou. Há semelhanças? Quais? resposta pessoal

22. Conhecendo alguns dados de uma parábola, você saberia dizer, sem desenhar o gráfico, para quais valores reais de x tem-se $f(x)$ positivo?

a) A função f não tem zeros reais. Para qualquer valor real de x.
A parábola intercepta o eixo y: $(0, 5)$

b) Zero real duplo da função f: -5 Não há valor real de x.
Concavidade da parábola: voltada para baixo

c) Zeros da função f: -3 e 3 $-3 < x < 3$
A parábola intercepta o eixo y: $(0, 3)$

d) Pontos em que a parábola intercepta o eixo x: $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ $-2 < x < -1$
A parábola intercepta o eixo y: $(0, -2)$

e) Lei da função: $f(x) = x^2 - 6x + 13$ Para qualquer valor real de x.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.2 Estudo do sinal da função por meio de seus zeros

Conhecendo os zeros de uma função quadrática *f* e o esboço do gráfico da função, é possível estudar o sinal dessa função, ou seja, determinar para quais valores de *x* a função é positiva, negativa ou nula.

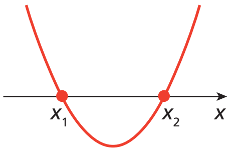
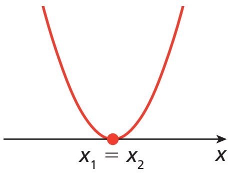
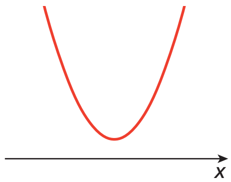
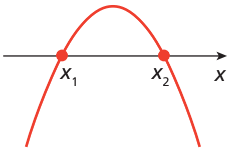
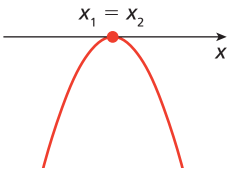
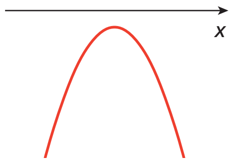
O sinal da função *f* depende do modo como a parábola intercepta o eixo *x*. Dessa forma, podemos agrupar as parábolas em três casos:

1º caso: quando a parábola intercepta o eixo *x* em dois pontos.

2º caso: quando a parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto.

3º caso: quando a parábola não intercepta o eixo *x*.

Organizando esses casos em um quadro, temos:

	1º caso ($\Delta > 0$)	2º caso ($\Delta = 0$)	3º caso ($\Delta < 0$)
$a > 0$			
$a < 0$			

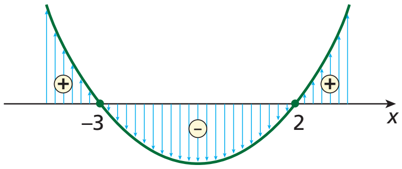
Pelo esboço do gráfico, é possível estudar o sinal de uma função quadrática.

Exemplos

a) Vamos estudar o sinal da função quadrática *f*, com $f(x) = x^2 + x - 6$. Para isso, inicialmente determinamos os zeros de *f*:

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 2$

Em seguida, fazemos um esboço do gráfico da função. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima.



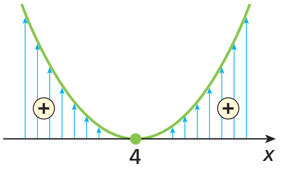
Agora, observando esse esboço, determinamos para quais valores de *x* as imagens são positivas, negativas ou nulas.

Concluímos que: $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 2 \\ f(x) < 0 \text{ para } -3 < x < 2 \end{cases}$

b) Vamos estudar o sinal da função *i* dada por $i(x) = x^2 - 8x + 16$.

A função *i* tem zero real duplo: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, obtemos o esboço do gráfico abaixo.



Portanto: $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } x \neq 4 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = 4 \end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R7. Considere a função g, dada por $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$.
Determinar, quando existirem, os valores de x cujas imagens pela função g são negativas.

▶ ***Resolução***

Inicialmente, vamos fazer o estudo do sinal da função g. Para isso, devemos encontrar seus zeros.

$2x^2 + 3x + 4 = 0$

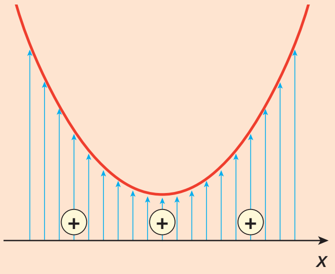
$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = -23$

Como $\Delta < 0$, a equação $2x^2 + 3x + 4 = 0$ não tem raízes reais. Portanto, a função g não tem zeros reais.

Considerando que o coeficiente de x^2 é positivo e que a função não tem nenhum zero real, obtemos o esboço do gráfico, representado ao lado.

Analisando esse esboço, verificamos que para qualquer valor de x a função g é positiva.

Portanto, não existe valor real de x em que a função g é negativa.



R8. Considerando a função h, definida por $h(x) = -x^2 + 5x - p - 3$, verificar para quais valores de p a função h apresentará valores positivos.

▶ ***Resolução***

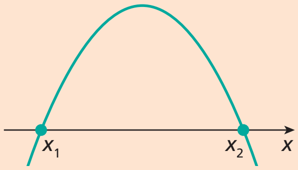
Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Então, para que a função h tenha valores positivos, a parábola que representa graficamente a função deve cruzar o eixo x, conforme indicado no esquema ao lado.

Nesse caso, precisamos impor a condição $\Delta > 0$. Assim:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-p - 3) \Rightarrow \Delta = 25 - 4p - 12 \Rightarrow \Delta = -4p + 13$

Como $\Delta > 0$, temos: $-4p + 13 > 0 \Rightarrow p < \dfrac{13}{4}$

Assim, a função h será positiva quando $p < \dfrac{13}{4}$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

23. b) $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno Ver resolução dos exercícios 25 e 26 no Guia do professor.

23. Estude o sinal das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir.

a) $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$ $g(x) > 0$ para qualquer valor de x real

b) $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $i(x) = -x^2 + 9$

Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos.

24. Determine para que valores reais de x cada uma das seguintes funções é positiva.

a) $f(x) = -x^2 + 2x$ $0 < x < 2$ **b)** $g(x) = x^2 - 2x + 1$ $x \neq 1$

25. Observe o estudo do sinal das funções quadráticas f e g e faça um esboço do seu gráfico.

a) Estudo do sinal de f:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } -2 < x < 1 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -2 \text{ ou } x = 1 \\ f(x) < 0 \text{ para } x < -2 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

b) Estudo do sinal de g:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \text{ para } x \neq -2 \\ g(x) = 0 \text{ para } x = -2 \end{cases}$$

26. Considere uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, em que a e c são números reais e $a \neq 0$.

a) Atribuindo valores reais (positivos e negativos) para a e c, escreva pelo menos oito leis de formação diferentes para funções do mesmo tipo da função j.

b) Faça o gráfico associado a cada uma das leis elaboradas no item anterior.

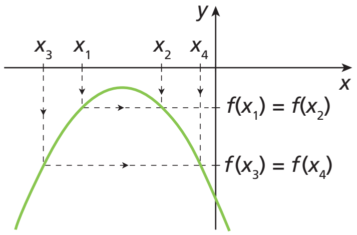
c) Comparando cada uma das leis com seu gráfico, verifique como deve ser o sinal de a e de c para que uma função do tipo da função j tenha dois zeros reais.

d) Agora, verifique como deve ser o sinal de a e de c para que funções desse tipo não tenham zeros reais.

e) Compare as respostas dos itens anteriores com as de um colega. Em seguida, elaborem uma estratégia para realizar o estudo do sinal de uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$, sem fazer o esboço do gráfico.

2.3 Vértice do gráfico da função quadrática

Ao construir gráficos de funções quadráticas, você notou que, com exceção da ordenada y_V do vértice, cada imagem está associada a dois valores de x?

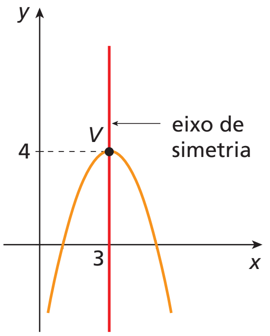


Na parábola, dois pontos de ordenadas iguais estão à mesma distância da reta perpendicular ao eixo x que passa pelo vértice $V(x_V, y_V)$ dessa parábola. Essa reta é chamada de **eixo de simetria** e seus pontos são tais que $x = x_V$ qualquer que seja o valor de y.

Assim, quaisquer dois valores de x equidistantes de x_V têm a mesma imagem.

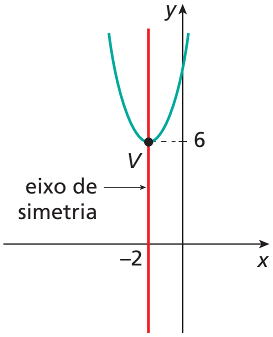
Exemplos

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



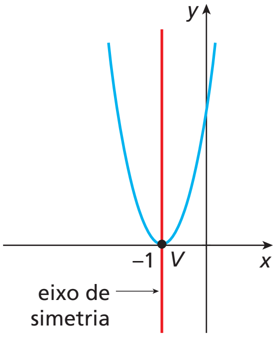
- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = 3$.

b) $g(x) = x^2 + 4x + 10$



- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -2$.

c) $h(x) = 3x^2 + 6x + 3$



- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -1$.

As coordenadas do vértice de uma parábola, gráfico da função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$, são dadas por $x_V = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

Demonstração

Dado o gráfico da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, considere (x_V, y_V) o vértice da parábola.

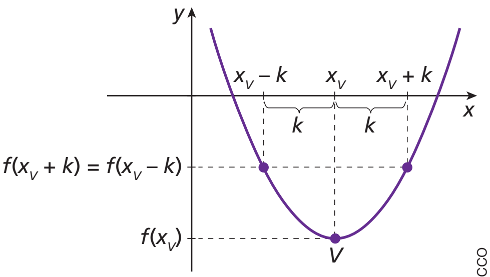
Como $x_V + k$ e $x_V - k$, com $k \neq 0$, são equidistantes de x_V, temos:

$f(x_V + k) = f(x_V - k)$

$a(x_V + k)^2 + b(x_V + k) + c = a(x_V - k)^2 + b(x_V - k) + c$

$a(x_V^2 + 2x_Vk + k^2) + bx_V + bk + c = a(x_V^2 - 2x_Vk + k^2) + bx_V - bk + c$

$2ax_Vk + bk = -2ax_Vk - bk \Rightarrow 4ax_Vk = -2bk \Rightarrow x_V = -\dfrac{b}{2a}$



Sabemos, ainda, que $y_V = f(x_V)$. Assim:

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto, as coordenadas do vértice de uma parábola são:

$x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R9. Calcular as coordenadas do vértice da parábola correspondente a $g(x) = -x^2 - 5x - 7$.

Resolução

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = 25 - 28 = -3$

Aplicando as fórmulas do vértice, temos:

- $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-5)}{2 \cdot (-1)} = -\dfrac{5}{2}$
- $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(-3)}{4 \cdot (-1)} = -\dfrac{3}{4}$

Portanto, as coordenadas do vértice dessa parábola são $\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$.

Observação

Conhecendo x_V, também podemos calcular y_V substituindo o valor de x_V na lei da função.

$y_V = g(x_V) = g\left(-\dfrac{5}{2}\right) =$

$= -\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right) - 7 = -\dfrac{3}{4}$

Então, $y_V = -\dfrac{3}{4}$.

R10. Sabendo que uma função quadrática tem zeros 1 e 5, e que o vértice da parábola é (3, 4), determinar a lei de formação dessa função.

Resolução

Para determinar a lei $y = f(x)$ de uma função quadrática, é preciso encontrar os coeficientes a, b e c da função, com $a \neq 0$, de modo que $y = ax^2 + bx + c$.

Como o vértice da parábola é (3, 4), temos:

$x_V = 3 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow 6a = -b \Rightarrow b = -6a \quad \text{(I)}$

$y_V = 4 \Rightarrow -\dfrac{\Delta}{4a} = 4 \Rightarrow \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 4 \Rightarrow -b^2 + 4ac = 16a \quad \text{(II)}$

Como 1 é zero da função, temos:

$f(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \quad \text{(III)}$

Substituindo (I) em (III), obtemos: $a - 6a + c = 0 \Rightarrow c = 5a$

Agora, substituindo b por $-6a$ e c por $5a$ em (II), temos:

$-(-6a)^2 + 4a(5a) = 16a \Rightarrow -36a^2 + 20a^2 = 16a \Rightarrow$

$\Rightarrow -16a^2 - 16a = 0 \Rightarrow a \cdot (a + 1) = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ ou } a = 0$

Como a função é quadrática, o coeficiente a não pode ser zero. Então, consideraremos apenas $a = -1$; daí $b = 6$ e $c = -5$.

Portanto, a lei da função é $y = -x^2 + 6x - 5$.

Observação

A lei de uma função quadrática pode ser dada por $y = ax^2 + bx + c$. Essa sentença é chamada de **equação da parábola correspondente**.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

27. Determine o vértice das parábolas referentes às funções dadas por:

a) $h(x) = -x^2 - 2x + 8$ (−1, 9)
b) $i(x) = x^2 - 2x - 8$ (1, −9)
c) $j(x) = x^2 + 2x - 3$ (−1, −4)
d) $k(x) = x^2 - 4x + 4$ (2, 0)

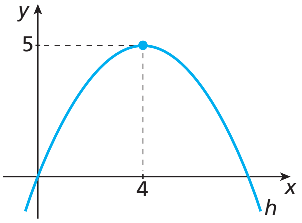
28. Considere as funções do exercício anterior.

a) Qual é o maior valor que cada função pode assumir (maior imagem)?
b) Qual é o menor valor que cada função pode assumir (menor imagem)?
c) Qual característica a lei de formação deve ter para que a função tenha um valor máximo? E para que tenha um valor mínimo?

Ver resolução no Guia do professor.

29. Considere o gráfico de uma função quadrática apresentado a seguir.

b) $h(x) = -\dfrac{5}{16}x^2 + \dfrac{5}{2}x$

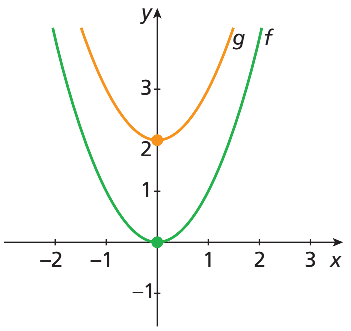


ADILSON SECCO

a) Analisando o gráfico, calcule os zeros da função. 0 e 8
b) Encontre a lei dessa função quadrática.

30. Determine m e n para que o vértice da parábola que representa a função f, dada por $f(x) = -(m - 1)x^2 + 2x + n$, seja (2, 5). $m = \dfrac{3}{2}$ e $n = 3$

31. No plano cartesiano a seguir estão representadas as funções dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 2$.



a) Identifique uma característica comum entre as coordenadas do vértice dessas duas funções. Espera-se que os alunos percebam que, nas duas funções, tem-se $x_v = 0$ e $y_v = c$.

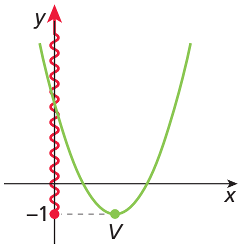
b) Verifique algebricamente que as coordenadas do vértice de uma função do tipo $h(x) = ax^2 + c$ serão sempre $(0, c)$. Ver resolução no Guia do professor.

2.4 Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática

Uma função quadrática tem um **valor máximo** ou um **valor mínimo**. Esse valor é a ordenada do vértice da parábola que a representa e nos permite determinar o conjunto imagem dessa função. Quando a concavidade da parábola é voltada para baixo, a função tem um valor máximo; caso contrário, tem um valor mínimo.

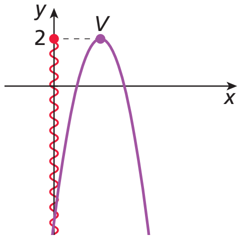
Exemplos

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Essa função tem $y_v = -1$.
A parábola tem concavidade voltada para cima. Então, $f(x) \geqslant -1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Logo, -1 é o valor mínimo de f e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.

b) $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$

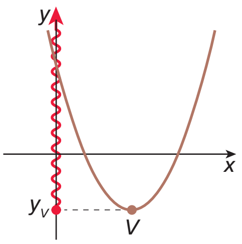
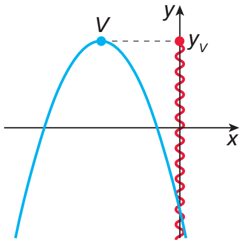


Essa função tem $y_v = 2$.
A parábola tem concavidade voltada para baixo. Então, $f(x) \leqslant 2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Logo, 2 é o valor máximo de g e $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$.

◆ Observação

O símbolo $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja".

Para uma função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos:

Concavidade voltada para cima ($a > 0$)	Concavidade voltada para baixo ($a < 0$)
 Essa função tem valor mínimo y_V. O valor mínimo de f é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}$	 Essa função tem valor máximo y_V. O valor máximo de f é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R11. Determinar o valor máximo ou mínimo da função f dada por $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 15$ e escrever seu conjunto imagem.

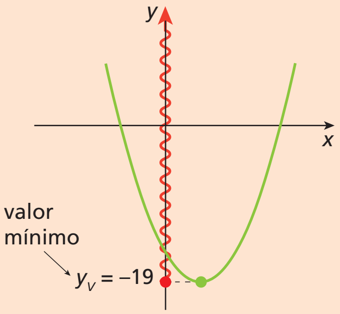
▶ ***Resolução***

Como $a > 0$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-15)\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$y_V = \frac{-(4 + 15)}{1} = -19$$



ADILSON SECCO

Logo, -19 é o valor mínimo dessa função e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

R12. Durante uma situação de emergência, o capitão de um barco dispara um sinalizador para avisar a guarda costeira. A trajetória que o sinal luminoso descreve é um arco de parábola.

IVAN MUÑOZ OSORIO

A função que descreve o movimento do sinal luminoso é dada por $h(t) = 80t - 5t^2$, sendo h a altura do sinal, em metro, e t, o tempo decorrido após o disparo, em segundo.

a) Qual é a altura máxima que esse sinal luminoso pode atingir?

b) Quantos segundos se passam, após o disparo, até o sinal luminoso atingir a altura máxima?

▶ ***Resolução***

a) Para determinar a altura máxima que esse sinal pode atingir, precisamos encontrar o valor máximo da função. Analisando o sinal do coeficiente a, podemos concluir que o gráfico da função h é um arco de parábola com concavidade voltada para baixo.

É possível determinar o valor máximo da função usando a fórmula da ordenada do vértice:

$$\Delta = 80^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 6.400$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-6.400}{-20} = 320$$

Logo, a altura máxima que o sinal luminoso atinge é 320 metros.

b) O tempo que o sinal luminoso leva para atingir a altura máxima corresponde ao x_V da parábola. Utilizando a fórmula da abscissa do vértice, temos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2 \cdot (-5)} = \frac{-80}{-10} = 8$$

Logo, o sinal luminoso atinge a altura máxima 8 segundos após o disparo.

R13. Seja a função quadrática f dada por $f(x) = (m - 3)x^2 + 2x - m$. Para que valores reais de m a função tem -1 como valor máximo?

▶ ***Resolução***

Se -1 é o valor máximo da função, então a parábola tem concavidade voltada para baixo e $y_V = -1$.

Aplicando a fórmula da ordenada do vértice, temos $-1 = \frac{-\Delta}{4a}$.

Substituindo os valores dos coeficientes na fórmula e resolvendo-a, obtemos:

$$-1 = \frac{-\left[2^2 - 4 \cdot (m - 3) \cdot (-m)\right]}{4 \cdot (m - 3)}$$

$$-1 = \frac{-\left[4 + 4m^2 - 12m\right]}{4m - 12}$$

$$-4m + 12 = -4 - 4m^2 + 12m$$

$$4m^2 - 16m + 16 = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$m = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, para $m = 2$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e -1 como valor máximo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

32. a) valor mínimo: $-\frac{81}{8}$ **b)** valor máximo: $\frac{5\sqrt{5}+4}{4}$ **c)** valor mínimo: $\frac{7}{18}$

32. Determine o valor máximo ou mínimo das funções quadráticas dadas por:

a) $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

b) $h(x) = -\sqrt{5}x^2 - 5x + 1$

c) $n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}$

33. Determine o conjunto imagem das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

b) $g(x) = -2x^2 + 3x + 7$

c) $h(x) = -3x^2 + 8$

34. O conjunto imagem da função quadrática g, com $g(x) = ax^2 + 8x + 12$, é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 16\}$.

a) A função g tem valor máximo ou valor mínimo? valor máximo

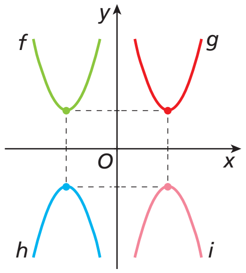
b) A concavidade da parábola correspondente está voltada para cima ou para baixo? para baixo

c) Qual é o valor de a? -4

d) Determine as coordenadas do vértice da parábola. (1, 16)

35. Calcule os valores reais de m para que a função de lei $f(x) = 3x^2 + 2mx + m$ tenha $\frac{4}{3}$ como valor mínimo. Não existe m real tal que $\frac{4}{3}$ seja valor mínimo de f.

36. Observe os gráficos das funções quadráticas f, g, h e i.



ADILSON SECCO

Considere que os vértices das parábolas são simétricos em relação aos eixos ou à origem O. Sabendo que $\text{Im}(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{3}{2}\right\}$ e que a abscissa do vértice do gráfico de g é 2, calcule a área do retângulo determinado pelos vértices dessas funções. 12 unidades de área

37. Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Um segundo após o lançamento, a pedra atinge 5 metros de altura e começa a descer. A lei que descreve a altura h, em metro, em relação ao tempo t, em segundo, é do tipo $h(t) = at^2 + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

a) Determine a lei dessa função. $h(t) = -5t^2 + 10t$

b) Qual é a altura da pedra 2 segundos após o lançamento? 0 m

c) Construa o gráfico correspondente a essa situação. Ver resolução no Guia do professor.

d) Compare o tempo de subida com o tempo de descida da pedra. O que você pode concluir?

38. Uma empresa produtora de doces verificou que o custo por pacotes de 1 quilograma (em real) para a produção mensal de x toneladas de balas pode ser calculado por meio da seguinte lei matemática:

$$c(x) = \frac{x^2}{10.000} - \frac{x}{10} + 30, \text{ com } 100 \leqslant x \leqslant 800$$

a) Determine o custo (em real) por quilograma de bala dessa empresa com a produção de 100 toneladas de balas. R$ 21,00

b) Quanto essa empresa gasta por quilograma para produzir 200 toneladas de balas? R$ 14,00

c) Pode-se afirmar que quanto maior o número de toneladas de balas produzidas menor será o custo por pacotes de 1 quilograma de balas?

d) Quantas toneladas de balas deverão ser produzidas para obter um custo mínimo por quilograma? 500 toneladas

e) Qual é o valor desse custo mínimo? R$ 5,00

33. a) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$

b) $\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{65}{8}\right\}$

c) $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

37. Avaliar a conveniência de esclarecer aos alunos a diferença entre o gráfico (parábola) da função e a trajetória descrita pela pedra.

d) Observando o gráfico, percebemos que o tempo de subida é igual ao de descida.

38. c) Espera-se que os alunos percebam que essa afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de 1 quilograma de balas está relacionado com o número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.

3 Construção do gráfico da função quadrática

3.1 Escolhendo pontos convenientes

Para esboçar o gráfico (parábola) correspondente a uma função quadrática, podem-se escolher os seguintes pontos convenientes:

- os pontos em que a parábola intercepta o eixo y e o eixo x (caso existam);
- o vértice.

Exemplo

Vamos esboçar o gráfico da função dada pela lei $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.

Calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

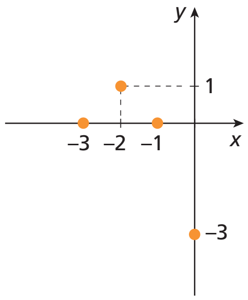
- coeficiente c: -3
- zeros da função: -3 e -1
- coordenadas dos vértices: $x_V = -2$ e $y_V = 1$

Pontos formados:

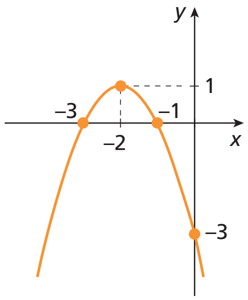
- intersecção com os eixos: $(0, -3)$, $(-3, 0)$ e $(-1, 0)$
- vértice: $(-2, 1)$

Com essas informações, vamos esboçar o gráfico da função f realizando duas etapas:

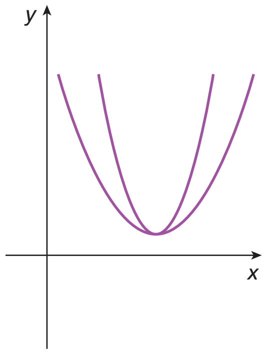
1ª etapa. Localizamos os pontos no plano cartesiano.



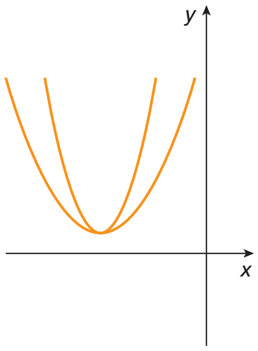
2ª etapa. Traçamos o gráfico.



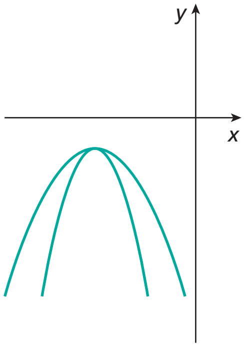
Existem parábolas cujo vértice não se encontra sobre nenhum dos eixos, e a função associada a elas não possui zeros reais.



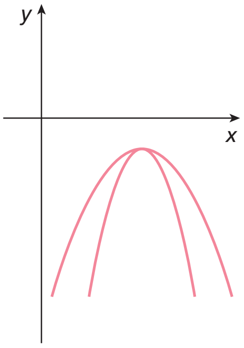
Parábolas com vértice no 1º quadrante e que não interceptam o eixo x.



Parábolas com vértice no 2º quadrante e que não interceptam o eixo x.



Parábolas com vértice no 3º quadrante e que não interceptam o eixo x.



Parábolas com vértice no 4º quadrante e que não interceptam o eixo x.

Nesses casos, para construir a parábola relacionada a uma função desse tipo, é necessário determinar as coordenadas do vértice da parábola e identificar o ponto em que a parábola corta o eixo y. Com essas informações, pode-se esboçar o gráfico da função utilizando a simetria da parábola em relação à reta vertical que passa pelo vértice.

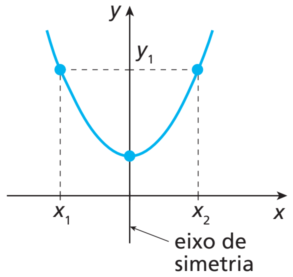
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

◆ Reflita

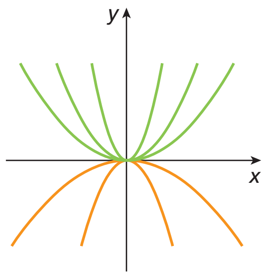
Uma parábola corta os eixos x e y em um mesmo ponto, que coincide com seu vértice.

Quais são as coordenadas do vértice dessa parábola?

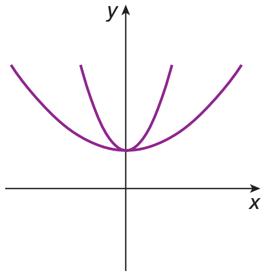
O vértice da parábola coincide com a intersecção dos eixos x e y; portanto, as coordenadas do vértice são $x = 0$ e $y = 0$, ou seja, $V(0, 0)$.



Há, ainda, parábolas cujos vértices se encontram sobre o eixo y, e as funções a elas associadas têm apenas um zero ou não têm zero.



Parábolas com vértice (0, 0).



Parábolas com vértice no eixo y e que não interceptam o eixo x.

Nesses casos, como existem infinitas parábolas com esse vértice, para construir gráficos desse tipo é necessário atribuir outro valor a x, calcular a imagem correspondente e, a partir daí, esboçar o gráfico da função utilizando a simetria da parábola.

Exemplo

Vamos esboçar o gráfico da função g dada por $g(x) = 2x^2 + 1$.

Repetindo o procedimento do exemplo anterior, calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

- coeficiente c: 1
- zeros da função: $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8$
  (Logo, a função g não tem zeros reais.)
- coordenadas do vértice: $x_v = -\frac{0}{2 \cdot 2} = 0$; $y_v = -\frac{(0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 2} = -\frac{(-8)}{8} = 1$

Observando os valores encontrados, verifica-se que o gráfico da função g não corta o eixo x, e o vértice da parábola coincide com o ponto em que o gráfico corta o eixo y: (0, 1)

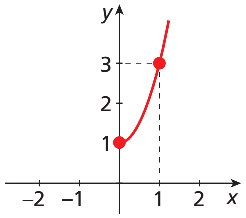
Então, vamos determinar outro ponto pertencente ao gráfico da função g. Para isso, atribuiremos um valor para x e calcularemos sua respectiva imagem.

Sendo $x = 1$, temos: $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$

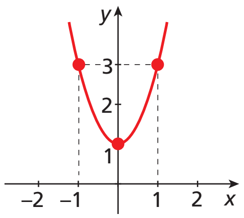
Logo, a parábola passa pelo ponto (1, 3).

Com essas informações, vamos traçar o esboço do gráfico dessa função.

1ª etapa. Localizamos os pontos (0, 1) e (1, 3) no plano cartesiano e traçamos parte da parábola.



2ª etapa. Utilizamos simetria para traçar o restante da parábola.



Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução no Guia do professor.

39. Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$

b) $g(x) = x^2 + 6x$

c) $h(x) = \frac{3x^2}{5} + x + 5$

d) $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$

e) $j(x) = x^2 + 3$

f) $l(x) = -2x^2 - 2$

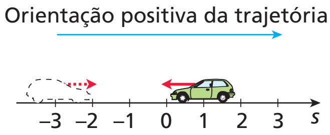
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3.2 Resolvendo situações-problema pelo gráfico da função

A construção do gráfico de uma função favorece o entendimento da variação das grandezas envolvidas. Em situações práticas, essa facilidade é mais evidente.

Exemplos

a) Um móvel percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento uniformemente variado cuja lei da posição s (em metro) em função do tempo t (em segundo) é $s(t) = -3 + 4t - t^2$. O móvel saiu da posição -3 com velocidade 4 m/s, com movimento a favor da orientação positiva da trajetória. Diminuiu a velocidade até parar e voltou, aumentando a velocidade.



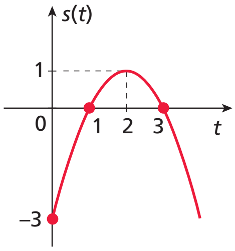
Vamos determinar os intervalos de tempo em que o móvel se movimenta a favor da orientação positiva da trajetória e contra ela. Em que instantes o móvel passa pela posição zero (origem) da trajetória?

Para visualizar melhor a variação da posição (s) em função do tempo (t), vamos construir o gráfico da função s.

Como 1 e 3 são os zeros da função s, então a parábola intercepta o eixo x em (1, 0) e (3, 0).

Calculando as coordenadas do vértice, obtemos:

- $x_V = \dfrac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$
- $y_V = \dfrac{-[4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)]}{4 \cdot (-1)} = 1$



Para $t = 0$, temos $s(0) = -3$.

Portanto, a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -3)$.

Observe que $D(s) = [0, +\infty[$ e $Im(s) =]-\infty, 1]$.

Pelo gráfico construído, analisamos o que ocorre nos intervalos:

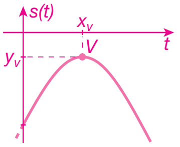
- para $0 < t < 2$, o móvel se movimenta a favor da orientação positiva da trajetória;
- para $t = 2$, o móvel parou e alterou o sentido do movimento;
- para $t > 2$, o móvel se movimenta contra a orientação positiva da trajetória.

No gráfico, os instantes em que o móvel passa pela posição zero são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo x, ou seja, os zeros da função. Nesse caso, são os instantes $t = 1$ e $t = 3$.

◆ Reflita

- Como pode ser o gráfico (posição × tempo) de um móvel, em movimento uniformemente variado, que não passa pela origem dos espaços?
- Qual é o significado do vértice do gráfico da função em um movimento desse tipo?

- Resposta possível:



Esse gráfico pode representar a lei de formação do movimento uniformemente variado de um móvel que não passa pela origem dos espaços.

ADILSON SECCO

- Nesse gráfico, a abscissa e a ordenada do vértice indicam, respectivamente, o instante e o local em que o móvel parou e alterou o sentido do movimento.

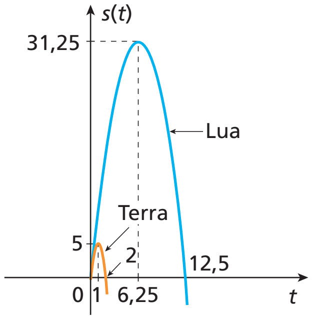
Comentário: Esta atividade tem caráter interdisciplinar. Convém planejar com o professor de Física a melhor forma de explorá-la.

b) Na Lua, um astronauta lança uma rocha verticalmente para cima com velocidade de 10 m/s. Ao chegar à Terra, o astronauta faz a mesma experiência com a mesma rocha e à mesma velocidade. As leis que representam o movimento da rocha (em metro), em função do tempo (em segundo), em cada local são:

$s_{\text{Lua}}(t) = 10t - 0{,}8t^2$ e $s_{\text{Terra}}(t) = 10t - 5t^2$

Vamos calcular em qual dos dois locais o tempo de subida e o de descida são menores; e qual é a diferença entre esses tempos.

Podemos construir as duas parábolas em um mesmo plano cartesiano.



Observando as parábolas, vemos que o tempo de subida e descida da rocha é menor na Terra. A diferença entre esses tempos é de 10,5 segundos.

◆ Observações

- $s_{\text{Lua}}(t) = 10t - 0{,}8t^2$

  Zeros da função: 0 e 12,5

  Ponto de intersecção do gráfico com o eixo y: (0, 0)

  Vértice do gráfico: (6,25; 31,25)

- $s_{\text{Terra}}(t) = 10t - 5t^2$

  Zeros da função: 0 e 2

  Ponto de intersecção do gráfico com o eixo y: (0, 0)

  Vértice do gráfico: (1, 5)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

40. Uma empresa de televisão a cabo, que tem 60.000 assinantes e cobra de cada um R$ 75,00 mensais, fez uma pesquisa de mercado para decidir o aumento que aplicará na sua mensalidade. Os resultados desse estudo indicam que a empresa perderá 400 assinantes para cada real adicionado à mensalidade.

a) Escreva a sentença que determina o número de assinantes em função da quantidade de reais adicionados à mensalidade. $60.000 - 400x$

b) Encontre a sentença que determina o valor de uma mensalidade (em real) em função do aumento. $75 + x$

c) Dê a lei da função que determina o faturamento mensal (em real), dependendo da quantidade de reais adicionados à mensalidade. $y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

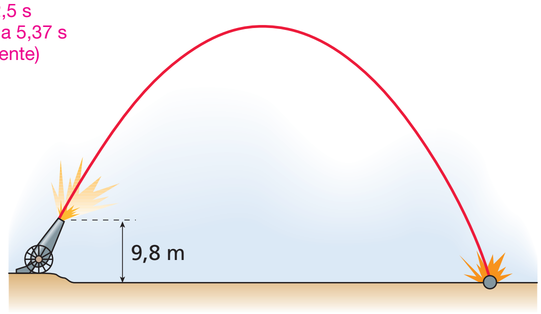
d) De quanto deve ser o aumento para maximizar o faturamento mensal? R$ 37,50

e) Qual é a arrecadação máxima que a empresa pode obter em um mês ao aplicar esse aumento? R$ 5.062.500,00

f) Quantos assinantes deverá ter essa empresa para obter a arrecadação máxima? 45.000

41. Um projétil é lançado e descreve uma curva segundo a lei $h(t) = -4{,}9t^2 + 24{,}5t + 9{,}8$, com h em metro e t em segundo. Determine os intervalos de tempo em que o projétil está subindo e descendo.

subida: 0 s a 2,5 s
descida: 2,5 s a 5,37 s
(aproximadamente)



ADILSON SECCO

42. Dois móveis, A e B, no mesmo instante, partem do mesmo ponto e realizam movimentos retilíneos que obedecem às leis $s_A(t) = 5 + 5t$ e $s_B(t) = 5 - 5t + t^2$. Determine o intervalo de tempo em que o móvel A fica na frente do móvel B. O móvel A fica na frente do móvel B no intervalo]0, 10[.

4 Inequações

4.1 Inequações do 2º grau

Toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) e o segundo membro é zero é chamada de **inequação do 2º grau** na incógnita x.

Exemplos

- $3x^2 - 8x - 3 \geqslant 0$
- $-x^2 + 0{,}5x \leqslant 0$
- $5x^2 - 2 < 0$
- $-4x^2 + x + \sqrt{3} > 0$

Para resolver inequações do 2º grau, podemos utilizar o estudo do sinal da função quadrática, conforme vimos no tópico “Estudo do sinal da função por meio de seus zeros”, na página 116.

Exercícios resolvidos

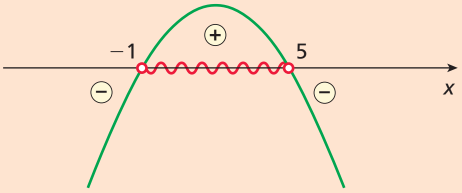
R14. Resolver, em $\mathbb{Z}$, a inequação $-3x^2 + 7x + 4 > -2x^2 + 3x - 1$.

▸ ***Resolução***

$$-3x^2 + 7x + 4 > -2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3x^2 + 7x + 4 + 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Rightarrow \underbrace{-x^2 + 4x + 5}_{f(x)} > 0$$

Calculando os zeros da função f, obtemos $x = -1$ ou $x = 5$.

Conhecendo os zeros da função, podemos fazer o esboço do gráfico:



A função é positiva para x real tal que $-1 < x < 5$. Como queremos somente valores inteiros, apenas 0, 1, 2, 3 e 4 satisfazem essa condição. Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

◆ Observação

Veja os cálculos dos zeros da função $-x^2 + 4x + 5 = 0$:

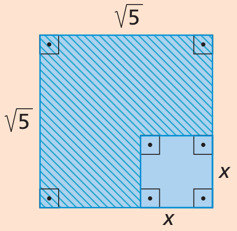
$x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x + 1) \cdot (x - 5) = 0$

$x + 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x = -1$ ou $x = 5$

R15. Determinar a área da parte hachurada da figura em função de x e encontrar o maior valor inteiro que x pode assumir.



▸ ***Resolução***

Indicando a área da parte hachurada por A, temos:

$A(x) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2 \Rightarrow A(x) = 5 - x^2$

De acordo com a figura, verificamos que o maior valor que x pode assumir é $\sqrt{5}$, já que a medida do lado da figura maior é $\sqrt{5}$. Além disso, como x representa a medida do lado de um quadrado, temos que $x > 0$. Logo, $0 < x \leqslant \sqrt{5}$.

Como $x > 0$ e $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$, o maior valor inteiro que x pode assumir é 2.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

43. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações do 2º grau.

- **a)** $-x^2 + 1 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
- **b)** $2x^2 + 3x + 7 \leqslant 0$ $S = \varnothing$
- **c)** $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$ $S = \{1\}$
- **d)** $x^2 + 2(x - 4) - 1 \leqslant 2x^2 - 9$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
- **e)** $x^2 - 4x \geqslant -4$ $S = \mathbb{R}$
- **f)** $(-2x + 1)^2 > 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

Ver resolução no Guia do professor.

44. Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções f e g dadas por $f(x) = 2x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Se quiser, use um *software* de construção de gráficos.

Em seguida, analise os intervalos do domínio em que $f(x) > g(x)$.

Monte a inequação, resolva-a e depois compare a solução com sua análise dos gráficos.

4.2 Inequação-produto e inequação-quociente

Você já trabalhou com inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins. Agora, estudaremos inequações desse tipo que também envolvem funções quadráticas, utilizando novamente o quadro de sinais.

◆ Observação

Só podemos usar o quadro de sinais quando o segundo membro da inequação for igual a zero.

Exercício resolvido

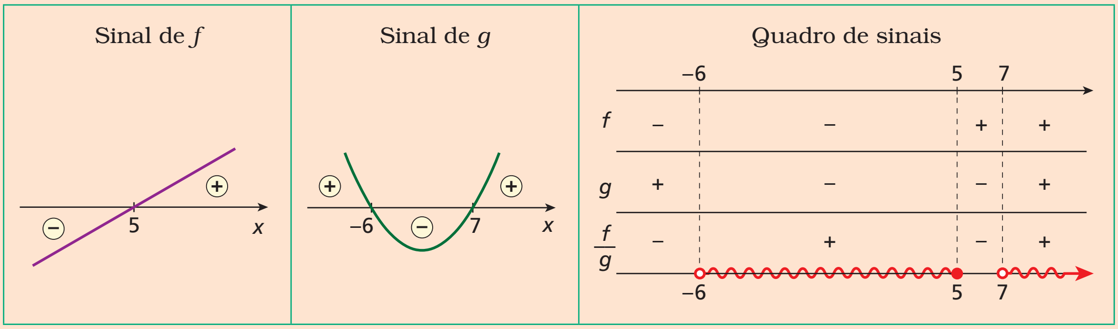
R16. Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a) $\dfrac{x-5}{x^2-x-42} \geqslant 0$ **b)** $x^2(x^2-1) \leqslant 0$

▸ *Resolução*

a) Para $\dfrac{x-5}{x^2-x-42} \geqslant 0$, vamos considerar $f(x) = x - 5$ e $g(x) = x^2 - x - 42$.

O zero de f é 5 e os zeros de g são -6 e 7.
Vamos estudar o sinal das funções f e g e, em seguida, montar o quadro de sinais.

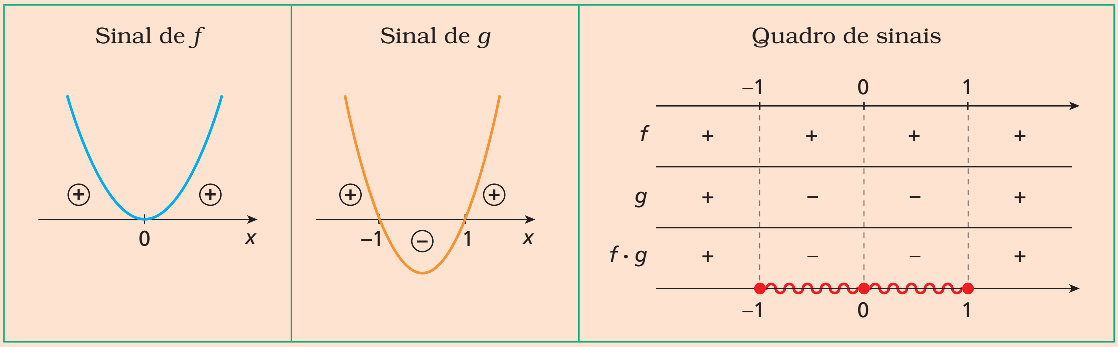


	$x<-6$	$-6<x<5$	$5<x<7$	$x>7$
f	−	−	+	+
g	+	−	−	+
$\frac{f}{g}$	−	+	−	+

Observe que -6 e 7 não são soluções da inequação, pois o denominador $x^2 - x - 42$ deve ser diferente de zero.
Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leqslant 5 \text{ ou } x > 7\}$.

b) $\overbrace{x^2}^{f(x)} \cdot \overbrace{(x^2-1)}^{g(x)} \leqslant 0$

O zero de f é 0 e os zeros de g são -1 e 1.
Vamos estudar o sinal das funções f e g.



	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
f	+	+	+	+
g	+	−	−	+
$f \cdot g$	+	−	−	+

Assim, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

45. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a) $(3x^2 - 10x + 7)(-x^2 + 4x) \geqslant 0$

b) $2x^3 + 9x^2 - 35x \leqslant 0$

c) $x^4 - 4 < 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$

d) $\dfrac{3x + 5}{2x^2 - 7x - 4} \leqslant 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\dfrac{5}{3} \text{ ou } -\dfrac{1}{2} < x < 4\right\}$

e) $\dfrac{-x^2 + 5x - 4}{x^2 - 14x + 48} \geqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

f) $-\dfrac{(x - 5)^2}{(-x + 5)^2} > 0$ $S = \varnothing$

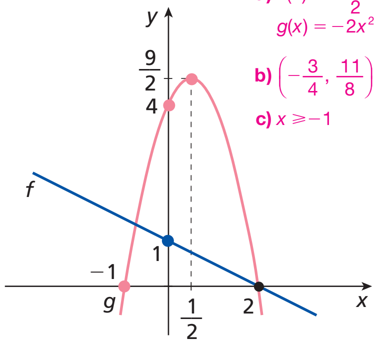
46. Reduza cada inequação a outra com o segundo membro igual a zero e determine a solução em $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{-6}{x^2 - 4} \leqslant 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $\dfrac{1}{-x} < \dfrac{1}{2}x + 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

47. Encontre o menor valor natural que x pode assumir para que $\dfrac{(2x + 8)(-x + 3)}{-x^2 + 1} \leqslant 0$. 2

48. A função afim f e a função quadrática g estão representadas a seguir.



a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$

$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$

b) $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{11}{8}\right)$ e $(2, 0)$

c) $x \geqslant -1$

a) Determine as leis das funções f e g.

b) Em que pontos os gráficos se interceptam?

c) Sem fazer cálculos, com base no gráfico, determine quais valores de x tornam $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.

d) Resolva a inequação $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e compare a resposta com a do item **c**. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

45. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \dfrac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$ **b)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}\right\}$

4.3 Inequações simultâneas

Já vimos inequações simultâneas no capítulo anterior. Agora, vamos estudar inequações desse tipo envolvendo funções quadráticas.

◆ Observação

Inequações simultâneas são aquelas apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações.

Para resolver inequações desse tipo, devemos:

1º) encontrar a solução de cada inequação;

2º) fazer a intersecção das soluções.

Exercícios resolvidos

R17. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $4x^2 - 7x + 2 \leqslant 2x^2 - 3x + 2 < -3x + 4$.

▶ ***Resolução***

Inicialmente, vamos reduzir a inequação simultânea em:

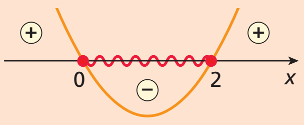
(I) $4x^2 - 7x + 2 \leqslant 2x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x \leqslant 0$

(II) $2x^2 - 3x + 2 < -3x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 2 < 0$

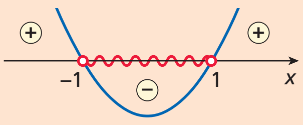
Considerando $f(x) = 2x^2 - 4x$ e $g(x) = 2x^2 - 2$, temos:

- Zeros de f: 0 e 2
- Zeros de g: −1 e 1

Sinal de f

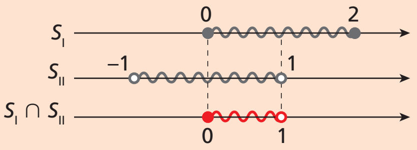


Sinal de g



$S_{\text{I}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ $S_{\text{II}} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

Agora, vamos fazer a intersecção das soluções das inequações (I) e (II).



Logo, o conjunto solução das inequações simultâneas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita, p. 131

$y = \sqrt{2x^2 - 4}$

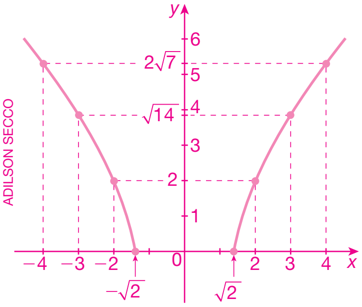
Condição de existência:

$2x^2 - 4 \geqslant 0 \Rightarrow 2x^2 \geqslant 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \geqslant 2 \Rightarrow x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$

Logo: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}\}$

x	y
$-\sqrt{2}$	0
$\sqrt{2}$	0
2	2
−2	2
3	$\sqrt{14}$
−3	$\sqrt{14}$
4	$2\sqrt{7}$
−4	$2\sqrt{7}$



ADILSON SECCO

R18. Resolver, em ℝ, o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -\dfrac{1}{2}(x^2 + x) \leqslant \dfrac{1}{3}(3 - 6x) \end{cases}$

▶ ***Resolução***

Primeiro, vamos reduzir a 2ª inequação a uma forma mais simples:

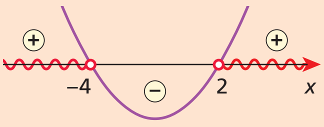
$$-\frac{1}{2}(x^2 + x) \leqslant \frac{1}{3}(3 - 6x) \Rightarrow \frac{-x^2}{2} - \frac{x}{2} \leqslant 1 - 2x \Rightarrow -x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$$

Assim, temos:

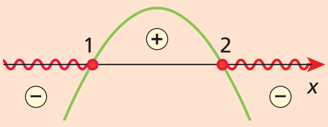
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -x^2 + 3x - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{x^2 + 2x - 8}^{f(x)} > 0 \text{ e } \overbrace{-x^2 + 3x - 2}^{g(x)} \leqslant 0$$

- Zeros de f: −4 e 2
- Zeros de g: 1 e 2

Sinal de f



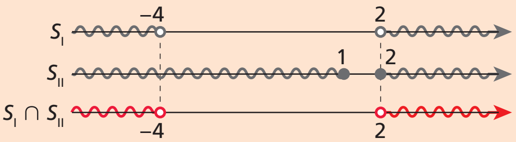
Sinal de g



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$

$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Agora, fazemos a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

49. Resolva, em ℝ, as inequações.

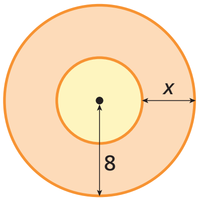
a) $2x \leqslant -x^2 + 4x < 4$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$

b) $-4 < \dfrac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

c) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x + 8 < 0 \end{cases}$ $S = \varnothing$

d) $\begin{cases} -x^2 + 5x \geqslant 0 \\ x^2 - 4x \geqslant x \end{cases}$ $S = \{0, 5\}$

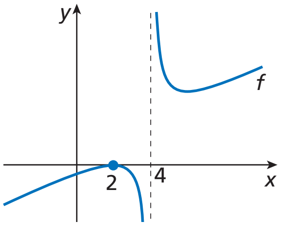
50. A figura mostra dois círculos de mesmo centro.

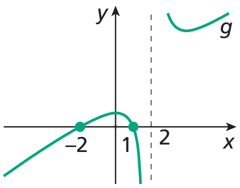


a) Encontre a área $A(x)$ da coroa circular. $A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

b) Determine x para que essa área fique entre 28π e 65π. $2 < x < 8$

51. Os gráficos abaixo representam, respectivamente, as funções de leis: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$ e $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$





Observe os gráficos e resolva os itens a seguir.

a) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

c) $f(x) < 0 < g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

d) $g(x) < 0 < f(x)$ $S = \varnothing$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4.4 Identificação do domínio de uma função por meio de inequações

Nem todas as funções reais têm como domínio o conjunto $\mathbb{R}$. Algumas, pela natureza de sua lei, apresentam restrição de valores, tendo como domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ (distinto de $\mathbb{R}$).

Utilizando o estudo que fizemos das inequações, podemos identificar o domínio de algumas dessas funções.

◆ Observações

- O denominador de expressões fracionárias não pode ser zero.
- O radicando de raízes de índice par não pode ser negativo, ou seja, é positivo ou nulo.

Exercício resolvido

R19. Identificar o domínio da função dada pela lei: $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 7}}$

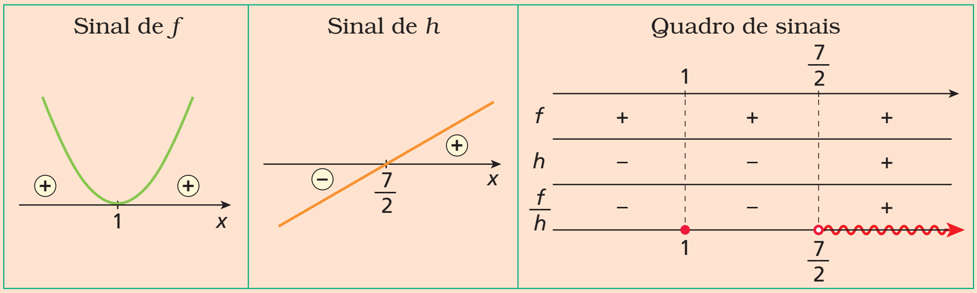
▸ *Resolução*

Em $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 7}}$, devemos ter: $\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{f(x)}}{\underbrace{2x - 7}_{h(x)}} \geqslant 0$

Inicialmente, vamos resolver a inequação-quociente:

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ (zero real duplo de f: 1)

$h(x) = 2x - 7 \left(\text{zero de } h\text{: } \dfrac{7}{2}\right)$



O zero da função h não pode ser considerado, pois anula o denominador da inequação.

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x > \dfrac{7}{2}\right\}$.

◆ Reflita

Investigue como seria o gráfico da função dada por:

$y = \sqrt{2x^2 - 4}$

(*Dica*: Considere o domínio da função e atribua valores para x para esboçar o gráfico.)

Ver resolução na página anterior.

◆ Reflita

Para que valores reais de x a função dada por $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ não está definida?

Como a função de lei $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ tem índice ímpar, temos como única restrição que o denominador de $\dfrac{1}{x}$ não pode ser zero.
Logo, $x \neq 0$.
Portanto, a função cuja lei é $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ não está definida para $x = 0$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

52. Identifique o domínio de cada função.

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$

b) $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$
$D = \{7\}$

c) $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

d) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x}}$
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

53. Escreva para que valores reais cada função dada abaixo está definida.

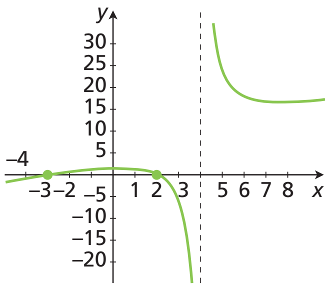
a) $f(x) = \dfrac{-3}{(x^2 - 2x)(x - 5)}$
$\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$

b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 3)(x^2 - x)}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$

c) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2}$
$\mathbb{R} - \{0\}$

d) $i(x) = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{x}}{\dfrac{2}{3}}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

54. Veja o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4}$.



a) Determine as soluções das seguintes inequações:

(I) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geqslant 0$ (II) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

- Explique como você determinou as soluções.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } -3 \leqslant x \leqslant 2\}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

b) Escreva o domínio dessa função. $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Identifique, entre as seguintes leis, aquelas que são leis de funções quadráticas e escreva-as. Justifique sua resposta. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y = 3x^4 - 8x^2 + 5$ Não é função quadrática.

b) $y = \frac{1}{3}x^2 - 7$ É função quadrática.

c) $y = (x - 2)(x + 3)$ É função quadrática; $y = x^2 + x - 6$.

d) $y = 2x - 7$ Não é função quadrática.

e) $y = -3x^2 + 2x + \sqrt{5}$ É função quadrática.

f) $y = x(x - 3)$ É função quadrática; $y = x^2 - 3x$.

2. O valor p, em real, por acre (4.047 m^2) de uma produção de trigo, d dias depois de plantado, é dado por $p = 12d - 0{,}05d^2$, com $20 < d < 80$.

a) Encontre o valor (p) do acre de trigo 50 dias depois de o grão ter sido plantado. R$ 475,00

b) Quantos dias depois de plantado o trigo obtém-se $p = 400$? 40 dias depois

3. Sem construir o gráfico da função correspondente, indique em quais casos a parábola intercepta o eixo x. Justifique sua resposta.

a) $y = x^2 - 3x + 5$ A parábola não intercepta o eixo x, pois $\Delta = -11 < 0$.

b) $y = 2x^2 - 5x - 3$ A parábola intercepta o eixo x em dois pontos, pois $\Delta = 49 > 0$.

c) $y = -x^2 + x + 1$ A parábola intercepta o eixo x em dois pontos, pois $\Delta = 5 > 0$.

d) $y = 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1$
A parábola intercepta o eixo x em um único ponto, pois $\Delta = 0$.

4. Determine os vértices das parábolas que correspondem às funções dadas por:

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

b) $y = -x^2 + 5$ (0, 5)

5. a) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{2}\right\}$

5. Escreva o conjunto imagem das funções abaixo.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $g(x) = -x^2 + 5$
$\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

6. A parábola que corresponde à função quadrática $y = x^2 - mx + 3n$ passa pelos pontos $(3, -1)$ e $(2, -5)$. Determine os valores de m e n.

Em seguida, determine o vértice dessa parábola.

7. Considerando a função dada por $y = x^2 - x + 8$, classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) A função é negativa para todo x real. falsa

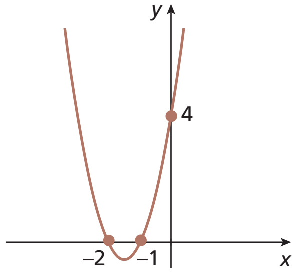
b) A função tem dois zeros reais distintos. falsa

c) A função é positiva para todo x real. verdadeira

d) A função tem um zero real duplo. falsa

e) A função não tem zeros reais. verdadeira

8. Dê a lei da função quadrática cujo gráfico é a parábola abaixo. $y = 2x^2 + 6x + 4$



ADILSON SECCO

9. Determine o valor de k para que a parábola correspondente à função quadrática g, sabendo que $g(x) = (k + 2)x^2 + (k^2 - 3)x + 5$, admita valor máximo em $x = 3$. Nessas condições, obtenha o valor máximo da função. $k = -3$; $y_V = 14$

10. Calcule o valor de t para que a função quadrática de lei $f(x) = (6 - 4t)x^2 + 4x - 6$ tenha valor máximo quando a abscissa do vértice for igual a 1. Em seguida, determine a ordenada do vértice. $t = 2$; $y_V = -4$

11. Determine a área máxima que pode ter um retângulo de perímetro igual a 48 cm. 144 cm^2

12. Esboce o gráfico correspondente a cada uma das funções dadas pelas leis abaixo. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y = -x^2 + 4x$ **b)** $y = 2x^2 - 5x + 2$

13. Usando um *software* de construção de gráfico, construa, em um mesmo plano cartesiano, as parábolas correspondentes às funções dadas pelas leis a seguir.

a) $y = 5x^2$ **c)** $y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = -5x^2$ **d)** $y = -\frac{1}{4}x^2$

- Que relação você observa entre a forma da parábola e o coeficiente de x^2? Ver resolução no Guia do professor.

14. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações.

a) $x^2 - 5x + 4 > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

b) $(3x^2 - 5x + 2) \cdot (-x^2 + 4x - 4) \geqslant 0$

c) $\frac{4x^2 + 3x - 1}{1 - x^2} \leqslant 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1 \text{ ou } x > 1\right\}$

d) $\frac{2}{x^2 - 1} \leqslant \frac{x}{x - 1}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$

15. O lucro de uma empresa é dado pela lei $L(x) = -x^2 + 8x - 7$, em que x é a quantidade vendida (em milhares de unidades) e L é o lucro (em milhares de reais).

a) Determine os valores de x para os quais o lucro é positivo. $1 < x < 7$ (em milhares de unidades)

b) Calcule a quantidade que se deve vender para obter lucro máximo. 4.000

c) Determine o lucro máximo. R$ 9.000,00

6. $m = 1$ e $n = -\frac{7}{3}$; $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$

14. b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x = 2\right\}$

16. Uma caixa tem dimensões 270 mm × 180 mm × 90 mm.

b) $A(x) = \dfrac{1.440x + 40.500 - x^2}{2}$ e $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 450\}$

TUNGPHOTO/SHUTTERSTOCK

Considere que, para produzir essa caixa, foi necessária uma folha de papelão de dimensões 450 mm por 540 mm e que alguns cantos dessa folha foram recortados para obter a planificação da caixa (figura I).

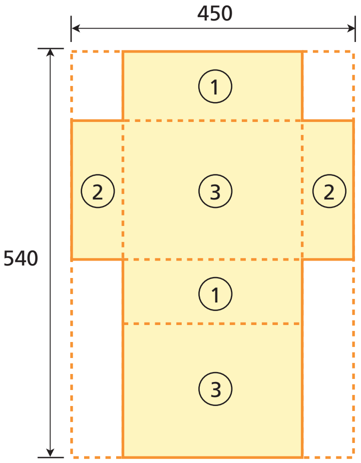


Figura I

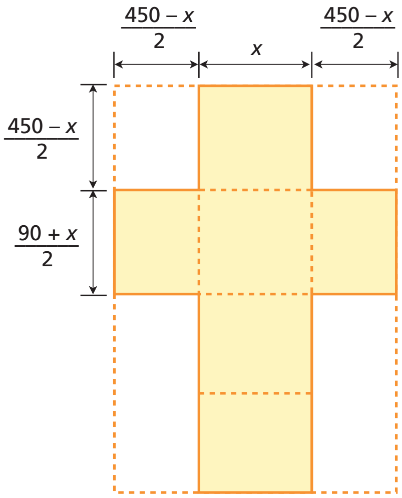


Figura II

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

① 48.600 mm^2 ② 32.400 mm^2 ③ 97.200 mm^2

a) Calcule a área de cada parte da planificação destacada na figura I.

b) Considere outra folha com as mesmas dimensões da folha da figura I, em que é feita a planificação de outra caixa (figura II). Determine a lei da função que relaciona a área A dessa planificação e a medida x indicada na figura II. Escreva o domínio dessa função.

17. (UFC-CE) Determine o valor de p real na função $f(x) = (p^2 - 1)x^2 + 2(p - 1)x + 1$ para que $f(x) > 0$, $\forall$ x real. $p > 1$

Aprofundamento

18. Classifique em verdadeira ou falsa cada sentença. Justifique as falsas. Ver resolução no Guia do professor.

a) As funções polinomiais do 2º grau de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são injetoras. falsa

b) As funções polinomiais do 2º grau de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são sobrejetoras. falsa

c) As funções polinomiais do 2º grau de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são bijetoras. falsa

19. (Unicamp-SP) Determine o número m de modo que o gráfico da função $y = x^2 + mx + 8 - m$ seja tangente ao eixo x. Faça o gráfico da solução (ou soluções) que você encontrar para o problema. $m = -8$ ou $m = 4$

Ver resolução no Guia do professor.

20. Existem parábolas que têm o vértice sobre o eixo y. Nos demais casos, o vértice pode estar à direita ou à esquerda desse eixo. Ver resolução no Guia do professor.

a) Quando a função é do tipo $y = x^2 + bx + c$, o que determina a posição do vértice em relação ao eixo y? Justifique.

b) E quando a função é do tipo $y = ax^2 + bx + c$? Justifique.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Para que uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$ seja quadrática, o coeficiente de x^2 deve ser: alternativa c

a) igual a zero.
b) positivo.
c) não nulo.
d) inexistente.

2. A concavidade da parábola dada por $y = (-m + 1)x^2 + nx + p$ está voltada para cima se, e somente se: alternativa b

a) $m > -1$
b) $m < 1$
c) $n > 0$
d) $p > 0$

3. Os zeros da função de lei $y = -x^2 + 9$ são: alternativa c

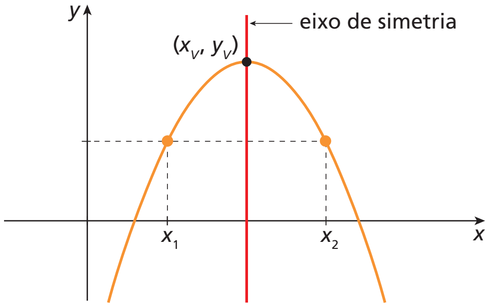
a) inexistentes.
b) iguais a 3.
c) 3 e -3.
d) iguais a 4,5.

4. A função dada por ______ é sempre positiva. alternativa d

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
b) $y = -x^2 + 1$
c) $y = x^2 + 3x$
d) $y = x^2 + \sqrt{3}$

5. Ao analisar o gráfico abaixo, da função quadrática *f*, concluímos que: alternativa c

a) $f(x_1) \neq f(x_2)$
b) $f(x_1) > f(x_2)$
c) $f(x_v) > f(x_2)$
d) $f(x_v) < f(x_1)$



ADILSON SECCO

6. Sabendo que o vértice da parábola dada por $y = x^2 - 4x + 3$ é o ponto $(2, -1)$, o conjunto imagem dessa função é: alternativa b

a) $\mathbb{R}$
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
d) $]-\infty, -1]$

7. Um carro percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento cuja lei da posição *s* (em metro) em função do tempo *t* (em segundo) é $s(t) = 4t - 2t^2$. No instante ______, o carro para e altera o sentido do movimento. alternativa d

a) 5 segundos
b) 30 minutos
c) 1 hora
d) 1 segundo

8. Um arquiteto iniciou a planta de uma casa desenhando um retângulo que representa o terreno. O perímetro do retângulo é 100 cm. Como cada centímetro do desenho equivale a 1 metro, então a área máxima do terreno é: alternativa a

a) 625 m²
b) 100 m²
c) 50 m²
d) 25 m²

9. A solução da inequação $\frac{x^2 - 1}{x} \leq 0$ é: alternativa a

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 0 < x \leq 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$
d) $S = \varnothing$

10. O domínio da função *f*, tal que

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 2x - 15}}$$, é: alternativa b

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 3\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 0 \text{ ou } x > 3\}$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$
d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Identificar uma função quadrática.	X	X	X	X						
Resolver situações-problema que envolvam funções quadráticas.							X	X		
Analisar o gráfico de uma função quadrática.		X		X	X	X				
Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.									X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	107 a 110	111 e 112	113 a 115	116 e 117	118 a 120	120 a 122	125 e 126	125 e 126	126 a 130	131

Capítulo 6

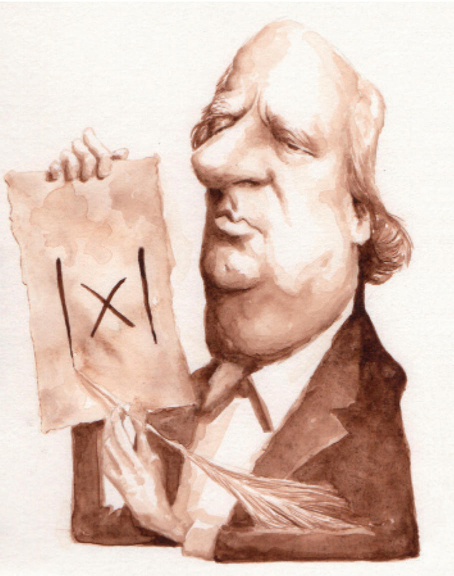
Função modular

1 Módulo ou valor absoluto de um número real

No século XIX, o conceito de função e sua nomenclatura já eram utilizados pelos matemáticos. Foi nesse período que o matemático suíço Jean Robert Argand (1768-1822) introduziu o conceito de módulo ou valor absoluto de um número. Mais tarde, o matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) introduziu a notação $|x|$.

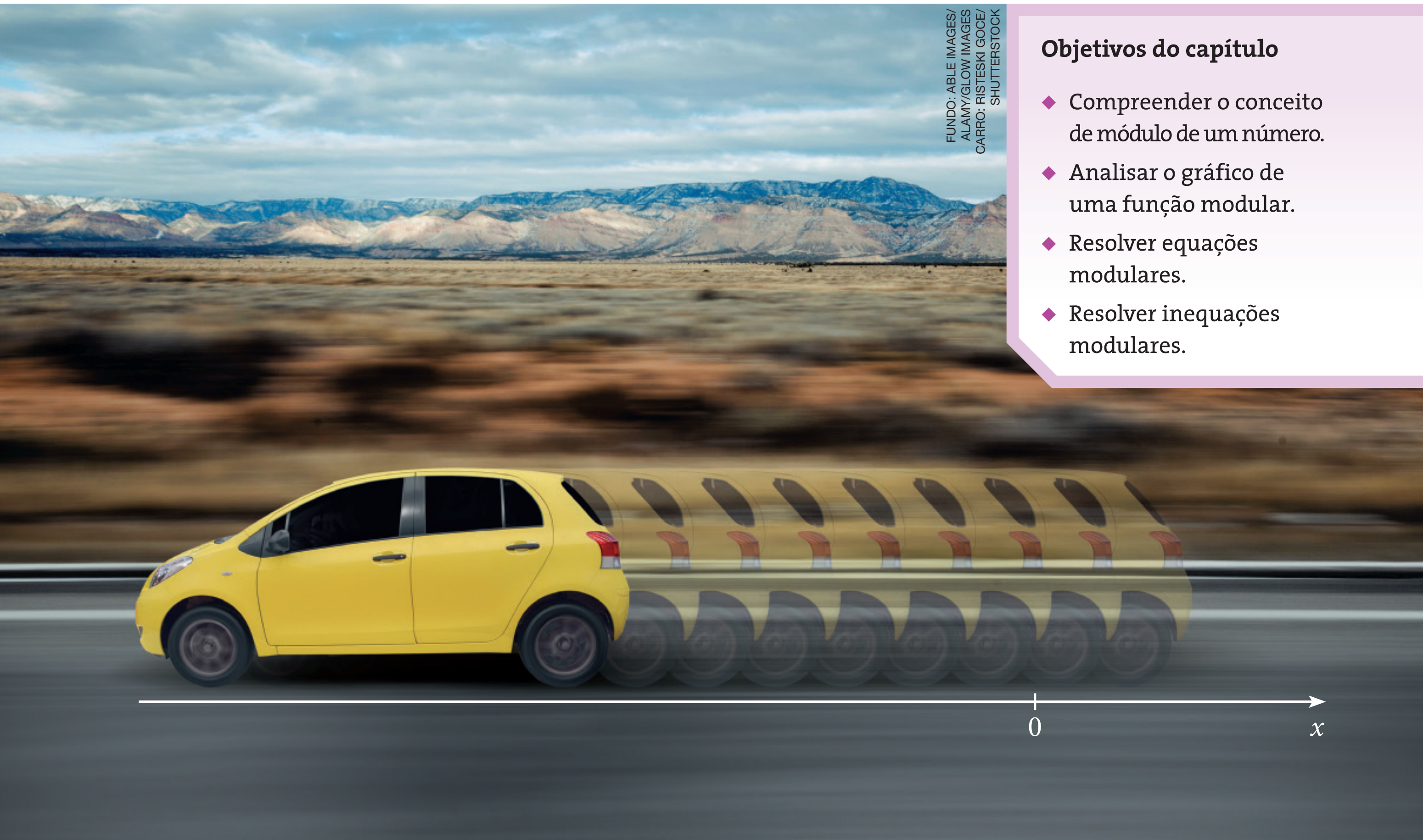
Atualmente, podemos encontrar o conceito de módulo aplicado em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, na verificação e inspeção de instrumentos de pesagem não automáticos com carga máxima até 1.000 kg, o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) estabelece que: “A diferença entre os resultados obtidos, ao curso de várias pesagens de uma mesma carga, não pode ser superior ao *valor absoluto* [isto é, ao *módulo*] do erro máximo admissível para o instrumento nesta carga”. (Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/>. Acesso em: 6 fev. 2016.)

Na Cinemática, lidamos com problemas em que, ao calcular a velocidade de um móvel, podemos obter resultado negativo, por exemplo, -120 km/h. Esse resultado significa que, em módulo ou valor absoluto, a velocidade do móvel é 120 km/h; o sinal negativo apenas indica que o móvel está no sentido contrário ao da trajetória, preestabelecido como positivo.



MANOHEAD

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.



FUNDO: ABLE IMAGES/ ALAMY/GLOW IMAGES CARRO: RISTESKI GOCE/ SHUTTERSTOCK

Objetivos do capítulo

- Compreender o conceito de módulo de um número.
- Analisar o gráfico de uma função modular.
- Resolver equações modulares.
- Resolver inequações modulares.

◆ Reflita

A sentença $\sqrt{x^2} = x$ é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$?

Não. A sentença é verdadeira para $x \geqslant 0$ e falsa para $x < 0$.
Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\sqrt{x^2} = |x|$.

O **módulo**, ou **valor absoluto**, de um número real *x*, indicado por $|x|$, é definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos

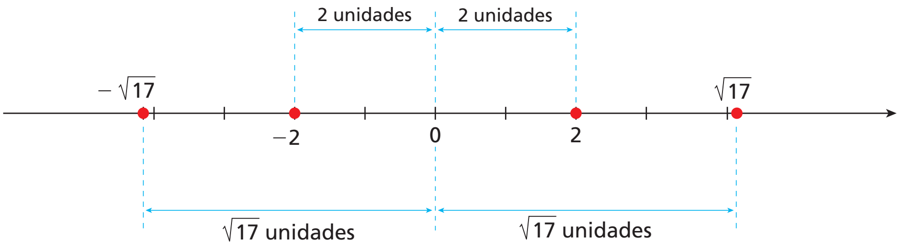
- $|4| = 4$
- $|0| = 0$
- $|0{,}25| = 0{,}25$
- $\left|\dfrac{5}{6}\right| = \dfrac{5}{6}$
- $|-4| = 4$
- $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

◆ Observação

Note que $|x| \geqslant 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, o módulo de um número real *x* corresponde, na reta real, à distância entre o ponto associado ao número *x* e a origem.

Exemplos



ADILSON SECCO

a) $|-\sqrt{17}| = \sqrt{17}$ (distância do ponto associado a $-\sqrt{17}$ à origem)

b) $|\sqrt{17}| = \sqrt{17}$ (distância do ponto associado a $\sqrt{17}$ à origem)

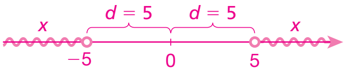
c) $|-2| = 2$ (distância do ponto associado a -2 à origem)

d) $|2| = 2$ (distância do ponto associado a 2 à origem)

◆ Reflita

Quais são os possíveis valores de *x* real, se $|x| > 5$?

Se $|x| > 5$, então a distância entre *x* e a origem, na reta dos números reais, é maior que 5:



ADILSON SECCO

Logo, $x > 5$ ou $x < -5$.

Exercícios resolvidos

R1. Determinar os possíveis valores reais de *x* para:

a) $|x| = 7$
b) $|x| = 0$
c) $|x| = -3$

▸ ***Resolução***

a) Se $|x| = 7$, então $x = 7$ ou $x = -7$.
Podemos verificar: $|7| = 7$ e $|-7| = 7$

b) Se $|x| = 0$, então $x = 0$, pois zero é o único número real cujo módulo é zero.

c) A sentença $|x| = -3$ é falsa para qualquer número real, pois o módulo de um número real nunca é negativo.

R2. Escreva as expressões, sem módulo, equivalentes a $|x + 1|$ para qualquer número real.

Resolução

Pela definição de módulo, temos duas possibilidades:

- $|x + 1| = x + 1$, se $x + 1 \geqslant 0$, ou seja, se $x \geqslant -1$
- $|x + 1| = -(x + 1)$, se $x + 1 < 0$, ou seja, se $x < -1$

Portanto: $|x + 1| = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant -1 \\ -x - 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

Reflita

Como podemos escrever a definição de módulo, ou valor absoluto, de um número real $-x$?

$|-x| = \begin{cases} -x, \text{ se } -x \geqslant 0, \text{ ou seja, se } x \leqslant 0 \\ x, \text{ se } -x < 0, \text{ ou seja, se } x > 0 \end{cases}$

R3. Escrever uma expressão equivalente a cada caso, sem usar módulo.

a) $|x - 5|$, para $x > 5$

b) $|x - 5| - |x - 3|$, para $x \in \mathbb{R}$

Resolução

a) Se $x > 5$, subtraindo 5 de cada um dos lados da desigualdade, temos: $x - 5 > 5 - 5 \Rightarrow x - 5 > 0$

Portanto: $|x - 5| = x - 5$, para $x > 5$

b) A expressão apresenta dois módulos: $|x - 5|$ e $|x - 3|$

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5, \text{ se } x - 5 \geqslant 0, \text{ ou seja, se } x \geqslant 5 \\ -x + 5, \text{ se } x - 5 < 0, \text{ ou seja, se } x < 5 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x - 3 \geqslant 0, \text{ ou seja, se } x \geqslant 3 \\ -x + 3, \text{ se } x - 3 < 0, \text{ ou seja, se } x < 3 \end{cases}$$

Assim, para $x \in \mathbb{R}$, devemos analisar três casos: $x < 3$, $3 \leqslant x < 5$ e $x \geqslant 5$

- Se $x < 3$, temos $x < 5$.

  Portanto:

  $|x - 5| - |x - 3| = -x + 5 - (-x + 3) = 2$
- Se $3 \leqslant x < 5$, temos $x < 5$ e $x \geqslant 3$.

  Portanto:

  $|x - 5| - |x - 3| = -x + 5 - (x - 3) = -2x + 8$
- Se $x \geqslant 5$, temos $x > 3$.

  Portanto:

  $|x - 5| - |x - 3| = x - 5 - (x - 3) = -2$

Logo:

$$|x - 5| - |x - 3| = \begin{cases} 2, \text{ se } x < 3 \\ -2x + 8, \text{ se } 3 \leqslant x < 5 \\ -2, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Observação

Podemos verificar os resultados obtidos. Vejamos o caso $x < 3$, por exemplo, para $x = 1$:

$|x - 5| - |x - 3| =$

$= |1 - 5| - |1 - 3| =$

$= |-4| - |-2| = 4 - 2 = 2$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Calcule o valor das expressões.

a) $|-3 + 2| + |7 - 10| - |5 - 8|$ 1

b) $|10 - 5 + 1| - |-14 - 18| + |10 - 48|$ 12

c) $|x|^2 - |x| + |x|$, para $x = -4$ 16

d) $|x^2|$ e $|x|^2$, para $x = -4$ 16 e 16

2. Determine os possíveis valores reais de x em cada caso.

a) $|x| = 16$ 16 ou −16

b) $x = |-8|$ 8

c) $|x| = \dfrac{49}{80}$ $\dfrac{49}{80}$ ou $-\dfrac{49}{80}$

d) $|x| = -1$ Não existe x real.

3. Escreva uma expressão, sem módulo, equivalente a cada caso.

a) $|x - 5| + |x - 4|$, para $x > 5$ $2x - 9$

b) $|x - 2| + |x - 5|$, para $2 < x < 5$ 3

c) $|x - 4| - |x - 6|$, para $x \in \mathbb{R}$

3. c) $\begin{cases} -2, \text{ para } x < 4 \\ 2x - 10, \text{ para } 4 \leqslant x < 6 \\ 2, \text{ para } x \geqslant 6 \end{cases}$

4. Sabendo que x é qualquer número real, qual é o maior valor que cada expressão pode assumir? Qual é o valor de x nessa situação?

a) $5 - |x|$ 5; $x = 0$

b) $10 - |x - 1|$ 10; $x = 1$

2 Função modular

Considerando qualquer número real x, sempre existe $|x|$, e ele é único. Assim, podemos definir uma função que associa qualquer número real com seu módulo.

Reflita

Qual é o conjunto imagem da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$?

Como o módulo de qualquer número real nunca é negativo, teremos sempre $f(x) \geqslant 0$. Logo, o conjunto imagem da função é: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$

Chama-se **função modular** a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = |x|, \text{ ou seja, } f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Há ainda funções que podem ser obtidas a partir da função modular. Observe, por exemplo, as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

- $f(x) = |x| - 3$
- $g(x) = \left|-\dfrac{1}{3}x + 1\right|$
- $h(x) = \left|\sqrt{2} - x^2\right| + 7$
- $i(x) = 9\,|x^2 + x|$
- $j(x) = |x| + |x + 1|$
- $k(x) = \dfrac{|x^2 - 6|}{5}$

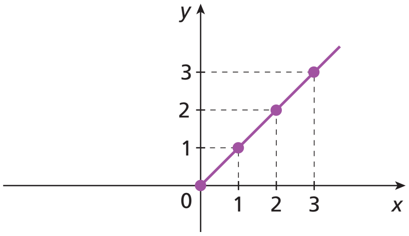
2.1 Gráfico da função modular

Seja a função modular f, com $f(x) = |x|$. Para obter alguns pontos do gráfico relativo a essa função, vamos atribuir valores para x e calcular as correspondentes imagens y, dividindo o processo em três etapas: gráfico para $x \geqslant 0$, gráfico para $x < 0$ e gráfico final.

Para $x \geqslant 0$, temos $f(x) = |x| = x$.

x	$y = f(x) = x$	(x, y)
0	$y = f(0) = 0$	$(0, 0)$
1	$y = f(1) = 1$	$(1, 1)$
2	$y = f(2) = 2$	$(2, 2)$
3	$y = f(3) = 3$	$(3, 3)$

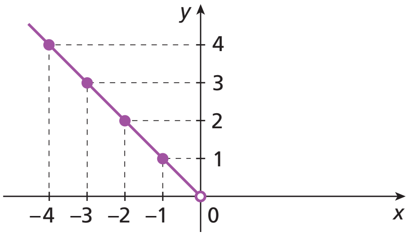
Gráfico de $f(x) = x$



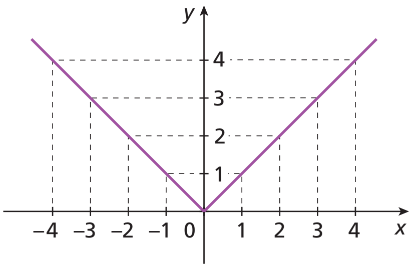
Para $x < 0$, temos $f(x) = |x| = -x$.

x	$y = f(x) = -x$	(x, y)
-1	$y = f(-1) = -(-1) = 1$	$(-1, 1)$
-2	$y = f(-2) = -(-2) = 2$	$(-2, 2)$
-3	$y = f(-3) = -(-3) = 3$	$(-3, 3)$
-4	$y = f(-4) = -(-4) = 4$	$(-4, 4)$

Gráfico de $f(x) = -x$



Reunindo os dois gráficos, formamos o gráfico da função modular f, de lei $f(x) = |x|$:

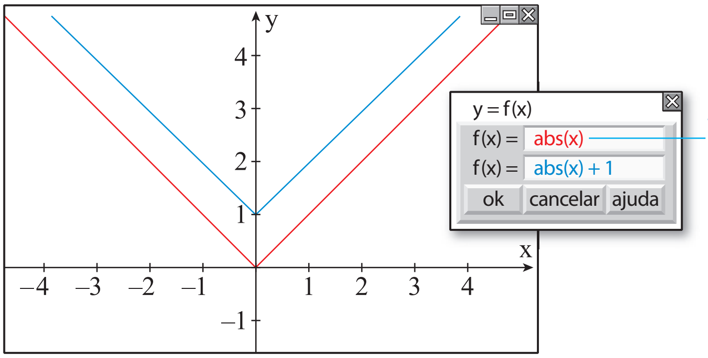


Observe que $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Como será o gráfico que representa a função g, dada por $g(x) = |x| + 1$?

Para responder a essa pergunta, vamos utilizar um *software* de construção de gráficos. Observe, no mesmo plano cartesiano, os gráficos da função de lei $f(x) = |x|$ (em vermelho), cuja construção vimos na página anterior, e da função de lei $g(x) = |x| + 1$ (em azul).



y = f(x)
f(x) = abs(x)
f(x) = abs(x) + 1

Como já vimos, cada *software* tem uma maneira diferente para escrever as leis das funções. Neste exemplo, temos: $|x| \rightarrow$ abs(x)

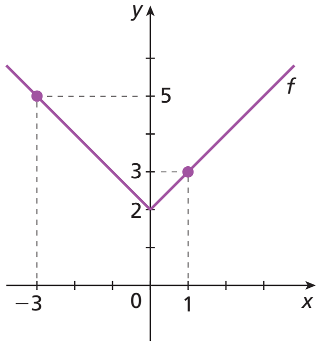
Note que o gráfico da função $g(x) = |x| + 1$ é o gráfico da função $f(x) = |x|$ transladado uma unidade para cima. Assim: $\text{Im}(g) = [1, +\infty[$

Seguindo esse mesmo raciocínio, como seria o gráfico da função $h(x) = |x| - 1$?

Seria o gráfico da função dada por $f(x) = |x|$ transladado uma unidade para baixo.

◆ Reflita

Observe o gráfico de uma função f.



- Para quais valores do domínio a função é negativa? nenhum
- Descubra qual é a lei de formação dessa função. $f(x) = |x| + 2$

Espera-se que o aluno perceba que o gráfico de f é o gráfico de $g(x) = |x|$ transladado duas unidades para cima.

Exercícios resolvidos

R4. Estudar o sinal da função h, tal que $h(x) = |x - 1|$, e verificar em quais intervalos ela é crescente e em quais é decrescente.

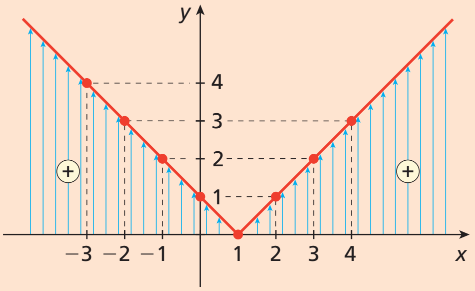
▸ ***Resolução***

Para estudar o sinal da função, vamos construir seu gráfico. Observando que a expressão $x - 1$ se anula para $x = 1$, faremos uma tabela para $x \geqslant 1$ e outra para $x < 1$.

Para $x \geqslant 1$, temos $h(x) = x - 1$, e para $x < 1$, temos $h(x) = -x + 1$.

x	$y = h(x) = x - 1$	(x, y)
1	$y = h(1) = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = h(2) = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = h(3) = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$y = h(4) = 4 - 1 = 3$	(4, 3)

x	$y = h(x) = -x + 1$	(x, y)
0	$y = h(0) = -(0) + 1 = 1$	(0, 1)
−1	$y = h(-1) = -(-1) + 1 = 2$	(−1, 2)
−2	$y = h(-2) = -(-2) + 1 = 3$	(−2, 3)
−3	$y = h(-3) = -(-3) + 1 = 4$	(−3, 4)



$\text{D}(h) = \mathbb{R}$

$\text{Im}(h) = \mathbb{R}_+$

Observe que o gráfico da função $h(x) = |x - 1|$ é o gráfico da função $f(x) = |x|$ transladado uma unidade para a direita.

Analisando o gráfico, concluímos que a função h:

- é positiva para $\mathbb{R} - \{1\}$;
- não tem valores negativos;
- é nula para $x = 1$;
- é decrescente em $]-\infty, 1]$;
- é crescente em $[1, +\infty[$.

Para construir os gráficos desses exercícios resolvidos, pode-se usar um *software* de construção de gráficos. Se achar conveniente, mostrar aos alunos como fazer isso.

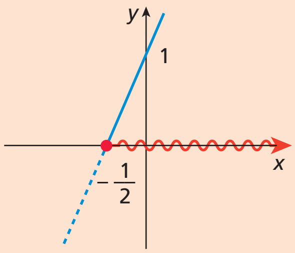
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R5. Construir o gráfico da função *f* dada por $f(x) = |2x + 1|$ e identificar o domínio e o conjunto imagem de *f*.

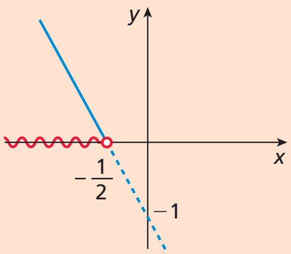
Resolução

Vamos traçar o gráfico de $f(x) = |g(x)|$ tendo como base o gráfico da função *g*.

1. Construímos o gráfico da função de lei $g(x) = 2x + 1$ e determinamos o intervalo em que a função *g* é positiva ou nula.
Para $x \geqslant -\frac{1}{2}$, o gráfico da função *f* segue a lei $y = 2x + 1$:

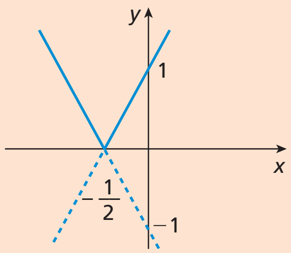


2. No intervalo $x < -\frac{1}{2}$, a função *g* é negativa. Então:
$y = |g(x)| = -g(x) = -(2x + 1)$
$y = -2x - 1$
Assim, para esse intervalo, a função *f* segue a lei $y = -2x - 1$:



3. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geqslant -\frac{1}{2} \\ -2x - 1, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

Portanto, o gráfico de *f* será dado por:



Podemos observar que o gráfico de *f* pode ser obtido a partir do gráfico de *g*, refletindo, em relação ao eixo *x*, o trecho do gráfico com ordenadas negativas (tornando-as positivas).
Com base no gráfico, observamos que $D(f) = \mathbb{R}$ e que $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

R6. Construir o gráfico da função dada por $f(x) = |x + 1| + |x + 2|$.

Resolução

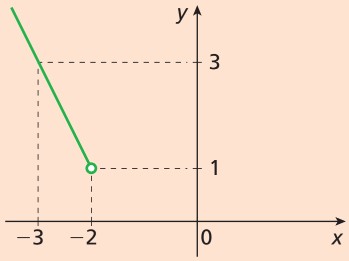
Primeiro, vamos determinar uma expressão equivalente a $|x + 1| + |x + 2|$, para $x \in \mathbb{R}$, sem usar módulo. Para isso, devemos analisar três casos:

• Se $x < -2$, temos: $x + 1 < 0$ e $x + 2 < 0$ Portanto: $|x + 1| + |x + 2| =$ $= -x - 1 + (-x - 2) =$ $= -2x - 3$	• Se $-2 \leqslant x < -1$, temos: $x + 1 < 0$ e $x + 2 \geqslant 0$ Portanto: $|x + 1| + |x + 2| =$ $= -x - 1 + (x + 2) = 1$	• Se $x \geqslant -1$, temos: $x + 1 \geqslant 0$ e $x + 2 > 0$ Portanto: $|x + 1| + |x + 2| =$ $= x + 1 + (x + 2) =$ $= 2x + 3$

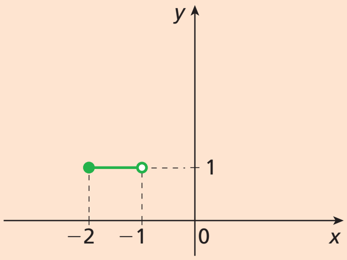
Logo: $f(x) = \begin{cases} -2x - 3, \text{ se } x < -2 \\ 1, \text{ se } -2 \leqslant x < -1 \\ 2x + 3, \text{ se } x \geqslant -1 \end{cases}$

Vamos construir o gráfico de *f* por partes.

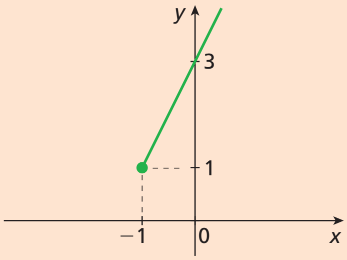
1. Para $x < -2$, o gráfico da função *f* segue a lei $y = -2x - 3$.



2. Para $-2 \leqslant x < -1$, o gráfico da função *f* segue a lei $y = 1$.



3. Para $x \geqslant -1$, o gráfico da função *f* segue a lei $y = 2x + 3$.

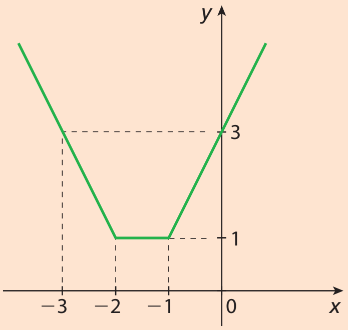


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reunindo as três partes em um mesmo plano cartesiano, obtemos o gráfico da função de lei $f(x) = |x + 1| + |x + 2|$.

8. a) Espera-se que os alunos percebam que, para determinar a abscissa dos pontos de intersecção, basta resolver $|x| = 2$. Logo, os pontos de intersecção são (2, 2) e (−2, 2).

b) Neste item, para encontrar os pontos de intersecção dos gráficos, pode-se resolver a equação modular (assunto que será estudado a seguir) determinada por $f(x) = g(x)$. Porém, espera-se que os alunos façam isso de maneira intuitiva (testando valores, por exemplo) e utilizando os conceitos até então estudados. Os pontos de intersecção são (−1, −3) e (7, −3).



◆ Observação

Os gráficos dos exercícios **R5** e **R6** poderiam ter sido traçados como no exercício **R4**, ou seja, identificando alguns pontos que pertencem ao gráfico em cada intervalo.

◆ Reflita

Com base no gráfico da função dada por $f(x) = |x + 1| + |x + 2|$ descreva como é o gráfico de g, com $g(x) = -(|x + 1| + |x + 2|)$.

É simétrico ao gráfico de *f* em relação ao eixo *x*.

Se achar conveniente, depois de fazer o exercício **6**, pedir aos alunos que usem um *software* de construção de gráficos e construam, em um mesmo plano cartesiano:

- o gráfico da função modular, definida por $f(x) = |x|$, e os gráficos de diversas funções dadas por $y = |x| + k$, com k constante e $k \in \mathbb{R}$.
- o gráfico da função modular, definida por $f(x) = |x|$, e os gráficos de diversas funções dadas por $y = |x + k|$, com k constante e $k \in \mathbb{R}$.

Pedir a eles que observem e discutam o que acontece com o gráfico da função modular quando adicionamos uma constante *k* dentro ou fora do módulo.

6. • O gráfico da função *g* corresponde ao gráfico de *f* transladado duas unidades para baixo; o gráfico da função *h* corresponde ao gráfico de *f* transladado duas unidades para a esquerda; o gráfico da função *i* corresponde ao gráfico de *f* transladado duas unidades para baixo e duas unidades para a esquerda.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

5. Dada a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com $f(x) = \dfrac{|4 - 3x|}{7}$, determine $\dfrac{f(p) - f(q)}{p - q}$, sendo $p = 1$ e $q = 9$. $\dfrac{11}{28}$

6. Construa o gráfico e identifique o conjunto imagem das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

a) $g(x) = |x| - 2$ $[-2, +\infty[$

b) $h(x) = |x + 2|$ $[0, +\infty[$

c) $i(x) = |x + 2| - 2$ $[-2, +\infty[$

- Como você descreveria o gráfico dessas funções tomando como referência o gráfico da função modular, definida por $f(x) = |x|$?

7. Construa o gráfico de cada uma das funções e verifique em quais intervalos as funções são crescentes e em quais são decrescentes.

Ver resolução no Guia do professor.

a) $g(x) = |x - 3| + |x - 1|$

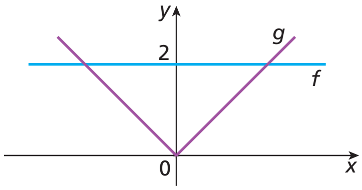
b) $q(x) = \begin{cases} |x + 5|, \text{ se } x < -1 \\ -2x, \text{ se } -1 \leqslant x < 2 \\ -1, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$

c) $p(x) = x \cdot |x|$

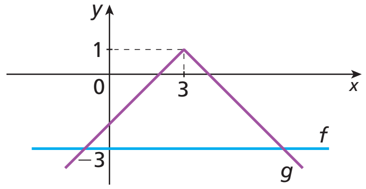
d) $i(x) = x^2 - 2 \cdot |x|$

8. Junte-se a um colega e encontrem uma estratégia para determinar os pontos de intersecção dos gráficos em cada item. Em seguida, determinem esses pontos.

a) $f(x) = 2$ e $g(x) = |x|$



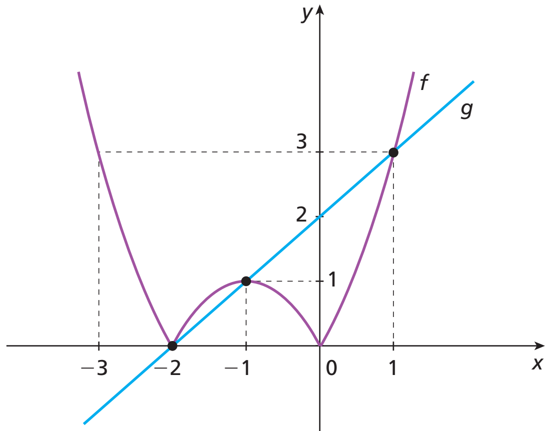
b) $f(x) = -3$ e $g(x) = -|x - 3| + 1$



9. Calcule a área do triângulo delimitado pelos gráficos das funções em cada item do exercício anterior.

a) 4 unidades de área **b)** 16 unidades de área

10. Considere os gráficos das funções f e g no mesmo plano cartesiano, com $f(x) = |x^2 + 2x|$ e $g(x) = x + 2$.



a) (−2, 0), (−1, 1) e (1, 3)
b) $-1 < x < 1$
c) $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$

a) Os gráficos se interceptam em quais pontos?

b) Determine em qual intervalo temos $f(x) < g(x)$.

c) Determine os valores de x tais que $f(x) \geqslant g(x)$.

d) Resolva a inequação $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Equações modulares

Chama-se **equação modular** uma equação que contém o módulo de uma incógnita.

Podemos resolver equações modulares aplicando as seguintes propriedades:

- Se $x \in \mathbb{R}$ e $m > 0$, vale: $|x| = m \Leftrightarrow x = m$ ou $x = -m$
- Se $m = 0$, vale: $|x| = m \Rightarrow x = m$
- Se $x, m \in \mathbb{R}$, vale: $|x| = |m| \Leftrightarrow x = m$ ou $x = -m$

Exemplo

Para a equação modular $|x - 9| = 3$, devemos ter:

$$\begin{array}{lcl} x - 9 = 3 & \text{ou} & x - 9 = -3 \\ x = 3 + 9 & & x = -3 + 9 \\ x = 12 & & x = 6 \end{array}$$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{6, 12\}$.

Reflita

Qual é a solução da equação $|x - 9| = -3$?

A equação não tem solução, pois o módulo de um número é sempre positivo ou nulo. Então: $S = \varnothing$

Exercícios resolvidos

R7. Resolver a equação modular $|3x - 9| = |x + 5|$.

Resolução

Considerando as propriedades vistas, temos:

$|3x - 9| = |x + 5| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 9 = x + 5$ ou $3x - 9 = -(x + 5)$

Resolvendo as equações:

$$\begin{array}{ll} 3x - 9 = x + 5 & 3x - 9 = -x - 5 \\ 3x - x = 5 + 9 & 3x + x = -5 + 9 \\ 2x = 14 & 4x = 4 \\ x = 7 & x = 1 \end{array}$$

Portanto, $S = \{1, 7\}$.

Podemos verificar essas soluções:

$|3 \cdot 1 - 9| = |1 + 5| \Rightarrow |-6| = |6|$

$|3 \cdot 7 - 9| = |7 + 5| \Rightarrow |12| = |12|$

R8. Determinar a solução da equação modular $4|x|^2 + 11|x| - 3 = 0$.

Resolução

Fazendo $|x| = y$, obtemos:

$4y^2 + 11y - 3 = 0$

$\Delta = (11)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 121 + 48 = 169$

$$y = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = \frac{-11 \pm 13}{8}$$

$$\therefore\ y = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ ou } y = \frac{-24}{8} = -3$$

Como $|x| = y$, então $y = -3$ não satisfaz a equação. Assim:

$$|x| = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ ou } x = \frac{1}{4}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

11. Resolva as equações modulares.

a) $|8x - 3| = |2x - 4|$

b) $20 \cdot |8x + 3| = 10$

c) $|x| = x - 7$

d) $4 + |2x^2 - x - 3| = 7$

e) $|x|^2 + 4|x| + 4 = 0$

f) $\left|\frac{x - 2}{x - 5}\right| = 3$, para $x \neq 5$

a) $S = \left\{-\frac{1}{6}, \frac{7}{10}\right\}$

b) $S = \left\{-\frac{5}{16}, -\frac{7}{16}\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \left\{-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \left\{\frac{13}{2}, \frac{17}{4}\right\}$

12. Considere a função dada por $g(x) = |x^2 - 5x + 4|$.

a) Qual é o valor de x para que $g(x) = -2$?

b) E para $g(x) = 2$?

a) Não existe x real.

b) 2 ou 3 ou $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ ou $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$

13. Escreva o domínio das funções e calcule o(s) zero(s) de cada uma.

a) $f(x) = |x|^2 - 5|x| + 7$

D(f) $= \mathbb{R}$; não possui zeros reais.

b) $g(x) = \frac{4}{|x|}$

D(g) $= \mathbb{R}^*$; não possui zeros reais.

c) $h(x) = \frac{4}{|x - 1|}$

D(h) $= \mathbb{R} - \{1\}$; não possui zeros reais.

d) $i(x) = \frac{10 - |x|}{|x| - 2}$

d) D(i) $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; zeros da função: -10 e 10

e) $j(x) = \sqrt{|x|}$

D(j) $= \mathbb{R}$; zero da função: 0

14. Quais as soluções reais da equação $|x| + |x - 1| = 4$?

Para resolver, siga os passos:

I. Escreva a expressão $|x| + |x - 1|$ sem usar módulo.

II. Iguale cada expressão encontrada a 4.

III. Resolva as equações obtidas.

$S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

4 Inequações modulares

Chama-se **inequação modular** uma inequação que contém o módulo de uma incógnita.

Exemplos

- $|x| \geqslant 28$
- $-\sqrt{7}\,|x| + 1 \leqslant 5$
- $|x| + 1 < 25$
- $8\,|x^2| > -x$
- $|4x - 3| \geqslant 2$
- $|-5x^2 - 0{,}2| < 0$

Sendo $a > 0$, resolvemos uma inequação modular da seguinte forma:

- $|x| > a \Rightarrow x < -a$ ou $x > a$
- $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

Para resolver outras inequações modulares, devemos efetuar algumas operações com conjuntos.

Exemplos

a) Vamos determinar os valores reais de x que satisfazem a inequação $|x - 1| < 3$.

Primeiro, escrevemos a inequação modular como uma inequação simultânea.

$$|x - 1| < 3 \Rightarrow \underbrace{-3 < \mathrlap{\overbrace{x - 1 < 3}^{\text{(II)}}}x - 1}_{\text{(I)}}\phantom{{} < 3}$$

Se julgar oportuno, apresentar outra maneira de resolver a inequação:
$|x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < x - 1 < 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3 \mathbf{+ 1} < x - 1 \mathbf{+ 1} < 3 \mathbf{+ 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 < x < 4$

Então, resolvemos cada uma das inequações.

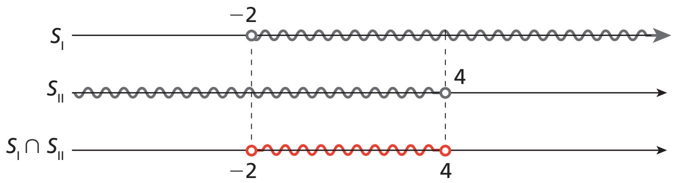
(I) $-3 < x - 1 \Rightarrow -3 + 1 < x \Rightarrow x > -2$

Portanto: $S_{\text{I}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

(II) $x - 1 < 3 \Rightarrow x < 3 + 1 \Rightarrow x < 4$

Portanto: $S_{\text{II}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

A solução final será a intersecção das soluções S_{I} e S_{II}:

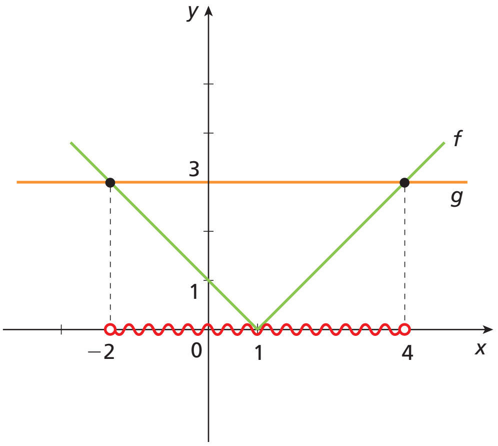


Logo, o conjunto solução da inequação $|x - 1| < 3$ é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$ ou $S = \,]-2, 4[$

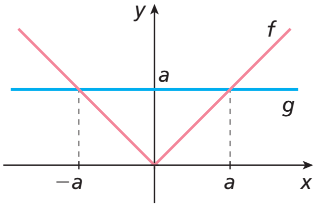
Podemos representar geometricamente essa situação.

Considerando $f(x) = |x - 1|$ e $g(x) = 3$, temos:



◆ Observação

Consideremos duas funções:
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = |x|$, e
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, em que $g(x) = a$, com $a > 0$.
Traçando o gráfico das duas funções em um mesmo plano cartesiano, obtém-se:



Analisando os gráficos, verificamos que:

- $f(x) > g(x) \Rightarrow x < -a$ ou $x > a$
  Ou seja:
  $|x| > a \Rightarrow x < -a$ ou $x > a$
- $f(x) < g(x) \Rightarrow -a < x < a$
  Ou seja: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

◆ Reflita

Qual é a solução da inequação $|x - 1| \geqslant 3$?

Espera-se que o aluno perceba que é o complementar de $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$, ou seja, é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 4\}$. Essa solução também pode ser encontrada observando o gráfico ao lado.

◆ Reflita

Qual seria a solução da inequação $|x - 1| < 3$, se $x \in \mathbb{Z}$? E se $x \in \mathbb{N}$?

$S = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; $S = \{0, 1, 2, 3\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $|2x + 5| > -x + 1$.

Para resolver essa inequação, estudamos o segundo membro da desigualdade, classificando-o nos seguintes casos: 1º caso, o segundo membro é negativo; 2º caso, o segundo membro é nulo; 3º caso, o segundo membro é positivo. A solução da inequação será a união das soluções obtidas em cada caso.

- **1º caso**: o segundo membro é negativo: $-x + 1 < 0 \Rightarrow x > 1$
  Quando o segundo membro for negativo, isto é, para $x > 1$, a desigualdade sempre será válida para qualquer x desse intervalo, pois o primeiro membro da inequação, $|2x + 5|$, sempre será maior que um número negativo.
  Assim, o conjunto solução para esse caso é: $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

- **2º caso**: o segundo membro é nulo: $-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
  Quando o segundo membro for nulo, ou seja, para $x = 1$, a desigualdade será verdadeira, pois:
  $|2 \cdot 1 + 5| > -1 + 1 \Rightarrow |7| > 0 \Rightarrow 7 > 0$ (verdadeiro)
  Assim, o conjunto solução para esse caso é: $S_2 = \{1\}$

- **3º caso**: o segundo membro é positivo: $-x + 1 > 0 \Rightarrow x < 1$
  Quando o segundo membro for positivo, ou seja, para $x < 1$, teremos:

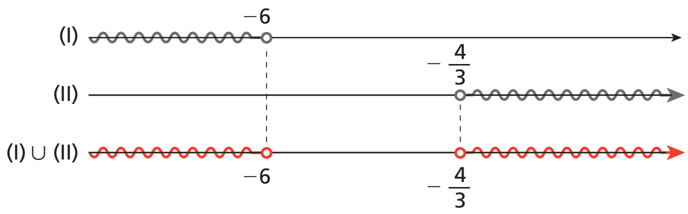
$$|2x + 5| > -x + 1 \Rightarrow \underbrace{2x + 5 < -(-x + 1)}_{\text{(I)}} \text{ ou } \underbrace{2x + 5 > -x + 1}_{\text{(II)}}$$

Resolvendo as duas inequações:

(I) $2x + 5 < -(-x + 1) \Rightarrow 2x + 5 < x - 1 \Rightarrow 2x - x < -1 - 5 \Rightarrow x < -6$

(II) $2x + 5 > -x + 1 \Rightarrow 2x + x > 1 - 5 \Rightarrow 3x > -4 \Rightarrow x > -\dfrac{4}{3}$

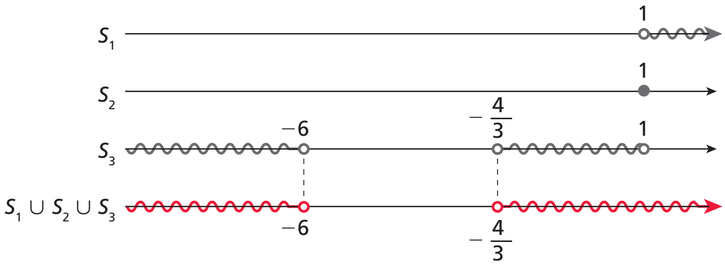
Como a inequação modular tem, nesse caso, duas possibilidades, a inequação (I) **ou** a inequação (II), a solução é a união das soluções parciais.



Lembrando que essa solução é válida para $x < 1$, temos:

$$S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -\frac{4}{3} < x < 1\right\}$$

Para finalizar, vamos unir as soluções encontradas em cada caso:



O conjunto solução da inequação $|2x + 5| > -x + 1$ é:

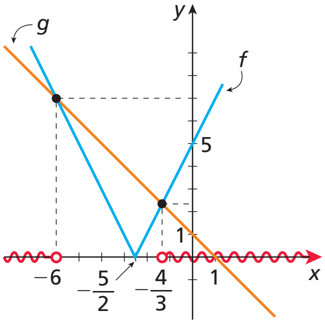
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > -\frac{4}{3}\right\}$$

◆ Observação

Também poderíamos resolver essa inequação graficamente. Para isso, consideramos:

$$\underbrace{|2x + 5|}_{f(x)} > \underbrace{-x + 1}_{g(x)}$$

E traçamos num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g:



Observando os trechos em que $f(x) > g(x)$, concluímos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > -\frac{4}{3}\right\}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4.1 Identificação do domínio de uma função por meio de inequações

Recorrendo ao estudo que fizemos das inequações, podemos identificar o domínio de algumas funções que apresentam restrição de domínio devido à natureza de sua lei.

Exemplo

Vamos identificar o domínio da função dada pela lei $y = \dfrac{-2x^2}{|3 - x^2|} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$.

Para isso, lembramos que:

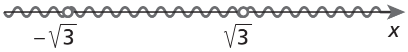
- em uma raiz quadrada, o radicando deve ser nulo ou positivo;
- em uma fração, o denominador deve ser diferente de zero.

◆ Observação

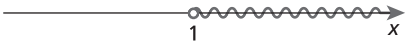
Nesse caso, como a raiz quadrada está no denominador, ela não pode ser nula.

Então, para $y = \dfrac{-2x^2}{|3 - x^2|} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$, temos: $\overbrace{|3 - x^2| \neq 0}^{\text{(I)}}$ e $\overbrace{x - 1 > 0}^{\text{(II)}}$

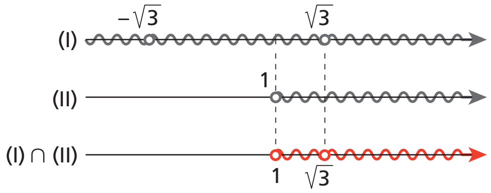
(I) $|3 - x^2| \neq 0 \Rightarrow 3 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\sqrt{3}$ e $x \neq \sqrt{3}$



(II) $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$



Como as condições (I) e (II) devem ocorrer juntas, temos de fazer a intersecção das soluções parciais para obter o domínio, ou seja, D = (I) ∩ (II).



Logo: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq \sqrt{3}\right\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

15. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações modulares.

a) $|3x - 5| < 4$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < 3\right\}$

b) $|x + 7| > 2x + 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

c) $|(x - 3)^2 + 2| \geqslant 3$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

d) $|x^2 - x - 6| \leqslant 2x$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant \frac{3 + \sqrt{33}}{2}\right\}$

16. Identifique o domínio de cada função.

a) $y = \dfrac{\sqrt{|x|}}{|x|}$ $D = \mathbb{R}^*$

b) $y = \left|\dfrac{-2x^2 + 4}{3x + 1}\right|$ $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $y = \dfrac{5x^2}{|16 - x^2|} - \sqrt{\dfrac{2}{|x + 1|}}$ $D = \mathbb{R} - \{-4, -1, 4\}$

17. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 > 7\}$. Determine $A \cap B$. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

18. Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações: $\begin{cases} \left|\dfrac{x - 1}{3}\right| < 6 \\ |2x - 3| > 7 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -17 < x < -2 \text{ ou } 5 < x < 19\}$

19. Determine o maior número inteiro x tal que: $\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| \geqslant 1$ 0

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

4. $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, \text{ se } x < 1 \\ 2x - 2, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

Aplicação

1. Calcule o valor das expressões.

a) $|1 - \sqrt{2}| - |7 - \sqrt{3}|$ $-8 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $|1 - |1 - \pi||$ $\pi - 2$

2. Quais os possíveis valores reais de x, se $|x| < 3$? $-3 < x < 3$

3. Qual é o valor da expressão $\frac{|x|}{x} + 3$ quando x é menor que zero? E quando x é maior que zero? 2; 4

4. Escreva a função dada por $f(x) = |x - |2 - x||$ como uma função definida por mais de uma sentença.

5. Escreva o conjunto imagem das funções.

a) $f(x) = |x + 4|$ $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

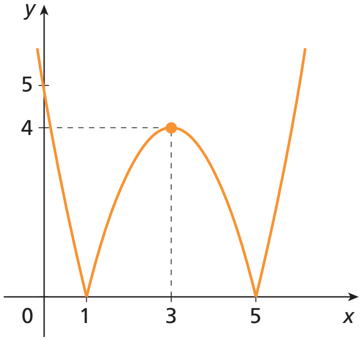
b) $g(x) = |x + 4| - 1$ $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

c) $h(x) = 1 - |x + 4|$ $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$

6. Construa o gráfico correspondente a cada uma das funções. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y = |x^2 - 16|$ **b)** $y = x + |x|$

7. Observe o gráfico da função de lei $f(x) = |-x^2 + 6x - 5|$. Ver resolução no Guia do professor.



a) Estude o sinal da função f.

b) Em quais intervalos a função é crescente e em quais é decrescente?

8. Verifique em quais pontos os gráficos das funções abaixo interceptam o eixo x.

a) $f(x) = |x^2 - 5x|$ (0, 0) e (5, 0) **b)** $g(x) = |\pi x + 8|$ $\left(-\frac{8}{\pi}, 0\right)$

9. (Uerj) Durante o ano de 1997 uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função

$L(x) = 50(|x - 100| + |x - 200|)$, em que $x = 1, 2, ..., 365$ corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais. Determine em que dias (x) do ano o lucro foi R$ 10.000,00. 50 e 250

10. Resolva as equações modulares a seguir.

a) $x^2 - 2|x| - 2 = 1$ **c)** $|3x - 9| = |x^2 - 9|$

b) $|x - 4| = |2x - 3|$ **d)** $\left|\frac{1 - |x|}{3}\right| = 1$

a) $S = \{-3, 3\}$ **b)** $S = \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$ **c)** $S = \{-6, 0, 3\}$ **d)** $S = \{-4, 4\}$

11. (Uerj) O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte função:

$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$, $t \in \mathbb{R}_+$

Nela, V é o volume medido em m^3 após t horas, contadas a partir das 8 h de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante. 10 h e 11 h

12. (UFSCar-SP) A fórmula de conversão da temperatura na escala Fahrenheit (t_F) para a temperatura na escala Celsius (t_C) é $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$.

Dada a temperatura em Fahrenheit, pode-se obter um valor aproximado da temperatura na escala Celsius ($\overline{t_C}$) pela fórmula prática $\overline{t_C} = \frac{1}{2}(t_F - 32)$.

Se o erro absoluto E, cometido pela fórmula prática, é dado por $E = |t_C - \overline{t_C}|$, pede-se:

a) Determine o intervalo de variação de t_F para que o erro absoluto seja menor que 50° Fahrenheit. $-868 < t_F < 932$

b) Construa o gráfico do erro absoluto E em função da temperatura t_F, em Fahrenheit. Ver resolução no Guia do professor.

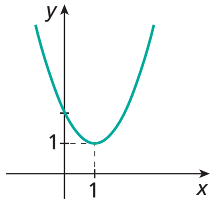
Aprofundamento

13. Determine k real para que -1 seja o valor mínimo da função quadrática dada por $f(x) = x^2 - 2x + |k - 1|$. 1

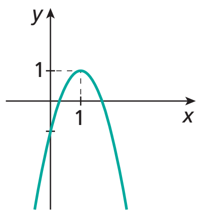
14. Determine o valor real de m de modo que o gráfico da função quadrática de lei $y = x^2 + mx + |5 - m|$ tangencie o eixo x. $-2 + 2\sqrt{6}$ ou $-2 - 2\sqrt{6}$

15. (Fuvest-SP) O módulo $|x|$ de um número real x é definido por $|x| = x$, se $x \geqslant 0$, e $|x| = -x$, se $x < 0$. Das alternativas abaixo, a que melhor representa o gráfico da função $f(x) = x|x| - 2x + 2$ é: alternativa e

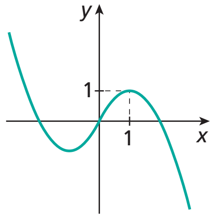
a)



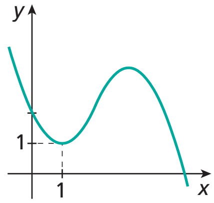
b)



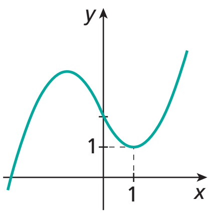
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $|5 - 8| = -3$ falsa

b) $\sqrt{3^2} = |3|$ verdadeira

c) $\left|-1 + \frac{1}{3}\right| = \left|1 - \frac{1}{3}\right|$ verdadeira

d) $|-5 + 3| = |-5| + |3|$ falsa

2. Determine uma expressão equivalente a $|x + 2| - |x - 3|$, sem o módulo, para:

a) $x < -2$ -5

b) $-2 \leqslant x < 3$ $2x - 1$

c) $x \geqslant 3$ 5

d) $x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} -5, \text{ se } x < -2 \\ 2x - 1, \text{ se } -2 \leqslant x < 3 \\ 5, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$

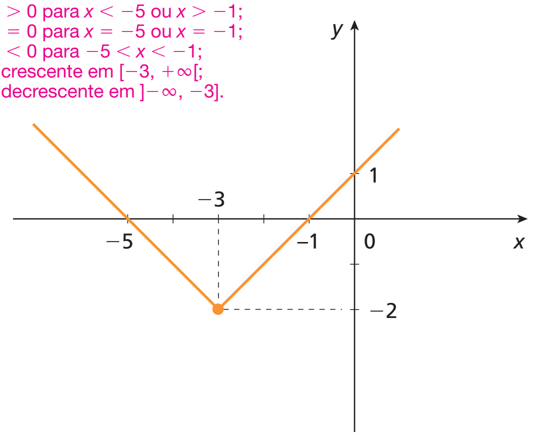
3. Construa o gráfico da função f, com $f(x) = |x^2 - 1|$, e identifique o domínio e o conjunto imagem de f.

Ver resolução no Guia do Professor.

4. Estude o sinal da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representada abaixo e verifique em quais intervalos ela é crescente e em quais intervalos é decrescente.

$f(x) = |x + 3| - 2$

$f(x) > 0$ para $x < -5$ ou $x > -1$;
$f(x) = 0$ para $x = -5$ ou $x = -1$;
$f(x) < 0$ para $-5 < x < -1$;
f é crescente em $[-3, +\infty[$;
f é decrescente em $]-\infty, -3]$.



5. Dada a função de lei $g(x) = |x^2 - x + 3|$, classifique as afirmações em verdadeira ou falsa.

a) A função é negativa para algum x real. falsa

b) A função tem zeros reais. falsa

c) A função é positiva para todo x real. verdadeira

d) O gráfico de g não intercepta o eixo x. verdadeira

6. Que valores de x real tornam cada sentença verdadeira?

a) $|x - 7| = 5$ 12 ou 2

b) $|2x + 7| = -2$ Não existe x real.

c) $|4x + 5| = 0$ $-\frac{5}{4}$

d) $|x^2 - 3| = -1$ Não existe x real.

7. Determine as soluções das equações modulares.

a) $x + |x - 1| = 7$ $S = \{4\}$

b) $\left|\frac{x - 1}{-4 + x}\right| = 6$ $S = \left\{\frac{23}{5}, \frac{25}{7}\right\}$

c) $3|x| + x = 4$ $S = \{-2, 1\}$

d) $7|x|^2 + 2|x| = 0$ $S = \{0\}$

8. Identifique o domínio de cada função.

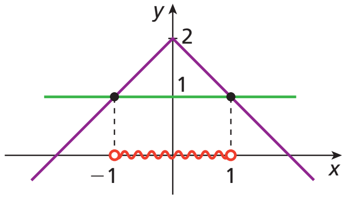
a) $y = \frac{\sqrt{|x| - 2}}{x^2 - 1}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

b) $y = \frac{|x - \sqrt{-x}|}{\sqrt{|-x|}}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

9. Escreva uma inequação modular cuja solução seja a indicada na figura a seguir. Resposta possível: $-|x| + 2 > 1$



Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Compreender o conceito de módulo de um número.	X	X							
Analisar o gráfico de uma função modular.			X	X	X				X
Resolver equações modulares.						X	X		
Resolver inequações modulares.								X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	135 a 137	135 a 137	138 a 141	138 a 141	138 a 141	142	142	143 a 145	138 a 141 143 e 144

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 7

Função exponencial

Objetivos do capítulo

- Efetuar as operações de potenciação e radiciação.
- Identificar uma função exponencial.
- Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.
- Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.
- Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.

Este infográfico permite um desenvolvimento interdisciplinar com Geografia, História e Biologia.

Explosão demográfica

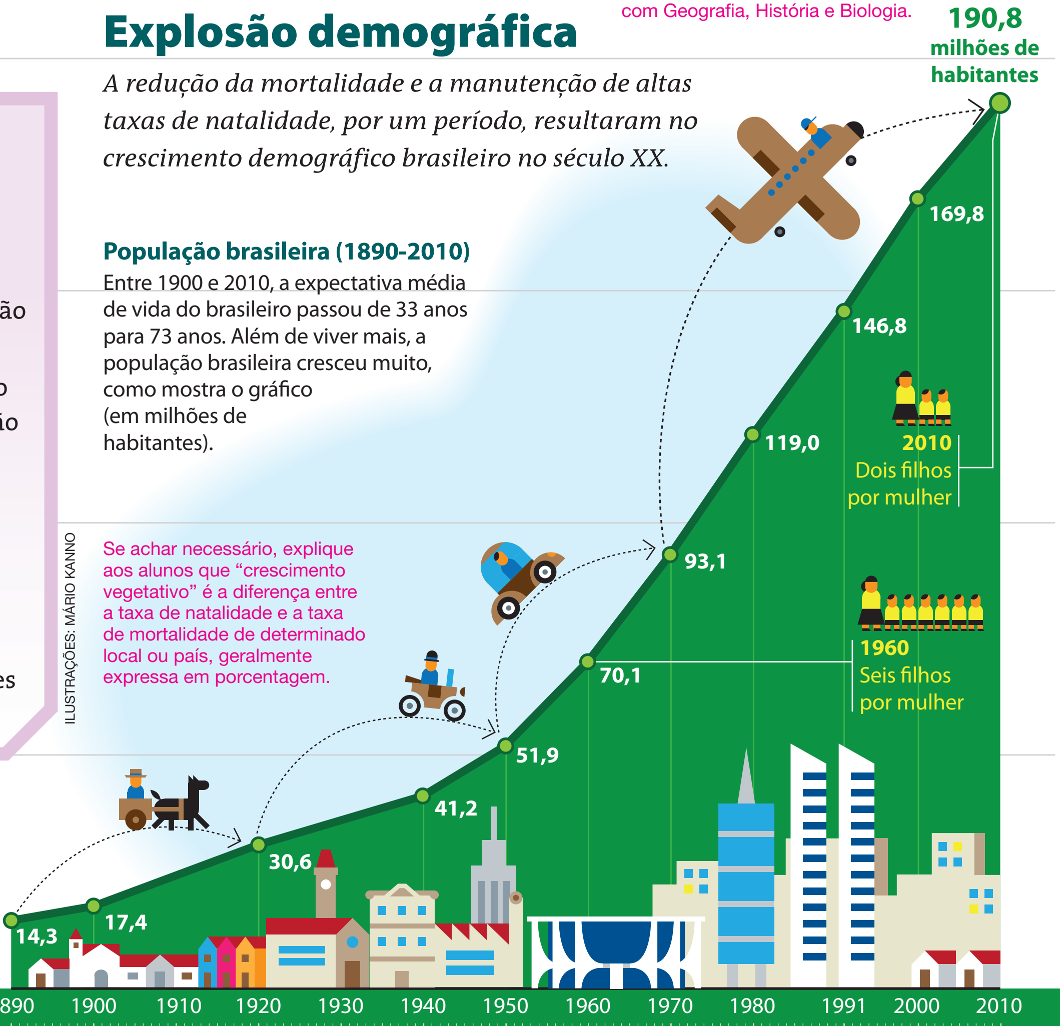
A redução da mortalidade e a manutenção de altas taxas de natalidade, por um período, resultaram no crescimento demográfico brasileiro no século XX.

População brasileira (1890-2010)

Entre 1900 e 2010, a expectativa média de vida do brasileiro passou de 33 anos para 73 anos. Além de viver mais, a população brasileira cresceu muito, como mostra o gráfico (em milhões de habitantes).

Se achar necessário, explique aos alunos que "crescimento vegetativo" é a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade de determinado local ou país, geralmente expressa em porcentagem.

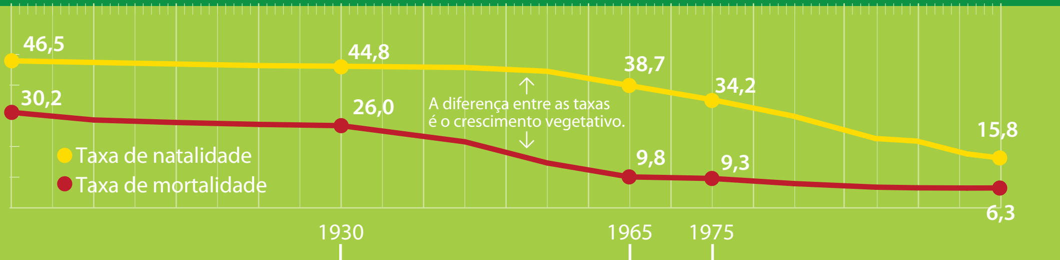
ILUSTRAÇÕES: MÁRIO KANNO



Fonte: IBGE. *Censo Demográfico 2010*: Resultados do Universo. Tabela 2, p. 31. IBGE. Série CD109: Taxas brutas de natalidade e de mortalidade. Disponível em: <http://seriesestatisticas.ibge.gov.br>. Acesso em: 31 ago. 2015.

Taxas de natalidade e mortalidade (em 1.000 habitantes)

Além da imigração, a população de um país varia em função de dois fatores: natalidade e mortalidade.



1930 • Os avanços na Medicina e a melhoria na qualidade de vida fizeram cair a taxa de mortalidade.

1965 • Com a entrada no mercado de trabalho e a possibilidade de controlar a natalidade (anticoncepcionais e cirurgias), as brasileiras optaram por ter menos filhos.

1975 • O crescimento vegetativo vem diminuindo desde os anos 1970, mas a população continuou crescendo porque a maior parte das pessoas está em idade fértil (15 a 49 anos).

1 Introdução ao estudo da função exponencial

A função exponencial é usada para descrever muitos fenômenos da vida real, tais como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos (por meio de técnicas que utilizam a radioatividade), crescimento ou decrescimento de uma população etc. Nessas descrições, a função matemática fornece apenas valores aproximados para os valores reais, pois os fenômenos são influenciados por diversos fatores, que podem não estar sendo considerados na função matemática.

É possível, por exemplo, com base em dados de 2010, fazer uma estimativa da população para o ano 2030. De acordo com o Censo Demográfico do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2010, o Brasil tinha 190.755.799 habitantes, e a taxa de crescimento anual, entre 2000 e 2010, foi de 1,17%. Se essa taxa se mantiver constante até 2030, teremos as seguintes estimativas:

Ano	População estimada
2010	190.755.799
2011	$190.755.799 + 0{,}0117 \cdot 190.755.799 \simeq 192.987.642$
2012	$192.987.642 + 0{,}0117 \cdot 192.987.642 \simeq 195.245.597$
⋮	⋮
2029	$235.184.800 + 0{,}0117 \cdot 235.184.800 \simeq 237.936.462$
2030	$237.936.462 + 0{,}0117 \cdot 237.936.462 \simeq 240.720.318$

◆ Observação

Nesta página do IBGE, há diversas projeções para a população do Brasil e dos estados brasileiros: <www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 31 ago. 2015.

Portanto, se a taxa de crescimento permanecer constante até 2030, a população brasileira será de aproximadamente 240.720.318 habitantes.

Note que é extremamente trabalhoso construir uma tabela como essa, pois cada valor depende do cálculo da população do ano anterior. Então, para encontrar a população de 2030, precisamos calcular a população ano a ano, de 2010 até 2030.

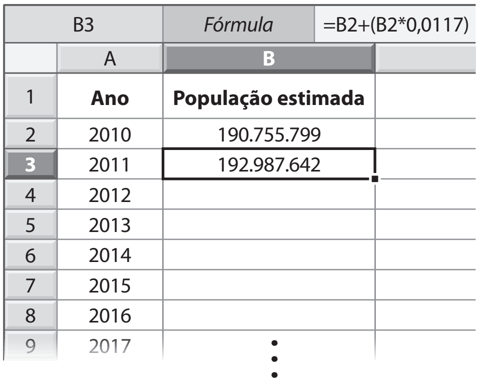
Uma maneira de facilitar esses cálculos seria usar uma planilha eletrônica. Observe:

Inicialmente, digitamos a população de 2010 em uma célula da planilha, na célula B2, por exemplo. Então, na célula B3, digitamos:

=B2+(B2*0,0117)

Essa fórmula nos fornece a população estimada em 2011.

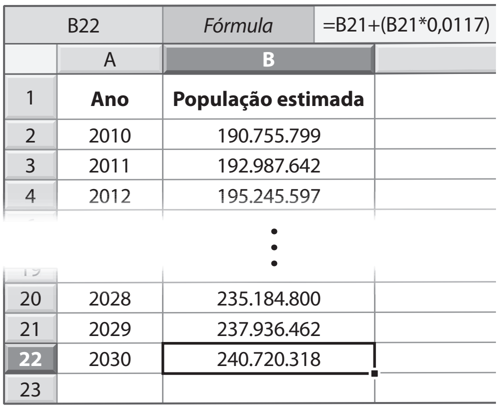
Ao selecionar a célula B3 e arrastar a seleção até a célula correspondente à população em 2030, obtemos as populações estimadas em cada um dos anos.



B3 | *Fórmula* | =B2+(B2*0,0117)

	A	B
1	**Ano**	**População estimada**
2	2010	190.755.799
3	2011	192.987.642
4	2012	
5	2013	
6	2014	
7	2015	
8	2016	
9	2017	

⋮



B22 | *Fórmula* | =B21+(B21*0,0117)

	A	B
1	**Ano**	**População estimada**
2	2010	190.755.799
3	2011	192.987.642
4	2012	195.245.597
⋮		⋮
20	2028	235.184.800
21	2029	237.936.462
22	2030	240.720.318
23		

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Além da planilha eletrônica, outra forma de representar os mesmos cálculos é perceber uma regularidade entre os valores de cada linha. Veja:

Este tipo de situação-problema e a generalização do raciocínio usado para resolvê-lo serão mais explorados nos capítulos "Sequências", neste volume, e "Matemática financeira", no volume do 3º ano.

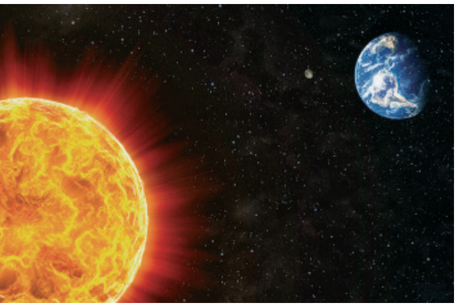
Ano	População estimada
2010	190.755.799
2011	$190.755.799 \cdot (1 + 0{,}0117)^1 \simeq 192.987.642$
2012	$190.755.799 \cdot (1 + 0{,}0117)^2 \simeq 195.245.597$
⋮	⋮
2029	$190.755.799 \cdot (1 + 0{,}0117)^{19} \simeq 237.936.462$
2030	$190.755.799 \cdot (1 + 0{,}0117)^{20} \simeq 240.720.318$
x	$190.755.799 \cdot (1 + 0{,}0117)^{x - 2010}$

Percebendo a regularidade é mais fácil calcular a população em cada ano, pois esse cálculo não dependerá do cálculo da população do ano anterior. Com essa nova tabela, também é mais fácil perceber que o crescimento é exponencial: a população de cada ano é o produto da constante 190.755.799 por uma potência de base 1,0117.

É importante ressaltar que as estimativas nem sempre revelam os fatos da realidade com muita precisão. Por exemplo, para estimar a população brasileira em 2030, consideramos que a taxa de crescimento ficará constante; no entanto, o IBGE aponta que essa taxa ainda está diminuindo. Isso significa que, em 2030, a população real será menor que a população estimada.

A seguir, ampliaremos o estudo da potenciação e de suas propriedades, o que nos auxiliará no estudo da função exponencial e na resolução de equações e inequações exponenciais.

1.1 Potência de expoente natural


NASA

Montagem representando o Sol e a Terra, 2012.

As potências são úteis para representar números muito grandes, como a distância da Terra ao Sol, ou números muito pequenos, como a massa de um átomo.

A distância da Terra ao Sol, por exemplo, é de aproximadamente 150.000.000.000 m e pode ser representada por: $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

Nesse tipo de notação, utilizamos uma potência de base 10.

Dados um número real a e um número natural n, com $n \geqslant 2$, a potência de base a e expoente n é indicada por a^n e é o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Para $n = 1$ e $n = 0$, definimos: $a^1 = a$ $a^0 = 1$, para $a \neq 0$

Exemplos

a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{64}$

b) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

c) $\left(\sqrt{7}\right)^1 = \sqrt{7}$

d) $(-1)^0 = 1$

Dados dois números reais a e b e dois números naturais m e n, temos as seguintes propriedades:

1ª propriedade: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2ª propriedade: $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$ (para $a \neq 0$ e $m > n$)

3ª propriedade: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

4ª propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (para $b \neq 0$)

5ª propriedade: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos

a) $5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^5 = 5^{2+3}$

b) $\frac{8^5}{8^3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}} = 8^2 = 8^{5-3}$

c) $(8 \cdot 9)^2 = (8 \cdot 9) \cdot (8 \cdot 9) = 8^2 \cdot 9^2$

d) $(7 : 3)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{7^2}{3^2}$

e) $(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4} = 3^{2 \cdot 4}$

◆ Observação

Dados um número real a e dois números naturais m e n, temos, em geral, $a^{m^n} \neq (a^m)^n$. Por exemplo, $3^{1^2} \neq (3^1)^2$, pois: $3^{1^2} = 3^1 = 3$ e $(3^1)^2 = 3^2 = 9$

Observe que, para $a \neq 0$, definimos a^0 de modo que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ seja válida para m ou n (ou ambos) nulos. Por exemplo: $4^0 \cdot 4^7 = 1 \cdot 4^7 = 4^7 = 4^{0+7}$

1.2 Potência de expoente inteiro negativo

Dados um número real a, diferente de zero, e um número natural n, vamos definir a^{-n} de forma que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, que vale quando m e n são números naturais, seja preservada quando m e n são números inteiros.

Em particular, para $a \neq 0$, devemos ter: $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$

Portanto, $a^n \cdot a^{-n} = 1$ implica definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ para } a \neq 0$$

Dizemos que a^{-n} é o **inverso** de a^n.

◆ Observação

Se m e n são números inteiros, então, para a 2ª propriedade, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, basta que a seja diferente de 0 (m não precisa ser maior que n).

Exemplos

a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

As cinco propriedades enunciadas para as potências de expoentes naturais são válidas para quaisquer expoentes m e n inteiros.

◆ Observação

Nas Ciências, é usual escrever números muito grandes ou muito pequenos, que tenham representação decimal finita, em **notação científica**. Nesse tipo de notação, o número é escrito na forma:

$N \cdot 10^m$, em que $1 \leq N < 10$ e m é um número inteiro

CLOUDS HILL IMAGING LTD/SCIENCE PHOTO LIBRARY/GETTY IMAGES

Microscopia eletrônica do ácaro *Dermatophagoides pteronyssinus*, ampliado 45×, colorizada artificialmente. Esse ácaro mede aproximadamente $3 \cdot 10^{-4}$ m de comprimento.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Calcule as potências a seguir.

a) $(-2)^4$ 16

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$ $-\frac{1}{125}$

c) 0^{10} 0

d) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$ $\frac{81}{64}$

e) 3^0 1

f) π^1 π

2. Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $10^9 \cdot 10^{-4}$ 100.000

b) $\frac{13^{19}}{13^{17}}$ 169

c) $(-5)^{15} : (-5)^{12}$ -125

d) $2^{-1} \cdot 2^{-2}$ $\frac{1}{8}$

e) $(10 \cdot 7)^2$ 4.900

f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ $-\frac{27}{125}$

g) $(2^3)^2$ 64

h) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^5\right)^0$ 1

3. A vida na Terra teve início há cerca de 4,6 bilhões de anos, mas os primeiros ancestrais dos seres humanos só surgiram há aproximadamente 4 milhões de anos. O *Homo habilis*, um de nossos ancestrais, surgiu há cerca de 2 milhões e 200 mil anos. O *Homo erectus* apareceu há apenas 2 milhões de anos. Nossa espécie, o *Homo sapiens*, surgiu entre 400 mil e 100 mil anos atrás, o que significa que nossa existência é relativamente recente.

Qual é a diferença de tempo, em ano, entre o surgimento do *Homo habilis* e do *Homo erectus*, aproximadamente? alternativa b

a) $4 \cdot 10^5$

b) $2 \cdot 10^5$

c) $1{,}8 \cdot 10^6$

d) $2 \cdot 10^6$

e) $4{,}1 \cdot 10^6$

1.3 Potência de expoente racional

Raiz enésima

Dado um número *a*, real e não negativo, e um número natural *n*, com $n \geqslant 1$, a **raiz enésima** de *a* é definida como o número *b*, real e não negativo, tal que $b^n = a$. Escrevemos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geqslant 0$$

O símbolo $\sqrt{}$ é conhecido como **radical**, *a* é o **radicando** e *n* é o **índice**.

Observações

- Se *n* for um número ímpar, pode-se definir $\sqrt[n]{a} = b$, em que *a* e *b* são números reais negativos tais que $b^n = a$.

  Veja:

  $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$

- Se *n* for um número par e *a* um número real negativo, não é possível definir $\sqrt[n]{a}$ em $\mathbb{R}$, pois nesse caso não há um número real *b* tal que $b^n = a$.

  Veja:

  $\sqrt{-9}$ não está definida nos números reais, pois não existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = -9$.

Observação

Em geral, o índice 2 é omitido na representação de raízes. Assim:

$\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$

Exemplos

a) $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

c) $\sqrt[4]{0} = 0$, pois $0^4 = 0$

d) $\sqrt[10]{1.024} = 2$, pois $2^{10} = 1.024$

A raiz enésima de um número apresenta as seguintes propriedades (sendo *a* e *b* reais não negativos, *m* inteiro, *n* e *p* naturais e não nulos):

1ª propriedade: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2ª propriedade: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (para $b \neq 0$)

3ª propriedade: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

4ª propriedade: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$

5ª propriedade: $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exercícios resolvidos

R1. Simplificar a expressão: $\sqrt{12} + \sqrt{108}$

▸ ***Resolução***

Fatorando os radicandos, temos:

$$\sqrt{12} + \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} =$$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} =$$
$$= 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Logo: $\sqrt{12} + \sqrt{108} = 8\sqrt{3}$

R2. Efetuar a racionalização do denominador da expressão: $\dfrac{5}{\sqrt{3} + 2}$

▸ ***Resolução***

Para racionalizar é necessário eliminar as raízes do denominador de uma expressão. No caso da expressão apresentada, deve-se fazer as seguintes manipulações:

$$\frac{5}{\sqrt{3} + 2} = \frac{5}{\sqrt{3} + 2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 2} =$$
$$= \frac{5\left(\sqrt{3} - 2\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2^2} = \frac{5\sqrt{3} - 10}{3 - 4} = \frac{5\sqrt{3} - 10}{-1} =$$
$$= 10 - 5\sqrt{3}$$

Logo: $\dfrac{5}{\sqrt{3} + 2} = 10 - 5\sqrt{3}$

◆ Definição de potência de expoente racional

Dados um número real positivo a e um número racional $\dfrac{p}{q}$ (em que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$), definimos:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemplos

a) $7^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{7^2} = \sqrt[9]{49}$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$

c) $\left(\sqrt{11}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{11}\right)^2} = \sqrt[3]{11}$

d) $\left[(-5)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

◆ Observação

No cálculo da raiz quadrada do quadrado de um número a, observe que: $\sqrt{a^2} = |a|$

Por exemplo:

$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

Qualquer número negativo pode ser elevado a um expoente inteiro. Contudo, quando se trata de expoentes racionais, há restrições. Por exemplo, algumas potências de base $a < 0$ estão definidas em $\mathbb{R}$; outras, não. Veja:

- $(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5$
- $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

As cinco propriedades enunciadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes racionais.

Exercício resolvido

R3. Calcular o valor de x sendo: $x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$

▸ ***Resolução***

$$x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = 3\sqrt{3}$$

Portanto, x vale $3\sqrt{3}$.

1.4 Potência de expoente irracional

Sendo *a* um número real positivo e *x* um número irracional, podemos estimar uma potência a^x por meio de aproximações, conforme mostra o exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

R4. Entre quais números inteiros está $3^{\sqrt{2}}$?

▶ ***Resolução***

Temos: $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$, pois $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$. Então, $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$, ou seja, $3^{\sqrt{2}}$ situa-se entre os números inteiros 3 e 9.

As cinco propriedades estudadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes irracionais.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

4. Determine o valor de:

a) $\sqrt{1{,}69}$ 1,3 **b)** $\sqrt[3]{-1{,}728}$ −1,2 **c)** $81^{\frac{1}{2}}$ 9 **d)** $4^{\frac{2}{3}}$ $2\sqrt[3]{2}$

5. Efetue as operações e determine o resultado ao final.

a) $121^{0{,}9} : 121^{0{,}4}$ 11

b) $(0{,}3)^8 \cdot (0{,}3)^{-7} : (0{,}3)^{-2}$ 0,027

c) $\dfrac{(-3)^{\frac{1}{3}}}{(-3)^2 \cdot (-3)^{-3}}$ $-3\sqrt[3]{-3}$

d) $\left[(-32)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{4}{25}}$ 4

6. Simplifique as expressões.

a) $\sqrt{50} - \sqrt{8}$ $3\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{80} + \sqrt{180}$ $10\sqrt{5}$

7. Racionalize o denominador das expressões a seguir.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 3}$ $\dfrac{-\sqrt{3} - 3}{3}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

8. Determine entre quais números inteiros a potência $5^{\sqrt{2}}$ se encontra. entre 5 e 25

2 Função exponencial

Acompanhe a situação a seguir.

A principal forma de multiplicação das bactérias é a divisão binária. Nesse tipo de divisão, o material genético é duplicado, e a bactéria se divide ao meio, originando duas novas bactérias idênticas a ela.

DR. TONY BRAIN/ SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

Bactéria *E.coli* em processo de divisão binária. Imagem ampliada 24.390×, colorizada artificialmente.

CULTURE CREATIVE/AFP

A Microbiologia é o estudo dos microrganismos, ou seja, de seres vivos que só podem ser vistos por meio de microscópios, como vírus, bactérias e alguns fungos.

Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, duplica a cada 20 minutos, quantas bactérias existirão após 2 horas e 40 minutos?

Após um período de 20 minutos, teremos 2 bactérias. Após dois períodos de 20 minutos, ou seja, 40 minutos, teremos 4 bactérias. Vamos fazer um esquema:

1 período de 20 min → 2 bactérias → 2^1
2 períodos de 20 min → 4 bactérias → 2^2
3 períodos de 20 min → 8 bactérias → 2^3
4 períodos de 20 min → 16 bactérias → 2^4

Então, após 2 horas e 40 minutos, ou seja, após 8 períodos de 20 minutos, teremos $2^8 = 256$ bactérias.

Da mesma maneira, após x períodos de 20 minutos, o número n de bactérias será dado por $n = 2^x$. Esse é um exemplo de função em que a variável está no expoente.

> Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ chama-se **função exponencial** de base a quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = (0{,}7)^x$

c) $h(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$

d) $i(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$

Em uma função exponencial de lei $f(x) = a^x$, note que a base a deve ser positiva e diferente de 1, pois:

- se $a = 1$, então f é uma função constante igual a 1.
- se $a = 0$ e $x < 0$, então a^x não está definida; portanto, f também não está.
- se $a = 0$ e $x > 0$, então f é uma função constante igual a 0.
- se $a < 0$, então f não está definida para todo x real. Por exemplo:

  se $a = -4$, então $f(x) = (-4)^x$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

◆ Observação

Existem funções que podem ser obtidas a partir da função exponencial. Por exemplo:

$f(x) = 3^{2x+1}$

$g(x) = 5 \cdot 4^x$

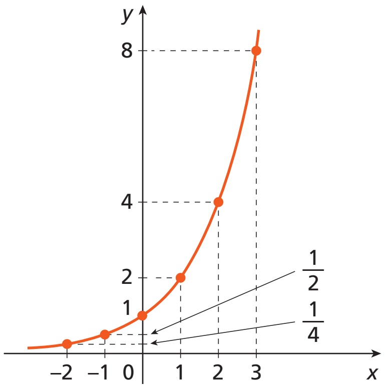
$h(x) = 2^x - 1$

2.1 Gráfico da função exponencial

Observe a construção dos gráficos das funções exponenciais dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

- $f(x) = 2^x$

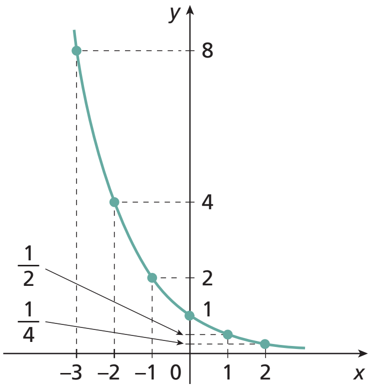
x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



D(f) = $\mathbb{R}$
Im(f) = $\mathbb{R}_+^*$

- $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	$g(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$



D(g) = $\mathbb{R}$
Im(g) = $\mathbb{R}_+^*$

O gráfico de qualquer função exponencial cuja lei é $f(x) = a^x$ é uma curva que tem aspecto semelhante ao dos gráficos apresentados acima e intercepta o eixo y no ponto (0, 1).

Observe que os gráficos das funções se aproximam do eixo x, mas não o cruzam nem encostam nele. Por isso, a reta $y = 0$ é chamada de **assíntota** dos gráficos.

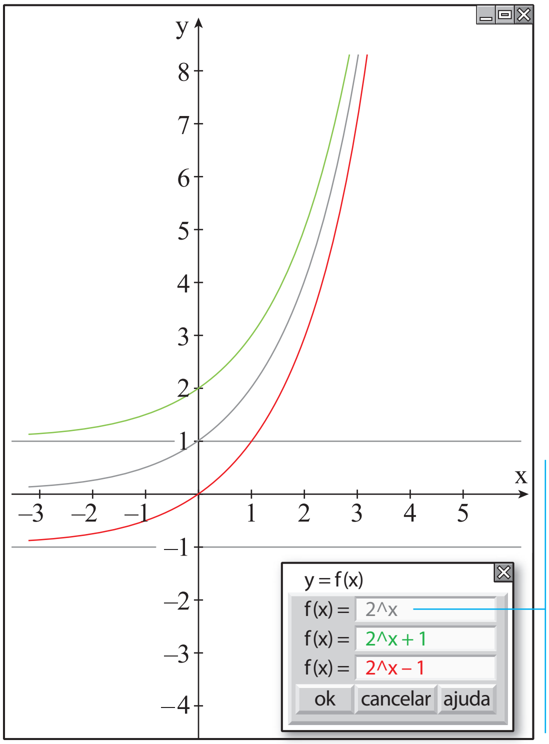
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

As funções obtidas a partir da função exponencial nem sempre têm essas características. Em um *software* de construção de gráficos, vamos construir, por exemplo, os gráficos das funções f (em cinza), i (em verde) e h (em vermelho), tais que $f(x) = 2^x$, $i(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = 2^x - 1$.

Note que:

- o gráfico da função $i(x) = 2^x + 1$ é o gráfico da função f transladado 1 unidade para cima;
- o gráfico da função $h(x) = 2^x - 1$ é o gráfico da função f transladado 1 unidade para baixo.

Observe que o gráfico da função h cruza os eixos x e y no ponto (0, 0), o domínio de h é $D(h) = \mathbb{R}$ e sua imagem é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -1\}$. A assíntota do gráfico de h é a reta $y = -1$.



y = f(x)
f(x) = 2^x
f(x) = 2^x + 1
f(x) = 2^x – 1

Como já vimos, cada *software* tem uma maneira diferente para escrever as expressões que representam as funções. Neste exemplo, para indicar "2 elevado a x", escrevemos: 2^x

◆ Reflita

Qual é o domínio e o conjunto imagem da função $i(x) = 2^x + 1$? Em qual ponto o gráfico da função i corta o eixo y? Qual é sua assíntota?

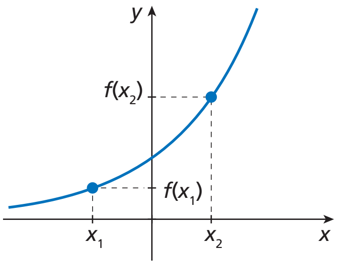
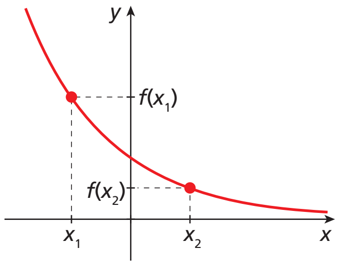
$D(i) = \mathbb{R}$; $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$;
ponto: (0, 2); assíntota: $y = 1$

◆ Crescimento e decrescimento de uma função exponencial

Analisando as tabelas de valores e os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, apresentados na página anterior, temos:

- quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $f(x) = 2^x$ também aumentam. Isso ocorre porque a base a é maior que 1 ($a = 2$). Portanto, a função f é **crescente**.
- quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ diminuem. Isso ocorre porque a base a está entre 0 e 1 $\left(a = \frac{1}{2}\right)$. Portanto, a função g é **decrescente**.

De modo geral, temos:

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

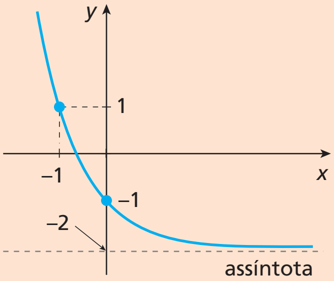
Exemplos

- $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
  g é decrescente
- $h(x) = (0{,}4)^x$
  h é decrescente
- $i(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$
  i é crescente

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R5. Observar o gráfico da função f, dada por $f(x) = a \cdot 3^{-x} + b$, e determinar os valores de a e b.



▶ ***Resolução***

Os pontos $(-1, 1)$ e $(0, -1)$ pertencem ao gráfico de f.

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 1$

Assim: $1 = a \cdot 3^{-(-1)} + b \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = a \cdot 3 + b$ (I)

Para $x = 0$, temos: $f(0) = -1$

Assim: $-1 = a \cdot 3^{-(0)} + b \Rightarrow -1 = a \cdot 1 + b$ (II)

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos: $a = 1$ e $b = -2$

Portanto, $f(x) = 3^{-x} - 2$, ou seja: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

◆ Observação

Nesse caso, a assíntota do gráfico é a reta $y = -2$, pois o gráfico se aproxima cada vez mais dessa reta, sem tocá-la.

Para $f(x) \leqslant -2$, teríamos:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 \leqslant -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 0$

Isso é um absurdo, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ é sempre maior que zero.

◆ Reflita

Por que, neste caso, $f(x)$ não pode ser menor ou igual a -2?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

9. Construa o gráfico das funções exponenciais a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $i(x) = 4^x$

10. Associe cada uma das leis de funções a seguir à sua respectiva representação gráfica. Se achar conveniente, use um *software* de construção de gráficos para conferir sua resposta.

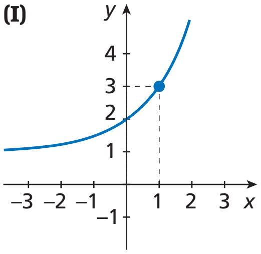
a) $f(x) = 3^{x+1}$ III

b) $g(x) = 2^x + 1$ I

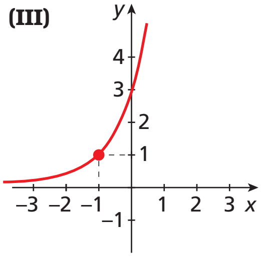
c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ IV

d) $i(x) = 4^{x-1}$ II

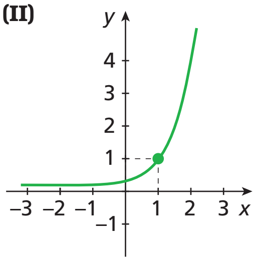
(I)



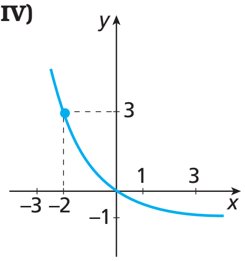
(III)



(II)



(IV)



11. Qual é a imagem da função $f(x) = 2^x + 4$? Se achar conveniente, use um *software* de construção de gráficos para ajudar na resolução.
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$

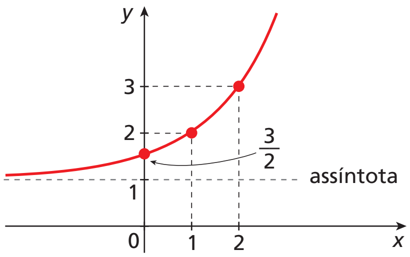
12. Classifique as funções dadas pelas leis abaixo em crescente ou decrescente.

a) $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ crescente

b) $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ decrescente

c) $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$ crescente

13. Observe abaixo o gráfico da função f, dada por $f(x) = 2^{x+a} + b$, e determine os valores de a e b, sabendo que $a = -b$. $a = -1$ e $b = 1$



14. Dada a função f, tal que $f(x) = 5^x$, determine:

a) $\frac{f(4)}{f(3)}$ 5

b) $\frac{f(3)}{f(2)}$ 5

c) $\frac{f(2)}{f(1)}$ 5

d) $\frac{f(1)}{f(0)}$ 5

- O que você observa nos resultados encontrados?
- Refaça os itens anteriores empregando a lei $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Ver resolução no Guia do professor.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor da base a da função? De que forma?
- Então, a que conclusão chegamos?

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.2 Aplicações da função exponencial

São muitas as áreas do conhecimento que fazem uso de funções do tipo exponencial para resolver situações recorrentes: Engenharia, Biologia, Geologia, Finanças, entre outras.

Exemplos

O regime de juro composto e a obtenção de suas fórmulas serão estudados no capítulo "Matemática financeira", no volume do 3º ano.

a) Um capital de R$ 100,00 foi investido em uma aplicação financeira que rende 2% ao mês. Podemos utilizar a expressão $M(t) = 100 \cdot 1{,}02^t$ para calcular o saldo M dessa aplicação após t meses.

Para $t = 1$, temos: $M(1) = 100 \cdot 1{,}02^1 \Rightarrow M(1) = 102$

Portanto, após 1 mês o saldo será de R$ 102,00.

Para $t = 12$, temos: $M(12) = 100 \cdot 1{,}02^{12} \Rightarrow M(12) \simeq 126{,}82$

Logo, após 1 ano o saldo será aproximadamente de R$ 126,82.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Viaduto do Chá, no centro da cidade de São Paulo, 2014.

b) Em determinada cidade, o número de habitantes é dado pela função H, sendo $H(r) = k \cdot 2^{3r}$, em que k é constante e r (que é o raio de distância a partir do centro dessa cidade) é positivo e dado em quilômetro.

Sabendo que existem 12.288 habitantes em um raio de 4 km contados desde o centro, quantos habitantes há em um raio de 6 km?

Empregando a função dada, podemos descobrir o valor da constante k:

$H(r) = k \cdot 2^{3r}$

$$12.288 = k \cdot 2^{3 \cdot 4} \Rightarrow 12.288 = k \cdot 2^{12} \Rightarrow k = \frac{12.288}{2^{12}} \Rightarrow k = \frac{12.288}{4.096} \Rightarrow k = 3$$

Assim, para calcular o número de habitantes que há em um raio de 6 km, substituímos a constante k por 3 e o raio r por 6:

$H(r) = k \cdot 2^{3r} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{3 \cdot 6} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{18} \Rightarrow H(6) = 786.432$

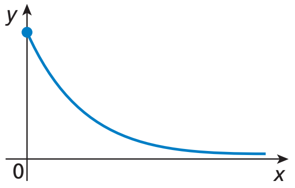
Portanto, há 786.432 pessoas em um raio de 6 km.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

18. d) $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 6\}$;
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leqslant y \leqslant 15.000\}$

15. A radioatividade é a propriedade que algumas substâncias têm de emitir radiações. Observe o gráfico da função f, sendo $f(x) = a^x$, com $a \neq 1$, que representa a radioatividade y de determinado minério em função do tempo x.



Agora, responda às questões.

a) A radioatividade está aumentando ou diminuindo? Por quê? Diminuindo, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

b) Esse minério deixará de ser radioativo em algum momento? Por quê? Não, porque a curva não corta o eixo x.

c) Quais os possíveis valores de a? $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

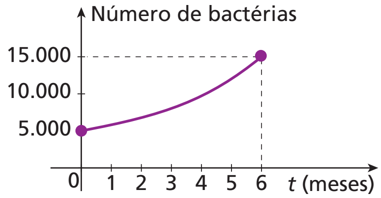
16. Certo montante pode ser calculado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que C é o capital, i é a taxa corrente e t é o tempo. Com um capital de R$ 20.000,00, a uma taxa anual de 12% ($i = 0{,}12$), qual será o montante após 3 anos? R$ 28.098,56

17. Segundo a lei de resfriamento do cientista inglês Isaac Newton (1643-1727), a temperatura de um corpo diminui exponencialmente. Por exemplo, sob certas condições, a temperatura T de batatas assadas, após saírem do forno, em grau Celsius, é dada por $T = 20 + 160 \cdot e^{-6t}$, em que $e \simeq 2{,}7$ e t é o tempo decorrido, em hora.

a) Qual era a temperatura das batatas quando saíram do forno? 180 °C

b) Com o auxílio de uma calculadora, calcule a temperatura das batatas 30 minutos após saírem do forno. $\simeq$ 28 °C

18. Em uma pesquisa, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias no decorrer de 6 meses.



a) Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa? 5.000 bactérias

b) Após 6 meses, qual é a quantidade total de bactérias? 15.000 bactérias

c) Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(t) = k \cdot a^t$, determine os valores de a e de k. $a = \sqrt[6]{3}$ e $k = 5.000$

d) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?

e) Qual é o número de bactérias após 3 meses? $\simeq$ 8.650 bactérias

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Equações exponenciais e sistemas

Equações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **equações exponenciais**.

Exemplos

- $2^x = 7$
- $5^{-x} = \sqrt{5}$
- $14^{x+9} = \left(\frac{1}{28}\right)^{-x} + 2$

◆ Reflita

Entre quais números inteiros consecutivos está x para que $2^x = 20$?

Como $2^4 < 20 < 2^5$, temos: $4 < x < 5$

Podemos resolver algumas dessas equações escrevendo ambos os membros da igualdade como potências de mesma base a (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e aplicando a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Exercícios resolvidos

R6. Resolver a equação exponencial $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27}$.

▸ ***Resolução***

Primeiro, vamos escrever os membros da equação em uma mesma base:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27} \Rightarrow (3^{-1})^x = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = (3^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}}$$

Logo: $-x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Portanto, $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

R7. Resolver a equação $4^x + 4 \cdot 2^x = 5$.

▸ ***Resolução***

$4^x + 4 \cdot 2^x = 5 \Rightarrow (2^2)^x + 4 \cdot 2^x - 5 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 4 \cdot (2^x) - 5 = 0$

Escrevendo $2^x = y$, temos: $y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -5$

Como $y = 2^x$, temos:

- $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$
- $2^x = -5$ (não existe x real que satisfaça essa equação)

Portanto, $S = \{0\}$.

◆ Reflita

Sejam $a, b, x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b < 0$. Por que não existe x real que satisfaça a equação $a^x = b$?

Porque, para todo $a > 0$ e todo x real, temos $a^x > 0$.

R8. Calcular x e y no sistema de equações: $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \frac{1}{2} \\ 7^{x+y} = 1 \end{cases}$

▸ ***Resolução***

Primeiro, vamos desenvolver cada uma das equações.

- $2^x \cdot 4^y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \cdot (2^2)^y = 2^{-1} \Rightarrow 2^x \cdot 2^{2y} = 2^{-1} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2^{x+2y} = 2^{-1} \Rightarrow x + 2y = -1$ (I)
- $7^{x+y} = 1 \Rightarrow 7^{x+y} = 7^0 \Rightarrow x + y = 0$ (II)

Agora, resolveremos o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -1$$

Portanto, $S = \{(1, -1)\}$.

◆ Observação

Note que a solução do sistema é o par ordenado $(1, -1)$, em que $x = 1$ e $y = -1$, e não os números 1 e -1.

R9. Determinar o ponto de intersecção dos gráficos das funções: $f(x) = \frac{1}{2^{x+1}}$ e $g(x) = 4^{x+1}$

▶ ***Resolução***

Para que os gráficos tenham um ponto em comum, deve existir pelo menos um valor de x tal que as imagens desse valor pelas duas funções coincidam, ou seja, $f(x) = g(x)$. Assim:

$$\frac{1}{2^{x+1}} = 4^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = (2^2)^{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2^{-1})^{x+1} = 2^{2x+2} \Rightarrow 2^{-x-1} = 2^{2x+2}$$

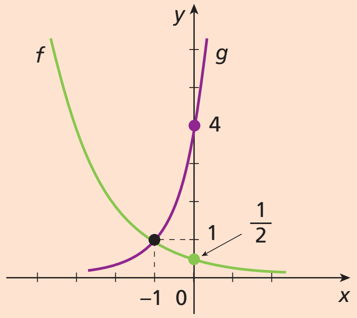
Portanto: $-x - 1 = 2x + 2 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Para $x = -1$, temos:

$f(-1) = g(-1) = 4^{-1+1} = 4^0 = 1$

Logo, o ponto de intersecção é $(-1, 1)$.

Para visualizar esse ponto no plano cartesiano, podemos construir os gráficos das funções:



ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

19. Dê o conjunto solução das equações a seguir.

a) $10^x = 1.000$ $S = \{3\}$

b) $(0,1)^{2x} = 10$ $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

c) $(0,001)^x = 1.000$ $S = \{-1\}$

d) $\left(\frac{1}{100}\right)^{2x} = 0,0001$ $S = \{1\}$

20. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$ $S = \{6\}$

b) $(0,5)^x = 4^{1-3x}$ $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{128}$ $S = \{14\}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-10} = \frac{1}{729}$ $S = \{-4, 4\}$

e) $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -1$ $S = \{-1, 0\}$

f) $11^{2x} + 2 \cdot 11^x = 3$ $S = \{0\}$

21. Dada a equação $2^x = 7$, podemos determinar entre quais números inteiros consecutivos está sua solução. Basta observar que $4 < 2^x < 8$, ou seja, $2^2 < 2^x < 2^3$. Como potências de base 2 crescem quando crescem seus expoentes e vice-versa, concluímos que $2 < x < 3$, isto é, a solução está entre 2 e 3.

Agora, indique entre que números inteiros consecutivos está a solução de cada equação.

a) $2^x = 14$ $3 < x < 4$

b) $3^x = 29$ $3 < x < 4$

c) $3^{x+1} = 10$ $1 < x < 2$

d) $2^{x-1} = 100$ $7 < x < 8$

22. (Fuvest-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que: alternativa e

a) $a + b = 2$

b) $a + b = 1$

c) $a - b = 3$

d) $a - b = 2$

e) $a - b = 1$

23. Resolva os sistemas de equações exponenciais.

a) $\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

b) $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x} : 7^y = 1 \end{cases}$ $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

24. Certa substância se decompõe segundo a lei $m(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que k é uma constante, t indica o tempo em minuto e $m(t)$ é a massa da substância em grama.

a) Sabendo que no instante inicial ($t = 0$) há 2.048 gramas, qual é o valor de k? $k = 2.048$

b) A massa dessa substância decai para 512 gramas após quantos minutos? 4 min

25. (Unicamp-SP) Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.

a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial ($t = 0$) seja igual a 1.024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial. $a = 1.024$ e $b = \frac{1}{10}$

b) Qual é o tempo mínimo para que a população se reduza a $\frac{1}{8}$ da população inicial? 30 anos

c) Esboce o gráfico da função $f(t)$ para $t \in [0, 40]$. Ver resolução no Guia do professor.

26. (Unifesp) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se K é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ para estimar a sua eliminação depois de um tempo t, em horas. Neste caso, o tempo mínimo necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de: alternativa b

a) 12 horas e meia.

b) 12 horas.

c) 10 horas e meia.

d) 8 horas.

e) 6 horas.

27. Determine o ponto de intersecção dos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{9^{x-1}}$ e $g(x) = 3^{x+1}$. $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$

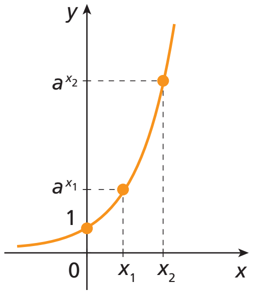
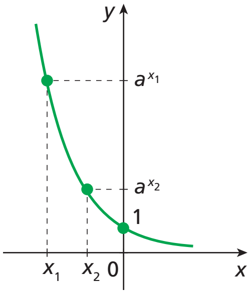
4 Inequações exponenciais

Inequações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **inequações exponenciais**.

Exemplos

- $3^x < 27$
- $2^{-3x} \geqslant \sqrt{5}$
- $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 7^3$
- $8^{x+6} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^{-x} + 2^x$

Já vimos que uma função exponencial pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base *a*.

Função crescente ($a > 1$)	**Função decrescente ($0 < a < 1$)**
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Dessa maneira, podemos concluir que:

- Quando a base da potência é maior que 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes. Ou seja, para $\boldsymbol{a > 1}$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow \underbrace{x_2 > x_1}_{\text{sinal mantido}}$$

- Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes. Ou seja, para $\boldsymbol{0 < a < 1}$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow \underbrace{x_2 < x_1}_{\text{sinal invertido}}$$

Sempre que for possível escrever ambos os membros de uma inequação exponencial como potências de mesma base, poderemos resolvê-la usando alguma dessas relações.

◆ Observação

Analogamente, temos:

- se $a > 1$, então:
  $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow x_2 \geqslant x_1$
- se $0 < a < 1$, então:
  $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow x_2 \leqslant x_1$

Exercícios resolvidos

R10. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação exponencial $5^{x+12} < 25$.

▸ ***Resolução***

$5^{x+12} < 25 \Rightarrow 5^{x+12} < 5^2$

Como a base 5 é maior do que 1, temos:

$x + 12 < 2 \Rightarrow x < -10$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10\}$.

R11. Determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8$$

▸ ***Resolução***

Como $0 < \frac{1}{8} < 1$, temos:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow x + 3 \geqslant 8 \Rightarrow x \geqslant 5$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

Outro modo:

Note que, aplicando as propriedades de potências, poderíamos também trabalhar com uma inequação com base maior que 1:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow 8^{-(x+3)} \leqslant 8^{-8} \Rightarrow$

$\Rightarrow -(x + 3) \leqslant -8 \Rightarrow x \geqslant 5$

R12. Resolver, em ℝ, a inequação: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2 + 5x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^6$

Resolução

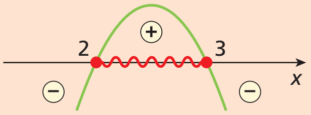
Como a base é um número entre 0 e 1, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2 + 5x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^6 \Rightarrow -x^2 + 5x \geqslant 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$$

Resolvendo a equação $-x^2 + 5x - 6 = 0$, obtemos $x = 2$ ou $x = 3$.

Então, para $-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$, temos o intervalo indicado abaixo:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$.

◆ Reflita

Com um colega e a partir da resposta do exercício acima, determinem o conjunto solução da inequação:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2 + 5x} > \left(\frac{2}{3}\right)^6$ Espera-se que os alunos percebam que o conjunto solução dessa inequação é o conjunto complementar do conjunto solução da inequação do **R12**, ou seja: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

R13. Determinar, em ℝ, o conjunto solução da inequação $2^x < 2^3 < 2^{2x}$.

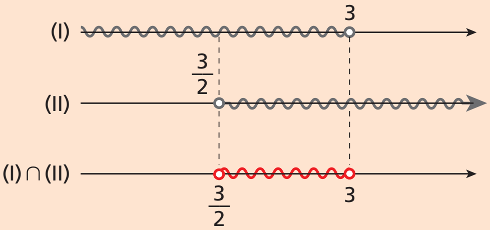
Resolução

Esse tipo de inequação é conhecido como **inequação exponencial dupla**, por ter mais de uma desigualdade na mesma sentença.

Dessa maneira, estudam-se os dois casos separadamente:

- $2^x < 2^3 \Rightarrow x < 3$ (I)
- $2^3 < 2^{2x} \Rightarrow 3 < 2x \Rightarrow x > \frac{3}{2}$ (II)

As duas desigualdades devem ser simultaneamente satisfeitas: $x < 3$ e $x > \frac{3}{2}$



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3\right\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

32. **a)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; $g(x) = 3^x$ **b)** $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$ **d)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

28. Resolva, em ℝ, as seguintes inequações exponenciais:

a) $6^{x^2 + 1} < 6^5$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

b) $\frac{1}{9} \geqslant 3^{x+3}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

c) $(0,44)^{x^2 - 4} \leqslant 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

d) $\sqrt[3]{3^x} > 3^x \cdot 3^8$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$

29. Identifique o domínio das funções *f* e *g*.

a) $f(x) = \sqrt{3^x - 243}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x}}$ $D(g) = \mathbb{R}$

30. Resolva, em ℝ, as inequações a seguir.

a) $2 \leqslant 2^x \leqslant 2^3$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

b) $\frac{1}{81} < 81^{x-1} < 9^x$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

31. Em um mesmo sistema cartesiano, trace o gráfico das funções *f* e *g*, tal que $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 8$. Em seguida, com base no gráfico, resolva as inequações e a equação:

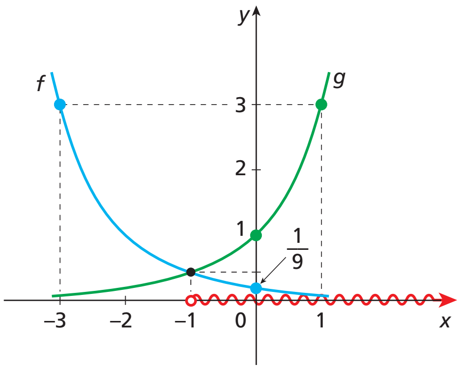
a) $f(x) = g(x)$ $S = \{3\}$

b) $f(x) > g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $f(x) \leqslant g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

Ver resolução no Guia do professor. Se achar conveniente, proponha aos alunos que resolvam o exercício com o auxílio de um *software* de construção de gráficos.

32. Observe os gráficos das funções *f* e *g*, tal que *g* é uma função exponencial e *f* é uma função obtida a partir da exponencial, do tipo $f(x) = a^{x+k}$, em que *k* é um número inteiro.



ADILSON SECCO

a) Quais são as leis de formação das funções representadas na figura?

b) Qual é o ponto de intersecção dos gráficos das funções?

c) Escreva uma inequação exponencial, usando a resposta do item **a**, cuja solução seja o intervalo de *x* destacado na figura acima.

d) Escreva uma inequação cuja solução seja o complementar do intervalo de *x* representado na figura acima.

29. Se achar conveniente, relembrar os alunos de que, nos números reais:
- apenas existem raízes de números não negativos;
- apenas existem frações com denominadores não nulos.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

Ver resolução no Guia do professor.

1. Construa os gráficos das seguintes funções e identifique o domínio e a imagem de cada uma.

a) $f(x) = 3^x$
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$
$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

2. Se $f(x) = 2^{5x}$ e $f(m) = 32$, determine o valor de $f\left(-\frac{m}{5}\right)$. $\frac{1}{2}$

3. Se $f(x) = 16^{1 + \frac{1}{x}}$, calcule o valor de:
$f(-1) + f(-2) - f(-4)$ -3

4. Uma aplicação financeira obedece à lei $M(t) = 50.000 \cdot (1{,}1)^t$, em que $M(t)$ é o montante final após t meses. Determine o montante final após:

a) 3 meses; R\$ 66.550,00

b) 6 meses; R\$ 88.578,05

c) 1 ano. $\simeq$ R\$ 156.921,42

5. O valor, em real, de certo automóvel daqui a t anos é dado pela lei $V = 20.000 \cdot (0{,}9)^t$. Calcule o valor desse automóvel daqui a 4 anos. R\$ 13.122,00

6. Um equipamento retira ar de um tanque segundo a lei $A(t) = A_0 \cdot (0{,}9)^t$, em que $A(t)$ é o volume de ar do tanque após t minutos e A_0 é o volume inicial de ar contido no tanque. Determine o volume de ar que restará em um tanque de 10 m³ após 5 minutos ligado a esse equipamento. $\simeq 5{,}9$ m³

7. Estima-se que certa população aumente de acordo com a lei $P(t) = 15.000 \cdot (1{,}035)^t$, sendo t o tempo em anos e $P(t)$ o número de indivíduos após t anos. Adotando $(1{,}035)^{10} = \sqrt{2}$, determine o número de indivíduos daqui a 80 anos. $\simeq$ 240.000 indivíduos

8. Seja a função dada por $f(x) = b^x$, com $0 < b < 1$.
Se $f(1) + f(-1) = \frac{10}{3}$, determine o valor de b. $\frac{1}{3}$

9. A função P, dada por $P(t) = 64.000(1 - 2^{-0{,}1t})$, descreve o comportamento de uma população de microrganismos, sendo P o número de microrganismos e t o número de dias após o instante 0. Determine t para que a população de microrganismos seja igual a 63.000. 60 dias

10. Encontre o domínio da função f, sendo $f(x) = \frac{5 \cdot 2^x}{\sqrt{2^x - 4}}$.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Aprofundamento

11. Se $f(x) = 5^x$, determine o valor de:
$f(1) + f(a) - f(a + 1) + 4 \cdot f(a)$ 5

12. A taxa de inflação anual de certo país é 15%, isto é, a cada ano os produtos comercializados nesse país têm seus preços multiplicados por 1,15 e, em n anos, por $(1{,}15)^n$.

a) Quantos anos são necessários para que os produtos comercializados nesse país dobrem de preço? 5 anos

b) Qual será o preço daqui a 7 anos de um produto que hoje custa R\$ 8,00 nesse país? $\simeq$ R\$ 21,28

Espera-se que os alunos resolvam esse exercício por meio de aproximações, sem usar o conceito de logaritmo, que será estudado no capítulo seguinte, "Função logarítmica".

13. (Enem) Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2} \qquad \text{RIP} = \frac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$$

ARAUJO, C. G. S.; RICARDO, D. R. Índice de massa corporal: um questionamento científico baseado em evidências. *Arq. Bras. Cardiologia*, v. 79, n. 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m², então ela possui RIP igual a:

alternativa e

a) $0{,}4 \text{ cm/kg}^{\frac{1}{3}}$

b) $2{,}5 \text{ cm/kg}^{\frac{1}{3}}$

c) $8 \text{ cm/kg}^{\frac{1}{3}}$

d) $20 \text{ cm/kg}^{\frac{1}{3}}$

e) $40 \text{ cm/kg}^{\frac{1}{3}}$

14. Para que valores reais de m a função f, dada por $f(x) = (-m^2 + 2m)^x$, é decrescente? $0 < m < 2$ e $m \neq 1$

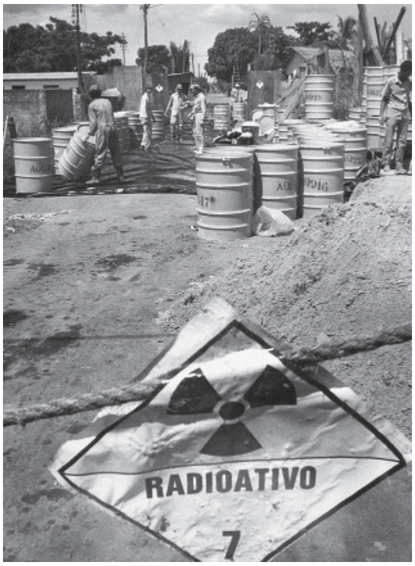
15. Resolva o sistema: $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

16. Para que valores de m a equação $x^2 - 4x + 2^m = 0$ possui duas raízes reais e iguais? 2

Desafio

17. *Meia-vida* de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Daqui a quantos anos 32 gramas de uma substância, cuja meia-vida é de 6,5 anos, serão reduzidos a 2^{-29} gramas? 221 anos

LORISVALDO DE PAULA/ESTADÃO CONTEÚDO



Em 1987, ocorreu em Goiânia um dos maiores acidentes radioativos do mundo: várias pessoas foram contaminadas com o Césio-137. Essa substância radioativa estava dentro de um aparelho de radioterapia que foi desmontado em um "ferro--velho". Até hoje algumas áreas contaminadas com a substância estão isoladas.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Pode-se afirmar que $\dfrac{(\sqrt{7})^8}{(\sqrt{7})^6}$ é igual a: alternativa a

a) 7

b) $(\sqrt{7})^{14}$

c) $(\sqrt{7})^{\frac{4}{3}}$

d) $(\sqrt{7})^{48}$

2. O inverso de $3^{\frac{1}{2}}$ é: alternativa c

a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{1}{3^{-\frac{1}{2}}}$

3. Após racionalizar e simplificar a expressão $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$, obtém-se: alternativa c

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{8}$

4. A sentença ______ não é a lei de formação de uma função exponencial. alternativa c

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^x$

b) $g(x) = (\sqrt{2})^x$

c) $h(x) = \dfrac{1^x}{5}$

d) $i(x) = (0{,}3)^x$

5. O gráfico da função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo x real, passa pelo ponto: alternativa d

a) (0, 0)

b) (1, 0)

c) (0, −1)

d) (0, 1)

6. A função exponencial dada por $f(x) = (\sqrt{11})^x$ é: alternativa d

a) decrescente.

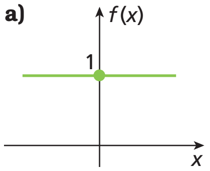
b) nula.

c) constante.

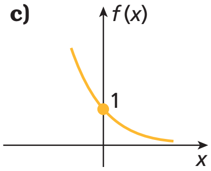
d) crescente.

7. A função f, tal que $f(x) = \pi^x$, pode ser representada pelo gráfico: alternativa b

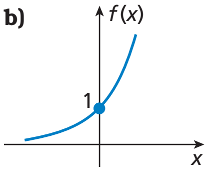
a)



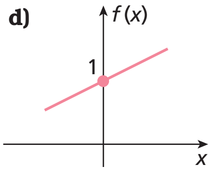
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. No início deste século, a população da Índia girava em torno de 1,029 bilhão de habitantes. Supondo que ela cresça 20% em cada década, em 2021 essa população será de aproximadamente: alternativa b

a) 1,440 bilhão.

b) 1,482 bilhão.

c) 1,5 bilhão.

d) 1,235 bilhão.

9. Na equação $5^{-x} = 125$, o valor de x é: alternativa b

a) 3 **b)** −3 **c)** −1 **d)** 0,3

10. Se $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\dfrac{1}{7}\right)^{x-1}$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: alternativa a

a) $x \leqslant -6$

b) $x \geqslant 6$

c) $x \leqslant 6$

d) $x \geqslant -6$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efetuar as operações de potenciação e radiciação.	X	X	X							
Identificar uma função exponencial.				X	X					
Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.					X	X	X			
Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.								X		
Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.									X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	150 a 154	150 a 154	150 a 154	154 a 157	154 a 157	154 a 157	154 a 157	158	159 a 163	159 a 163

Pesquisa e ação

Jornal digital

Atualmente, o mundo possui mais de 7 bilhões de habitantes. Segundo relatório da Organização das Nações Unidas (ONU), seremos mais de 11 bilhões em 2100. Apesar dessa projeção de crescimento, em alguns países, como no Brasil, a população diminuirá.

O crescimento populacional mundial é impulsionado, principalmente, por poucos países pobres que ainda têm alta taxa de fertilidade – a maioria, países africanos. Essa situação traz à tona questões relacionadas à saúde, à educação, ao emprego, ao acesso a recursos básicos indispensáveis para a sobrevivência, como água e alimentação, entre outros.

Considerando esses aspectos, vamos criar, nesta atividade, um jornal digital que apresente dados do crescimento populacional no mundo nos dias de hoje, abordando as implicações econômicas, sociais e ambientais desse crescimento. O jornal deve conter artigos curtos, que exponham dados atuais e pontos de vista contrários relacionados ao tema, além de fotos, ilustrações e gráficos.

IMAGINECHINA/AP PHOTO/GLOW IMAGES

BORIS-B/SHUTTERSTOCK

A China é o país mais populoso do mundo, seguido pela Índia. Em 2015, esses países tinham aproximadamente 1,4 e 1,3 bilhão de habitantes, respectivamente. Segundo projeção da ONU, em 2022 a população da Índia deverá ultrapassar a da China. Fotos de 2015.

Procedimentos

1) Reúna-se com seus colegas, em pequenos grupos, e escolham um dos temas a seguir, referentes ao crescimento populacional.
- Explosão demográfica.
- Crescimento populacional em diferentes países.
- Recursos naturais e limitados.
- Taxa de fecundidade e métodos anticoncepcionais.
- A importância do controle demográfico.

2) Após a escolha do tema, você e seus colegas precisarão pesquisar, em jornais impressos, em revistas e em *sites* confiáveis da internet, informações, fotos, gráficos e ilustrações que os ajudem a compor o artigo jornalístico. Observem se existem opiniões contrárias sobre o tema, pois a confrontação de opiniões é uma das partes importantes de um jornal. Como o jornal será digital, selecionem alguns *links* interessantes para colocar no artigo, para o leitor se aprofundar no tema. Nas fotos escolhidas, é necessário inserir legenda. Caso sejam colocados gráficos, é importante pensar no título, nomear os eixos e indicar a fonte dos dados que foram usados para sua construção.

Orientar os alunos para buscarem informações em *sites* confiáveis, como o da Organização das Nações Unidas (ONU) ou o do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

3) Quando todos os grupos estiverem com seus artigos prontos, vocês devem reuni-los para a criação do jornal digital. Nesse momento, a classe, com o auxílio do professor, deverá procurar uma plataforma *on-line* para publicar o jornal (existem plataformas gratuitas na internet). Depois, vocês devem elaborar a capa do jornal, escolhendo o nome dele, o tipo de letra e a disposição das chamadas para as matérias presentes na edição. Nas chamadas, cada grupo deve escolher o título do artigo e um pequeno texto, resumindo o assunto abordado. Ao clicar na chamada, o leitor deve ser direcionado para o artigo completo.

4) Divulguem o jornal na escola e em redes sociais. Se acharem conveniente, elaborem uma versão impressa do jornal, deixando-o disponível na biblioteca da escola ou em algum outro espaço de circulação, onde as pessoas possam lê-lo.

Compreensão de texto

Sobre uma história de Malba Tahan

O problema dos mil dinares

Talvez muitos não saibam que Malba Tahan, autor do encantador livro *O homem que calculava*, foi o professor de matemática brasileiro chamado Júlio César de Mello e Souza (1895-1974). Além de autor de mais de cem livros de Literatura oriental, Didática e Matemática, foi um mestre na arte de contar histórias. Neste artigo farei referência a uma delas.

Trata-se do problema dos mil dinares, apresentado em seu livro *Novas lendas orientais* (Editora Record, 1990). A Beremis, protagonista de *O homem que calculava*, apresentou-se o seguinte desafio aritmético:

Determinar como 1.000 moedas de 1 dinar foram distribuídas em 10 caixas do mesmo tamanho, numeradas e fechadas, de maneira que:

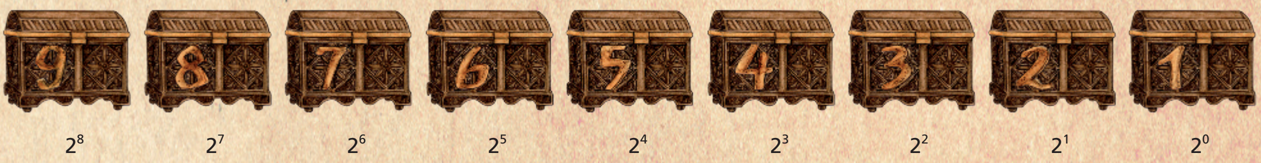
a) A numeração das caixas, de 1 até 10, foi feita em ordem estritamente crescente, relativa ao conteúdo de moedas que cada uma encerra.

b) É possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1.000 dinares, sem precisar abrir as caixas.

Depois de pensar um pouco, Beremis apresentou a seguinte solução:

A primeira caixa deve conter uma moeda, pois caso contrário não poderíamos fazer um pagamento de 1 dinar. A segunda caixa deve conter duas moedas, pois, se tivesse 3, 4 ou mais dinares, não seria possível fazer o pagamento de 2 dinares.

A caixa de número 3 deve ter quatro moedas, pois o conteúdo das duas primeiras caixas já permite fazer pagamentos de 1, 2 e 3 dinares. Beremis continua o seu raciocínio, até estabelecer a seguinte distribuição das moedas nas caixas numeradas de 1 a 9.



Quanto à décima caixa, conclui que deve conter

$$1.000 - (2^8 + 2^7 + 2^6 + ... + 2^2 + 2^1 + 2^0) = 489 \text{ moedas}$$

3. Moeda de ouro cunhada pelos árabes desde fins do séc. VII e corrente na Península Ibérica no séc. XII.

5. Porque o conteúdo das três primeiras caixas permite fazer pagamentos de 1 a 7 dinares.

6. 13: caixas 4, 3 e 1;
31: caixas 5, 4, 3, 2 e 1;
310: caixas 9, 6, 5, 3 e 2;
521: caixas 10 e 6.

Justificativa da solução, usando a notação binária

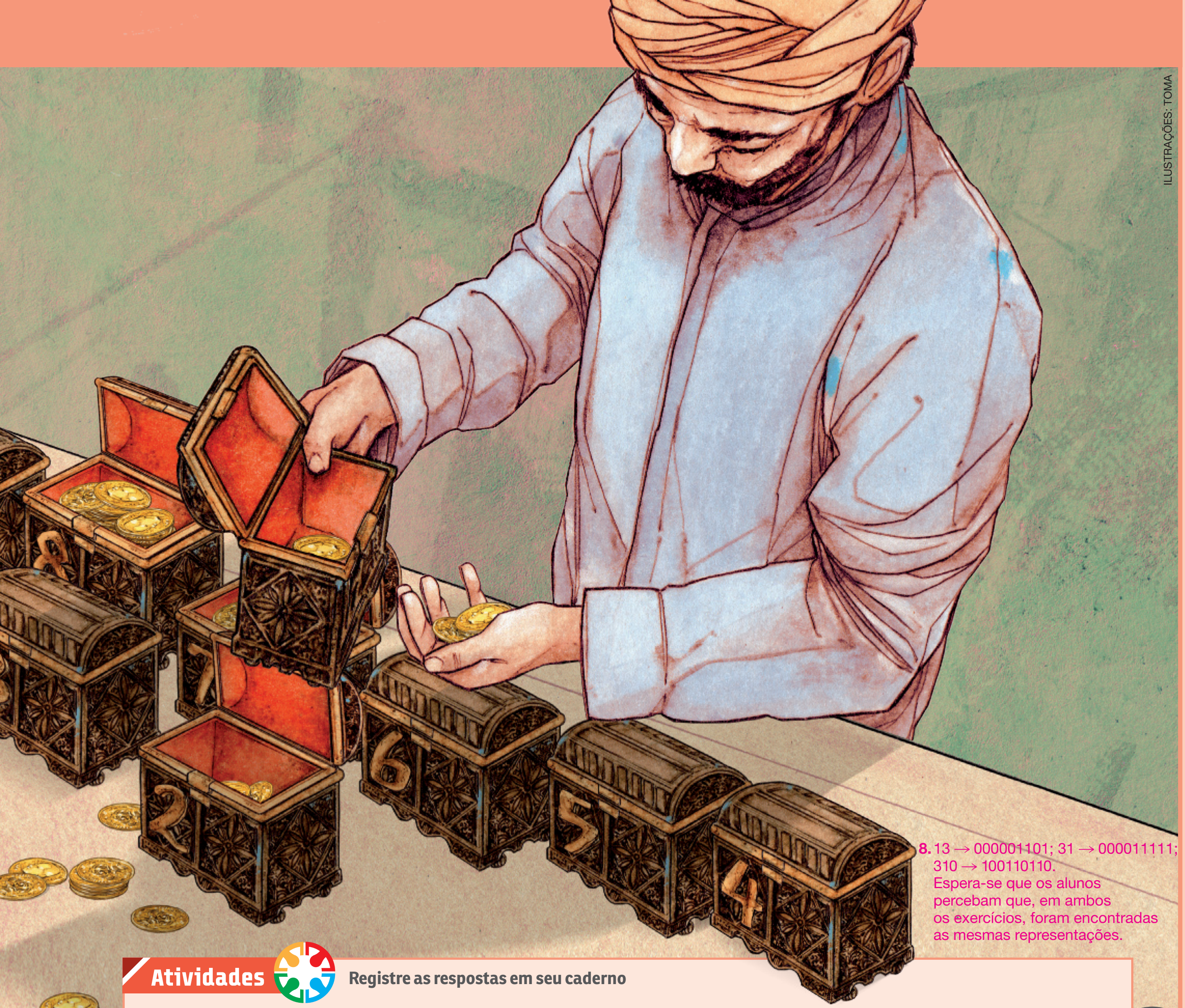
Uma justificativa da solução de Beremis pode ser fornecida utilizando a notação binária (base 2) para representar os números. Por exemplo, para fazer um pagamento de 352 (notação decimal) dinares observamos que:

$$352 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Logo, na base 2, o número 352 se escreve 101100000, o que significa que escolhemos as caixas de números 9, 7 e 6.

Visto que 511 é 111111111 em notação binária, para fazer um pagamento dessa quantia, escolhemos todas as caixas, da primeira à nona. [...]

Fonte: SÁNCHEZ, Jesus A. P. Sobre uma história de Malba Tahan. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 35, 1997.


ILUSTRAÇÕES: TOMA

8. 13 → 000001101; 31 → 000011111; 310 → 100110110.
Espera-se que os alunos percebam que, em ambos os exercícios, foram encontradas as mesmas representações.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. De acordo com o texto, o pseudônimo do professor Júlio César de Mello e Souza é Beremis ou Malba Tahan? Malba Tahan

2. De qual problema trata a história narrada? do problema dos 1.000 dinares

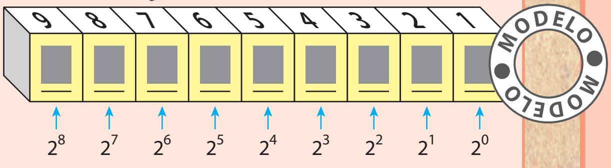
3. Procure em um dicionário o que significa “dinar”.

4. Com suas palavras, escreva em seu caderno as condições que Beremis deveria contemplar para distribuir as 1.000 moedas nas 10 caixas. Ver resolução no Guia do professor.

5. Por que a quarta caixa deve ter 8 moedas?

6. Com quais caixas Beremis faria um pagamento de 13 dinares? E de 31 dinares? E de 310 dinares? E de 521?

7. No caderno, reproduza três vezes a figura, que representa as caixas de moedas:



ADILSON SECCO

13 → 000001101; 31 → 000011111; 310 → 100110110

Em seguida, de acordo com as caixas usadas para formar os números 13, 31 e 310, preencha as lacunas:

- com **1** para as caixas usadas;
- com **0** para as caixas não usadas.

8. Escreva, na notação binária, os números 13, 31 e 310; em seguida, compare esses resultados com os obtidos no exercício anterior.

9. Escreva um número na notação binária que tenha sete caracteres **0** ou **1**. A seguir, troque-o com um colega para que cada um de vocês escreva, em notação decimal, o número do outro. resposta pessoal

Capítulo

8

Função logarítmica

IVAN ALVARADO/REUTERS/LATINSTOCK

Em setembro de 2015, um terremoto de 8,3 graus na escala Richter abalou o Chile. A força do abalo sísmico foi tão grande que tremores puderam ser sentidos até na cidade de São Paulo. Foto tirada no dia seguinte ao terremoto, na cidade de Coquimbo, Santiago, no Chile.

Objetivos do capítulo

- Calcular logaritmo.
- Identificar uma função logarítmica.
- Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica.
- Resolver situações-problema que envolvam logaritmos.
- Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas.

Os terremotos originam-se do movimento das placas tectônicas: o atrito de uma placa contra outra forma ondas mecânicas, responsáveis pelas vibrações. A medida na escala Richter (por exemplo, 8,3 graus do terremoto da foto acima) é a magnitude do terremoto e indica a quantidade de energia liberada no foco dele. Quanto maior for a magnitude, mais energia será liberada. Essa medida é calculada por uma função logarítmica, a partir da amplitude das vibrações, obtida por um sismógrafo.

1 Logaritmo

No capítulo anterior, vimos diversas situações que apresentam comportamento exponencial. Agora, estudaremos aquelas que podem ser modeladas pela função inversa da função exponencial, que nomeamos **função logarítmica**. Inicialmente, vamos entender o que significa **logaritmo**. Acompanhe a situação a seguir.

Determinada bactéria se divide ao meio a cada hora, conforme indica a tabela abaixo.

Tempo (t)	0	1	2	3	4
Número de bactérias (n)	1	2	4	8	16

Analisando os dados, concluímos que o número n de bactérias em função da quantidade t de horas pode ser descrito por: $n = 2^t$

Com base nessas informações, podemos responder às seguintes perguntas:

- Quantas bactérias haverá após 10 horas?

  Essa é uma pergunta que envolve potenciação, e a resposta é:

  $$n = 2^t \Rightarrow n = 2^{10} \Rightarrow n = 1.024$$

  Logo, haverá 1.024 bactérias.

- Em quantas horas haverá 1.024 bactérias?

  Essa é uma pergunta que envolve logaritmo, pois, para respondê-la, devemos encontrar o valor do **expoente** t na equação: $1.024 = 2^t$

  O valor de t é 10 horas, pois $2^{10} = 1.024$.

  Dizemos que 10 é o **logaritmo** de 1.024 na **base** 2. Representamos assim:

  $$10 = \log_2 1.024 \quad \text{ou} \quad \log_2 1.024 = 10$$

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, o **logaritmo de b na base a** é o número real x tal que $a^x = b$. Ou seja:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

O número b é conhecido por **logaritmando**.

◆ Observação

$\log_a b$ existe quando ocorrem as condições $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$, chamadas condições de existência.

Exemplos

a) $\log_6 36 = 2$, pois $6^2 = 36$

b) $\log_2 0{,}5 = -1$, pois $2^{-1} = 0{,}5$

c) $\log_{10} 1 = 0$, pois $10^0 = 1$

d) $\log_{\sqrt[3]{12}} 12 = 3$, pois $\left(\sqrt[3]{12}\right)^3 = 12$

◆ Observação

Sempre que a base é omitida, entende-se que o logaritmo tem base 10, ou seja, $\log_{10} b = x$ pode ser escrito também como $\log b = x$. Por exemplo:

- $\log 1.000 = 3$, pois $10^3 = 1.000$
- $\log 0{,}01 = -2$, pois $10^{-2} = 0{,}01$

◆ Reflita

Entre quais números inteiros está $\log_3 10$?

Espera-se que os alunos percebam que, para responder a essa pergunta, eles devem descobrir qual é o expoente x tal que $3^x = 10$.
Como $3^2 = 9$ e $3^3 = 27$, conclui-se que: $3^2 < 3^x < 3^3$, ou seja, $2 < x < 3$
Portanto, $\log_3 10$ está entre 2 e 3.

Exercícios resolvidos

R1. Calcular os valores de:

a) $\log_2 32$

b) $\log 0{,}001$

▶ ***Resolução***

Podemos encontrar esses valores mentalmente.

a) Para descobrir o valor do logaritmo, nos perguntamos: “O número 2 elevado a qual expoente resulta em 32?”

A resposta é 5, pois $2^5 = 32$.

Portanto, $\log_2 32 = 5$.

b) Como a base não está escrita, subentendemos que ela vale 10. Então, perguntamos: “O número 10 elevado a qual expoente resulta em 0,001?”

A resposta é -3, pois:

$$10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{1.000}\right) = 0{,}001$$

Portanto, $\log 0{,}001 = -3$.

Outro modo:

Também podemos encontrar esses valores algebricamente. Para isso, vamos chamar o valor desconhecido de x.

a) Seja $\log_2 32 = x$. Então, pela definição de logaritmo:

$2^x = 32$

Escrevendo os dois membros na mesma base, temos:

$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

Ou seja, $\log_2 32 = 5$.

b) $\log 0{,}001 = x \Rightarrow \log_{10} 0{,}001 = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10^x = 0{,}001 \Rightarrow 10^x = \frac{1}{1.000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^x = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$$

Ou seja, $\log 0{,}001 = -3$.

R2. Determinar o valor de $\log_{\frac{1}{8}} \left(\sqrt{2}\right)^3$.

▶ ***Resolução***

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\log_{\frac{1}{8}} \left(\sqrt{2}\right)^3 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^x = \left(\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2^3}\right)^x = \sqrt{2^3} \Rightarrow \left(2^{-3}\right)^x = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-3x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Logo: $\log_{\frac{1}{8}} \left(\sqrt{2}\right)^3 = -\frac{1}{2}$

R3. Entre quais números inteiros está $\log_4 20$?

▶ ***Resolução***

Sendo $\log_4 20 = x$, temos: $4^x = 20$

Sabemos que $4^2 = 16$ e $4^3 = 64$.

Então: $4^2 < 20 < 4^3$, ou seja, $4^2 < 4^x < 4^3$.

Logo: $2 < x < 3$

Portanto, $\log_4 20$ está entre 2 e 3.

R4. Quanto vale k se $\log_k 81 = 4$?

▶ ***Resolução***

Primeiro, observamos as restrições. Pela definição de logaritmo, para a base devemos ter $k > 0$ e $k \neq 1$.

$\log_k 81 = 4 \Rightarrow k^4 = 81 \Rightarrow k = 3$ ou $k = -3$

(-3 não serve devido às restrições)

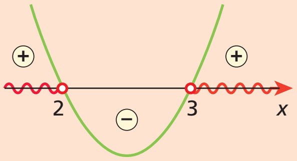
Logo, k vale 3.

R5. Para que valores reais de x existe $\log_{x-2} (x^2 - 5x + 6)$?

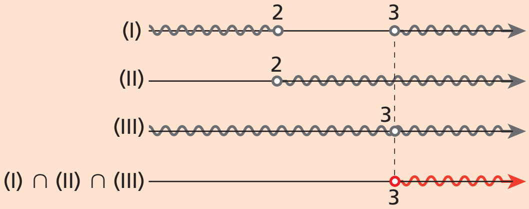
▶ ***Resolução***

Para que exista o logaritmo indicado, devemos impor as seguintes condições:

- para o logaritmando: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$ (I)



- para a base: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (II)
- para a base: $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$ (III)



Como todas as três condições devem ocorrer: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

◆ Reflita

Nas igualdades abaixo, aparecem expressões que não respeitam as restrições da definição de logaritmo. Tente calcular x em cada uma delas e veja o que acontece.

- logaritmando não positivo:
  - $\log_5 (-25) = x$;
  - $\log_2 0 = x$
- base não positiva:
  - $\log_0 2 = x$;
  - $\log_{-1} 6 = x$
- base igual a 1:
  - $\log_1 10 = x$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Calcule mentalmente.

a) $\log_5 125$ 3

b) $\log_9 1$ 0

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$ 4

d) $\log_2 \frac{1}{16}$ −4

e) $\log 1.000$ 3

f) $\log 0{,}01$ −2

2. Entre quais números inteiros estão os logaritmos a seguir?

a) $\log 560$ entre 2 e 3

b) $\log_5 3$ entre 0 e 1

3. Calcule, aplicando a definição.

a) $\log_{\sqrt{2}} 2$ 2

b) $\log 0{,}1$ −1

c) $\log_{\frac{1}{4}} 16$ −2

d) $\log_2 \sqrt{128}$ $\frac{7}{2}$

e) $\log_4 256$ 4

f) $\log_2 (\log_4 256)$ 2

4. Se $A = \log_7 7$, $B = \log_{76} 1$, $C = \log_{0,5} 8$ e $D = \log_8 8^{-2}$, determine $B^A + C \cdot D$. 6

5. Aplicando a definição de logaritmo, calcule o valor de m nas expressões a seguir.

a) $\log (2m - 5) = 3$ 502,5

b) $\log (m - 9) = -2$ 9,01

c) $\log_2 (5 - m) = 0$ 4

d) $\log_m 0{,}1 = -1$ 10

6. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

6. Determine os possíveis valores de x para que exista:

a) $\log_x 5$

b) $\log_2 (3x + 5)$

c) $\log_3 \left(\frac{x - 2}{x + 4}\right)$

d) $\log_5 (x^2 - 2x + 1)$

◆ Consequências da definição de logaritmo

Satisfeitas as condições de existência de um logaritmo, temos:

1ª consequência: $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

2ª consequência: $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

3ª consequência: $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$

4ª consequência: $a^{\log_a n} = n$, pois $\log_a n = m \Rightarrow a^m = n \Rightarrow a^{\log_a n} = n$

5ª consequência: $\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$, pois $a^{\log_a m} = n \Rightarrow m = n$

Com base nessas consequências, podemos calcular algumas expressões. Veja os exemplos.

a) $\left(\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}\right) \cdot \left(3^{\log_3 8}\right) = 1 \cdot 8 = 8$

b) $\log_4 (\log_3 3^4) = \log_4 4 = 1$

c) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

d) $(\log 1) \cdot (\log_4 100) = 0 \cdot (\log_4 100) = 0$

Reflita, p. 170

Aplicando a definição de logaritmo para tentar calcular o valor de x em cada caso, temos:

- $\log_5 (-25) = x \Rightarrow 5^x = -25$
  Como uma potência de base positiva sempre terá como resultado um número positivo, concluímos que, nesse caso, não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_5 (-25) = x$
  $\log_2 0 = x \Rightarrow 2^x = 0$
  O resultado de uma potência será nulo apenas quando sua base for igual a zero; então, não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_2 0 = x$
- $\log_0 2 = x \Rightarrow 0^x = 2$
  Como uma potência cuja base é zero terá, necessariamente, resultado igual a zero, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_0 2 = x$
  $\log_{-1} 6 = x \Rightarrow (-1)^x = 6$
  Uma potência cuja base é igual a −1 pode ter dois resultados possíveis: 1, se o expoente for um número positivo, ou −1, se o expoente for um número negativo; então, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_{-1} 6 = x$
- $\log_1 10 = x \Rightarrow 1^x = 10$
  Como uma potência cuja base é igual a 1 sempre terá 1 como resultado, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_1 10 = x$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

7. Com base nas consequências estudadas, calcule o valor das seguintes expressões.

a) $\log_{11} 11$ 1

b) $\log_{32} 1$ 0

c) $\log_6 6^7$ 7

d) $\log 100$ 2

e) $15^{\log_{15} 16}$ 16

f) $\log_3 \sqrt{81}$ 2

8. Determine os valores desconhecidos de:

a) $\log_7 b = 1$ 7

b) $\log_8 x = \log_8 \left(\frac{2}{3}\right)$ $\frac{2}{3}$

c) $3^{\log_3 2} = n$ 2

d) $\log x^2 = \log 9$ 3 ou −3

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81}$ −2

f) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{5} = k$ $\frac{1}{3}$

9. Determine o valor das expressões a seguir.

a) $(\log_5 10)^{\log_3 1}$ 1

b) $(\log_{64} 64)^{\log_3 2}$ 1

c) $\log (\log 10^{10})$ 1

d) $(\log 0{,}01) \cdot (\log 100)$ −4

e) $(\log_3 1) \cdot (\log_5 20)$ 0

f) $(\log_{11} 121) \cdot (\log_{13} 169)$ 4

10. O pH de uma solução indica se ela é ácida ($\text{pH} < 7$) ou básica ($\text{pH} > 7$) e é dado pela fórmula $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$, em que $[\text{H}^+]$ indica a concentração de íons H^+ na solução, em mol/ℓ. Uma solução com concentração de 10^{-3} mol/ℓ de íons H^+ é ácida ou básica? ácida

11. Considerando a fórmula do exercício anterior, se o pH de uma substância é igual a 9, qual é a concentração de H^+ em mol/ℓ? 10^{-9}

2 Propriedades operatórias dos logaritmos

2.1 Logaritmo de um produto

O logaritmo do produto de dois números positivos, em uma base *a*, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números na base *a*.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Observe:

$$\log_3 (3 \cdot 9) = \log_3 (3^1 \cdot 3^2) = \log_3 3^{1+2} = 1 + 2 = \log_3 3 + \log_3 3^2 = \log_3 3 + \log_3 9$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$

(III) $\log_a (b \cdot c) = z \Leftrightarrow a^z = b \cdot c$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$a^z = b \cdot c \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y \Rightarrow \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Exemplos

a) $\log_5 (25 \cdot 625) = \log_5 25 + \log_5 625 = \log_5 5^2 + \log_5 5^4 = 2 + 4 = 6$

b) $\log 500 = \log (100 \cdot 5) = \log 100 + \log 5 = 2 + \log 5$

2.2 Logaritmo de um quociente

O logaritmo do quociente de dois números positivos, em uma base *a*, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números na base *a*.

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Observe:

$$\log_3 \left(\frac{3}{9}\right) = \log_3 \left(\frac{3^1}{3^2}\right) = \log_3 3^{1-2} = 1 - 2 = \log_3 3 - \log_3 3^2 = \log_3 3 - \log_3 9$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$

(III) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Leftrightarrow a^z = \frac{b}{c}$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$a^z = \frac{b}{c} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y \Rightarrow \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Exemplos

a) $\log_5 \left(\frac{125}{625}\right) = \log_5 125 - \log_5 625 = \log_5 5^3 - \log_5 5^4 = 3 - 4 = -1$

b) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = \log_4 1 - \log_4 16 = \log_4 1 - \log_4 4^2 = 0 - 2 = -2$

2.3 Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência em uma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Observe:

$\log_5 4^3 = \log_5 (4 \cdot 4 \cdot 4) = \log_5 4 + \log_5 4 + \log_5 4 = 3 \cdot \log_5 4$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a b^n = y \Leftrightarrow a^y = b^n$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$a^y = b^n \Rightarrow a^y = (a^x)^n \Rightarrow a^y = a^{x \cdot n} \Rightarrow y = n \cdot x \Rightarrow \log_a b^n = n \cdot \log_a b$

◆ Observação

- $(\log_a b)^n = \log_a^n b$
- $\log_a^n b \neq \log_a b^n$

Por exemplo:

(I) $\log_5^2 3 = (\log_5 3) \cdot (\log_5 3)$

(II) $\log_5 3^2 = 2 \cdot \log_5 3$

Observe que (I) é diferente de (II).

Exemplos

a) $\log_5 5^8 = 8 \cdot \log_5 5 = 8 \cdot 1 = 8$

b) $\log_2 \sqrt{3} = \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 3$

Exercícios resolvidos

R6. Aplicando as propriedades operatórias, reescrever os logaritmos abaixo na forma de uma adição e/ou subtração.

a) $\log (3^2 \cdot 5^3)$

b) $\log \left(\dfrac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7}\right)$

▸ ***Resolução***

a) $\log (3^2 \cdot 5^3) =$

$= \log 3^2 + \log 5^3 =$

$= 2 \cdot \log 3 + 3 \cdot \log 5$

b) $\log \left(\dfrac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7}\right) =$

$= \log (2^3 \cdot 3) - \log (5^2 \cdot 7) =$

$= \log 2^3 + \log 3 - (\log 5^2 + \log 7) =$

$= 3 \cdot \log 2 + \log 3 - 2 \cdot \log 5 - \log 7$

R7. Dado $\log 2 \simeq 0{,}3$ obter o valor aproximado de:

a) $\log 5$ **b)** $\log 20$ **c)** $\log \sqrt{5}$

▸ ***Resolução***

a) $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0{,}3 =$
$= 0{,}7$

b) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) =$
$= \log 2 + \log 10 \simeq 0{,}3 + 1 = 1{,}3$

c) $\log \sqrt{5} = \log 5^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log 5 \simeq \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}7 =$
$= 0{,}35$

R8. Utilizando as propriedades, simplificar a expressão: $\log 50 + \log 20 - \log 8$

▸ ***Resolução***

$\log 50 + \log 20 - \log 8 =$

$= \log (2 \cdot 5^2) + \log (2^2 \cdot 5) - \log 2^3 =$

$= \log 2 + \log 5^2 + \log 2^2 + \log 5 - \log 2^3 =$

$= \cancel{\log 2} + 2 \cdot \log 5 + \cancel{2 \cdot \log 2} + \log 5 - \cancel{3 \cdot \log 2} =$

$= 3 \cdot \log 5$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

12. Aplicando as propriedades estudadas, simplifique ao máximo cada um dos itens.

a) $\log_2 (64 \cdot 13)$ $6 + \log_2 13$

b) $\log_{\sqrt{2}} (2 \cdot 3)$ $2 + \log_{\sqrt{2}} 3$

c) $\log_3 (13 \cdot 3)$ $\log_3 13 + 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} \left(\dfrac{1}{16}\right)^9$ 18

e) $\log \left(\dfrac{1}{10}\right)^{19}$ -19

f) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{26}{32}\right)$ $\log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

13. Utilizando as propriedades dos logaritmos, determine o valor de A.

a) $A = \log 30 + \log 7 - \log 21$ 1

b) $A = \log_2 100 - \log_2 25$ 2

14. Admitindo satisfeitas as condições de existência, desenvolva as expressões abaixo, aplicando as propriedades dos logaritmos.

a) $\log_a (b \cdot c \cdot d)$
$\log_a b + \log_a c + \log_a d$

b) $\log_a \left(\dfrac{2 \cdot k}{d}\right)$
$\log_a 2 + \log_a k - \log_a d$

c) $\log_a a^{-n}$ $-n$

d) $\log_a \left(\dfrac{1}{y}\right)$ $-\log_a y$

15. Calcule os logaritmos abaixo sabendo que $\log_{12} 3 \simeq 0{,}442$ e $\log_{12} 2 \simeq 0{,}279$.

a) $\log_{12}\left(\frac{3}{4}\right)$ $\simeq -0{,}116$ **b)** $\log_{12} 6$ $\simeq 0{,}721$

16. Considerando $\log 3 = 0{,}477$, $\log 5 = 0{,}699$ e $\log_2 5 = 2{,}322$, calcule:

a) $\log 15$ 1,176

b) $\log 45$ 1,653

c) $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ 0,222

d) $\log 0{,}6$ −0,222

e) $\log_2 20$ 4,322

f) $\log_2 25$ 4,644

17. Vimos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $\text{pH} = -\log\,[\text{H}^+]$, em que $[\text{H}^+]$ indica a concentração de íons H^+ na solução, em mol/ℓ. Qual é o pH de uma solução com concentração de $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ mol/ℓ de íons H^+? $\simeq 4{,}42$
(*Dado*: $\log 3{,}8 \simeq 0{,}58$)

18. O pH do sangue dos seres humanos, em condições normais, é de 7,4 (levemente básico). Algumas alterações, como certas doenças, podem modificar esse valor. Pode-se calcular o pH do sangue pela equação de Henderson-Hasselbalch, dada por: $\text{pH} = 6{,}1 + \log\left(\frac{B}{C}\right)$, em que B representa a concentração de bicarbonato, a substância básica (ou alcalina), em mmol/ℓ, e C representa a concentração de ácido carbônico, a substância ácida, em mmol/ℓ. Calcule o pH do sangue de uma pessoa cuja concentração de bicarbonato é 25 mmol/ℓ e cuja concentração de ácido carbônico é 2 mmol/ℓ.
(*Dados*: $\log 5 \simeq 0{,}699$ e $\log 2 \simeq 0{,}301$) $\simeq 7{,}197$
(mmol/ℓ significa mili mol por litro.)

2.4 Mudança de base

NATROT/SHUTTERSTOCK

Se achar conveniente, mostrar aos alunos como calcular logaritmos usando uma planilha eletrônica. Nesse caso, para calcular $\log_2 10$, por exemplo, basta digitar, em uma célula qualquer da planilha, a fórmula:
=LOG(10; 2)
base
logaritmando

Se você observar com atenção, algumas calculadoras científicas têm uma tecla log. Essa tecla calcula logaritmos na base 10. Se, em uma calculadora como a mostrada ao lado, apertarmos a tecla log e, em seguida, digitarmos o número 100, aparecerá o número 2, que é o resultado de log 100. Em calculadoras desse tipo, se quisermos calcular logaritmos em bases diferentes de 10, teremos de usar a propriedade de mudança de base, enunciada a seguir.

Se a, b e c são números reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

O texto apresenta o procedimento para calcular log 100 utilizando uma calculadora como a mostrada ao lado. Se forem utilizadas outras calculadoras científicas, esse procedimento pode variar.

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_c b = x \Leftrightarrow c^x = b$

(II) $\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a$

(III) $\log_a b = z \Leftrightarrow a^z = b$

Pelas sentenças (I) e (III), temos $a^z = c^x$. Substituindo (II) nessa expressão, obtemos:

$$a^z = c^x \Rightarrow (c^y)^z = c^x \Rightarrow c^{y \cdot z} = c^x \Rightarrow y \cdot z = x \Rightarrow z = \frac{x}{y} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos

a) Recorrendo à mudança de base, vamos determinar o valor de $\log_8 16$.

Escolhendo a base 2, temos:

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4 \cdot \log_2 2}{3 \cdot \log_2 2} = \frac{4}{3}$$

b) Sabendo que $\log 11 \simeq 1{,}04$, vamos determinar um valor aproximado de $\log_{11} 1.000$.

Para isso, como o dado fornecido está na base 10, vamos fazer a mudança para essa base:

$$\log_{11} 1.000 = \frac{\log 1.000}{\log 11} = \frac{\log 10^3}{\log 11} = \frac{3 \cdot \log 10}{\log 11} = \frac{3}{\log 11} \simeq \frac{3}{1{,}04} \simeq 2{,}88$$

◆ **Reflita**

Poderíamos escolher uma base diferente de 2 para determinar o valor de $\log_8 16$? Justifique sua resposta no caderno.

Sim, pois, para $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$\log_8 16 = \frac{\log_a 2^4}{\log_a 2^3} = \frac{4 \cdot \cancel{\log_a 2}}{3 \cdot \cancel{\log_a 2}} = \frac{4}{3}$$

Avaliar a conveniência de discutir com os alunos outros exemplos em que a base do logaritmo e o logaritmando podem ser escritos como potências de mesma base (respeitando as condições de existência). Observar que, nesses casos, pode-se calcular o logaritmo efetuando a mudança para qualquer base.

Exercícios resolvidos

R9. Determinar o resultado de:

a) $\frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot (\log 49)$ **b)** $\log 6 \cdot \log_6 10$ **c)** $\log_3 8 \cdot \log_2 3$

▶ ***Resolução***

a) $\frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot (\log 49) = \frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot \frac{\log_7 49}{\log_7 10} =$

$= \frac{1}{8} \cdot \cancel{(\log_7 10)} \cdot \frac{2}{\cancel{\log_7 10}} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$

b) $\log 6 \cdot \log_6 10 = \cancel{\log 6} \cdot \frac{\log 10}{\cancel{\log 6}} = \log 10 = 1$

c) $\log_3 8 \cdot \log_2 3 = \frac{\log_2 8}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \cancel{\log_2 3} = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3$

R10. Em uma calculadora científica, calcular $\log_4 20$.

▶ ***Resolução***

Na calculadora científica, como vimos, geralmente temos apenas a tecla log, que calcula o logaritmo na base 10. Por isso, para calcular $\log_4 20$, devemos efetuar a mudança para a base 10: $\log_4 20 = \frac{\log 20}{\log 4}$

Na calculadora, obtemos: $\log 20 \simeq 1{,}3$ e $\log 4 \simeq 0{,}6$. Assim:

$\log_4 20 = \frac{\log 20}{\log 4} \simeq \frac{1{,}3}{0{,}6} \simeq 2{,}17$

Então, concluímos que $\log_4 20 \simeq 2{,}17$.

◆ **Observação**

Antes de utilizar a calculadora, podemos estimar o valor.
Nesse caso, $\log_4 20$ estará entre 2 e 3, pois: $4^2 < 20 < 4^3$

R11. Uma dívida D aumenta 10% ao mês.

a) Determinar o valor da dívida após 1 mês, após 2 meses e após n meses.

b) Calcular o número n de meses para que a dívida quadruplique.

▶ ***Resolução***

a) Após 1 mês, a dívida valerá:

$(100\% + 10\%) \cdot D = 110\% \cdot D = 1{,}1D = D(1{,}1)^1$

Para o 2º mês, o juro incide sobre a dívida acumulada no final do 1º mês. Então, após 2 meses, a dívida valerá:

$(100\% + 10\%) \cdot 1{,}1D = 110\% \cdot 1{,}1D = 1{,}1 \cdot 1{,}1D = D(1{,}1)^2$

Após n meses, teremos: $D(1{,}1)^n$

b) Vamos calcular o número n de meses para que a dívida quadruplique, ou seja, para que ela seja $4D$:

$D(1{,}1)^n = 4D \Rightarrow (1{,}1)^n = 4$

Aplicando a definição de logaritmo nessa última equação, podemos escrever: $n = \log_{1{,}1} 4$

Efetuando a mudança de base, temos:

$n = \frac{\log 4}{\log 1{,}1}$

Em uma calculadora científica, obtemos $\log 4 \simeq 0{,}6021$ e $\log 1{,}1 \simeq 0{,}0414$. Assim:

$n \simeq \frac{0{,}6021}{0{,}0414} \Rightarrow n \simeq 14{,}5$

Como o cálculo é feito mês a mês, concluímos que a dívida quadruplicará em 15 meses.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

21. a) $\frac{1}{\log 3}$; b) $\frac{1}{\log_5 2}$; c) $\frac{1}{\log_3 10}$; d) $\frac{1}{\log_{11} 7}$; e) $\frac{1}{\log_{26} 13}$

19. Com uma calculadora científica, determine o valor aproximado, com quatro casas decimais, de:

a) $\log 32$ $\simeq 1{,}5051$ **b)** $\log_6 40$ $\simeq 2{,}0587$

20. Considerando $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule os seguintes logaritmos.

a) $\log 6$ 0,78
b) $\log 30$ 1,48
c) $\log_3 2$ 0,625
d) $\log 5$ 0,70
e) $\log 144$ 2,16
f) $\log \sqrt[3]{30}$ 0,4933...

21. Transforme cada logaritmo a seguir em um logaritmo na base indicada.

a) $\log_3 10$ na base 10
b) $\log_2 5$ na base 5
c) $\log 3$ na base 3
d) $\log_7 11$ na base 11
e) $\log_{13} 26$ na base 26

22. Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, transforme $\log_a b$ para a base b e responda:

a) Qual é o resultado? $\frac{1}{\log_b a}$

b) Com base no logaritmo que foi dado e no logaritmo encontrado, que conclusão pode ser obtida?

c) De acordo com sua conclusão, o que acontecerá ao multiplicar $\log_a b$ por $\log_b a$? O resultado será 1.

23. Quando simplificada, qual é o valor da expressão $9 - (\log_{15} 8) \cdot (\log_2 15)$? 6

24. Calcule os valores de:

$A = \log_{\frac{1}{5}} 16 \cdot \log_{16} \frac{1}{5}$ e $B = \frac{1}{\log_{25} 5}$ $A = 1$ e $B = 2$

25. Calcule no caderno o produto:

$\log_3 5 \cdot \log_7 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 3$ 1

26. Admitindo satisfeitas as condições de existência, calcule o valor das expressões a seguir.

a) $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$ 1

b) $\frac{\log_c a}{\log_c b} - \log_b a$ 0

c) $\log_b a^2 \cdot \log_a b^2$ 4

27. Admitindo satisfeitas as condições de existência, escreva $\log_{a^n} b$ na base a. $\frac{1}{n} \cdot \log_a b$

28. Thiago investiu R$ 1.400,00 em uma aplicação financeira que rende 0,9% ao mês. A fórmula $M = 1.400 \cdot (1{,}009)^t$ relaciona o montante M (valor total acumulado) com o tempo t de investimento, em meses.

Com o auxílio de uma calculadora, calcule:

a) o montante após 1 ano de aplicação. $\simeq$ R$ 1.558,91

b) o tempo de aplicação necessário para que o montante chegue a R$ 2.100,00. 46 meses

29. Reúna-se com um colega e resolvam o exercício.

Uma microempresa realizou um empréstimo no valor de R$ 1.500,00. A cada trimestre sem pagamento, o valor que deverá ser pago pelo empréstimo é corrigido aplicando-se uma taxa de juro trimestral de 20%. R$ 1.800,00 e R$ 2.160,00, respectivamente

a) Qual será o valor da dívida dessa empresa após 1 trimestre? E após 2 trimestres?

b) Escrevam uma fórmula que possa ser utilizada para calcular o valor d dessa dívida após n trimestres. (*Dica*: Analisem os cálculos feitos no item anterior.) $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$

c) Quantos anos são necessários para que essa dívida seja de R$ 3.110,40? 1 ano

d) Escrevam uma lei matemática que possa ser utilizada para determinar o número n de trimestres necessários para que essa dívida atinja um valor d. $n = \log_{1{,}2}\left(\frac{d}{1.500}\right)$

22. b) O logaritmo de *b* na base *a* é igual ao inverso do logaritmo de *a* na base *b*.

3 Função logarítmica

Como vimos no início deste capítulo, considerando bactérias que se multiplicam por divisões sucessivas, originando, a cada hora, duas bactérias, é possível determinar o número n de bactérias em função da quantidade t de horas por meio da equação $n = 2^t$.

Aplicando o que foi visto sobre logaritmo, é possível escrever uma igualdade para determinar a quantidade t de horas necessárias para que se obtenha n bactérias: $n = 2^t \Rightarrow t = \log_2 n$

Nesse caso, a quantidade t de horas é determinada em função da quantidade n de bactérias. Observe que esse é um exemplo de função em que a variável está no logaritmando.

Uma função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ chama-se **função logarítmica** quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemplos

- $f(x) = \log_7 x$
- $g(x) = \log_{0{,}3} x$
- $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

◆ Observação

Existem funções que podem ser obtidas a partir de uma função logarítmica. Por exemplo:

$f(x) = \log (x + 1)$

$g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x^2$

$h(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} (3x - 4)$

Exercícios resolvidos

R12. Dadas as funções $f(x) = \log (x + 3)$ e $g(x) = \log_5 x$, calcular $f(7)$ e $g(1)$.

▸ ***Resolução***

Para calcular $f(7)$, basta substituir x por 7 na lei $f(x) = \log (x + 3)$. Assim:

$f(7) = \log (7 + 3) = \log 10 = 1$

Do mesmo modo, para calcular $g(1)$, substituímos x por 1 na lei da função g:

$g(1) = \log_5 1 = 0$

R13. Identificar o domínio das seguintes funções:

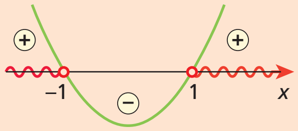
a) $g(x) = \log (x^2 - 1)$ **b)** $h(x) = \log_{x+1} (4 - x^2)$

▸ ***Resolução***

a) $g(x) = \log (x^2 - 1)$

Pelas condições de existência, devemos ter: $x^2 - 1 > 0$

Estudando o sinal da função dada por $y = x^2 - 1$, cujos zeros são -1 e 1, podemos fazer o seguinte esquema:



Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

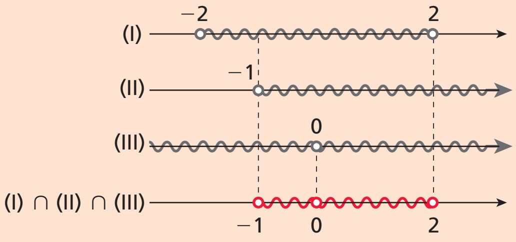
b) $h(x) = \log_{x+1} (4 - x^2)$

Pelas condições de existência, temos:

(I) $4 - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$

(II) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

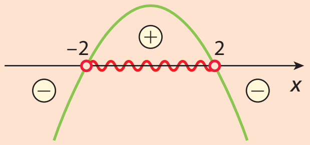
(III) $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$



Portanto, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ e } x \neq 0\}$.

◆ Observação

Para $4 - x^2 > 0$, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

30. Considerando a função dada por $f(x) = \log_2 (x + 1)$, determine:

a) $f(7)$ 3 **c)** $f(-0{,}5)$ -1

b) $f(0)$ 0 **d)** $f\left(\sqrt{2} - 1\right)$ $\frac{1}{2}$

31. Dada a função g, tal que $g(x) = \log_3 (x - 4)$, determine o valor de x para:

a) $g(x) = 3$ 31 **b)** $g(x) = \frac{1}{2}$ $\sqrt{3} + 4$

32. Identifique o domínio das funções dadas por:

a) $f(x) = \log (2x + 5)$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$

b) $f(x) = \log_{x+2} (3 - x)$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$

c) $g(x) = \log_{18} 2^x$ $D(g) = \mathbb{R}$

33. (Vunesp) O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude.

Suponha que a altitude h acima do nível do mar, em quilômetro, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica p, em atm, por $h(p) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$. Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação $\log_{10} 2 = 0{,}3$, a altitude h do avião nesse instante, em quilômetro, era de: alternativa b

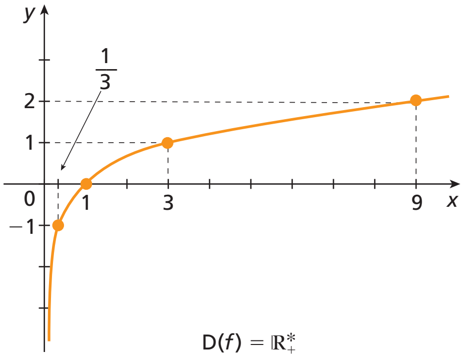
a) 5 **b)** 8 **c)** 9 **d)** 11 **e)** 12

3.1 Gráfico da função logarítmica

Observe a seguir os gráficos de duas funções logarítmicas.

- $f(x) = \log_3 x$

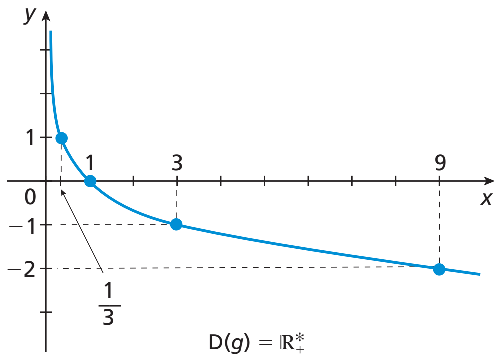
x	$f(x)$
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2



D(f) = $\mathbb{R}_+^*$
Im(f) = $\mathbb{R}$

- $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	$g(x)$
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2



D(g) = $\mathbb{R}_+^*$
Im(g) = $\mathbb{R}$

Observando esses gráficos, percebemos que ambos interceptam o eixo x no ponto (1, 0) e não encostam no eixo das ordenadas. O gráfico de qualquer função logarítmica $f(x) = \log_a x$ possui essas características e tem aspecto semelhante a um dos gráficos acima.

Observação

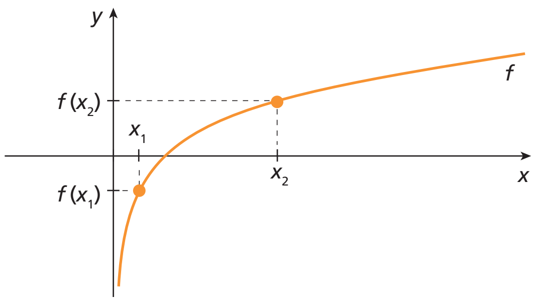
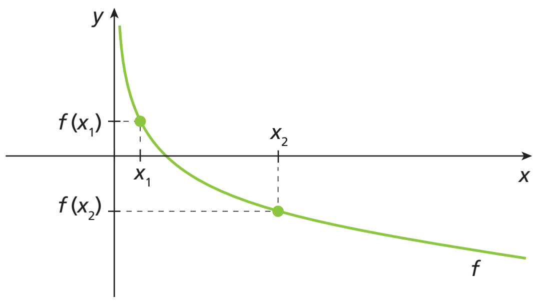
Observe que quanto mais o valor de x se aproxima de zero, pela direita, mais o gráfico de f se aproxima do eixo y, sem tocá-lo, isto é, o eixo y é a reta assíntota de f. O mesmo vale para a função g.

Crescimento e decrescimento de uma função logarítmica

Analisando as tabelas de valores e os gráficos das funções $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ apresentados acima, verificamos que:

- quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $f(x) = \log_3 x$ também aumentam. Isso ocorre porque a base a é maior que 1 ($a = 3$). Portanto, a função f é **crescente**.
- quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ diminuem. Isso ocorre porque a base a está entre 0 e 1 $\left(a = \frac{1}{3}\right)$. Portanto, a função g é **decrescente**.

De modo geral, temos:

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Exemplos

- $g(x) = \log_2 x$
  g é crescente
- $h(x) = \log_{\sqrt{3}} x$
  h é crescente
- $i(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
  i é decrescente
- $j(x) = \log_{0,1} x$
  j é decrescente

Reflita

Dê o sinal de $\log_a x$ para:

- $a > 1$ e $x > 1$ positivo
- $a > 1$ e $0 < x < 1$ negativo
- $0 < a < 1$ e $x > 1$ negativo
- $0 < a < 1$ e $0 < x < 1$ positivo

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Uma relação entre a função logarítmica e a função exponencial

Vejamos agora uma importante relação entre a função logarítmica de lei $g(x) = \log_a x$ e a função exponencial dada por $f(x) = a^x$.

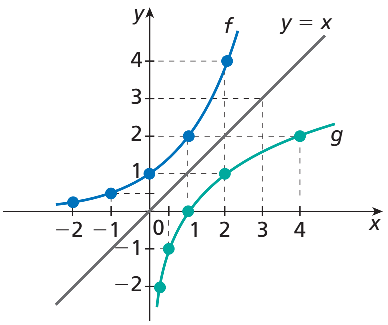
Pela definição de logaritmo, se $y = \log_a x$, então $x = a^y$. Considerando os respectivos domínios e contradomínios, as funções logarítmica e exponencial são funções inversas.

Como vimos em capítulos anteriores, os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$, denominada bissetriz dos quadrantes ímpares.

Como exemplo, observe os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

x	$f(x) = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$g(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



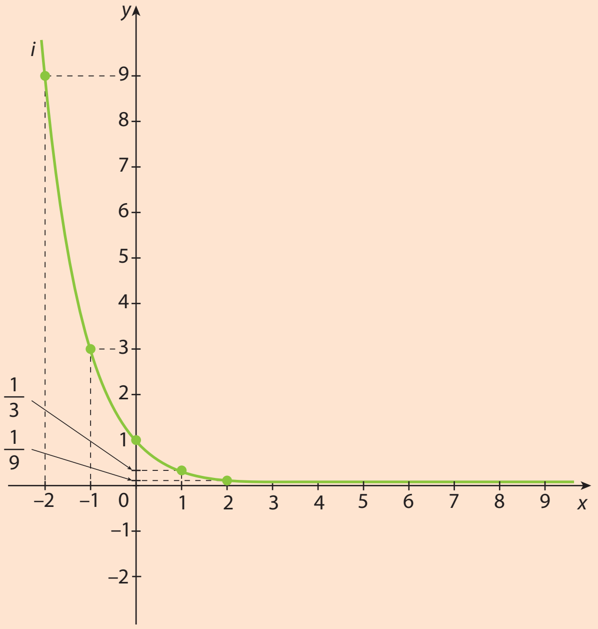
Exercícios resolvidos

R14. Esboçar os gráficos das funções inversas i e h, tais que $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

▸ ***Resolução***

Primeiro, faremos um esboço do gráfico da função i. Para isso, vamos atribuir valores a x e calcular os respectivos valores de $i(x)$.

x	$i(x)$
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



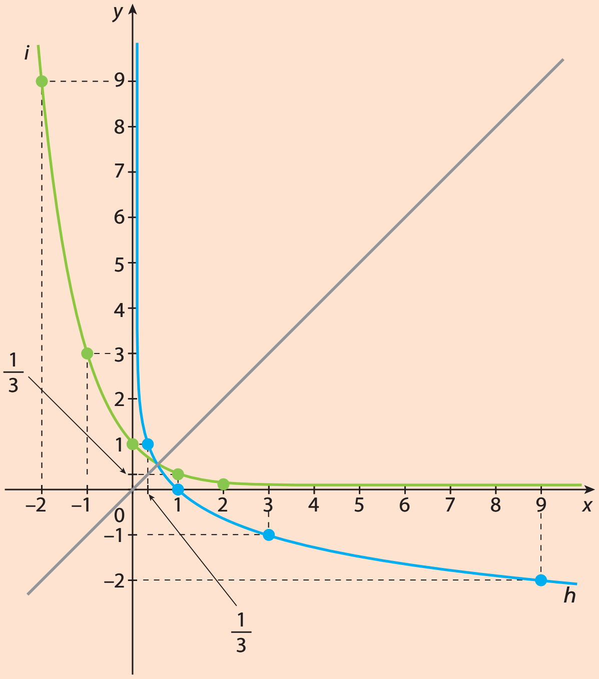
Sabendo que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$, é possível fazer o esboço do gráfico da função h.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

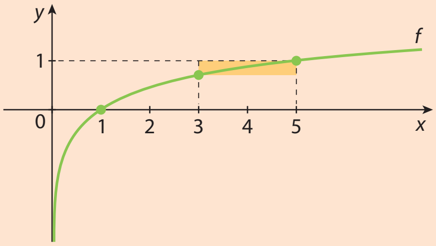
◆ Observação

Poderíamos ter feito primeiro o esboço do gráfico da função *h* e, a partir dele, por simetria, fazer o esboço do gráfico da função *i*.

Logo, os gráficos de i e h estão representados no plano cartesiano pelas curvas verde e azul, respectivamente.



R15. A figura abaixo representa o gráfico de uma função logarítmica.



a) Determinar a lei da função.

b) Calcular a área do retângulo destacado.

(*Dado*: $\log_5 3 \simeq 0{,}68$)

Resolução

a) A função é da forma $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Precisamos descobrir o valor da base a.

Pelo gráfico, temos que $f(5) = 1$.

Então:

$1 = \log_a 5 \Rightarrow a^1 = 5 \Rightarrow a = 5$

Logo: $f(x) = \log_5 x$

b) A base do retângulo mede:

$5 - 3 = 2$

A altura do retângulo mede:

$\log_5 5 - \log_5 3 = 1 - \log_5 3$

Assim, calculamos a área do retângulo:

$2 \cdot (1 - \log_5 3) = 2 - 2 \cdot \log_5 3 \simeq 2 - 2 \cdot 0{,}68 = 0{,}64$

Logo, a área do retângulo é, aproximadamente, 0,64 unidade de área.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

36. a) $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$ b) $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$

34. Com o auxílio de uma tabela, construa os gráficos das seguintes funções logarítmicas:

a) $h(x) = \log_2 x$ crescente **b)** $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ decrescente

- Qual função é crescente e qual é decrescente?
- Como você responderia a essas perguntas sem construir os gráficos correspondentes?

Ver resolução no Guia do professor.

Ver resolução no Guia do professor.

35. Classifique cada uma das funções em crescente ou decrescente, justificando sua resposta.

a) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ decrescente **b)** $y = \log x$ crescente

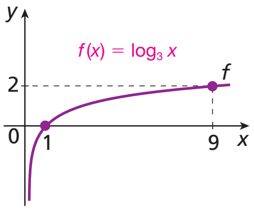
36. Determine o valor de k para que:

a) $f(x) = \log_{k-3} x$ seja uma função crescente.

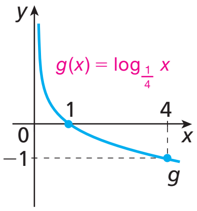
b) $f(x) = \log_{3k-1} x$ seja uma função decrescente.

37. Em cada item, determine a função logarítmica representada pelo gráfico.

a)



b)

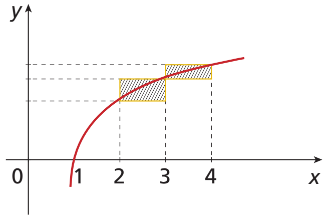


38. Em cada item, construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções inversas dadas por: Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = \log x$ e $g(x) = 10^x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

39. (Fuvest-SP) A curva da figura que se segue representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$, para $x > 0$.

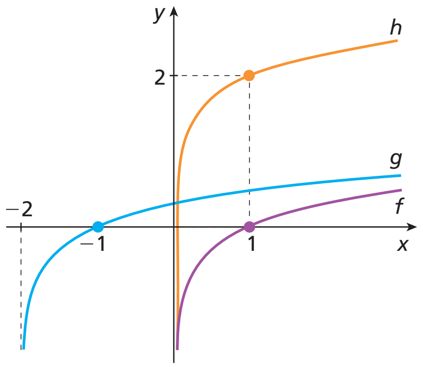


Assim sendo, a área da região hachurada formada pelos dois retângulos é: alternativa a

a) $\log_{10} 2$ **c)** $\log_{10} 4$ **e)** $\log_{10} 6$

b) $\log_{10} 3$ **d)** $\log_{10} 5$

40. Carlos esboçou, em um plano cartesiano, o gráfico da função $f(x) = \log x$. Depois, apenas com base nesse gráfico, esboçou os gráficos das funções $g(x) = \log (x + 2)$ e $h(x) = \log x + 2$, obtendo o seguinte resultado: Ver resolução no Guia do professor.



a) Explique como Carlos construiu esses gráficos. Se achar conveniente, avalie sua hipótese em um *software* de construção de gráficos, testando outros valores.

b) Utilizando a mesma estratégia de Carlos, faça, em um único plano cartesiano, um esboço para os gráficos das funções dadas por $f(x) = \log x$, $i(x) = \log (x + 1)$ e $j(x) = \log x + 1$.

41. Reúna-se com um colega e, com base no gráfico da função $f(x) = \log x$, construam o esboço dos gráficos das seguintes funções: Ver resolução no Guia do professor.

a) $g(x) = \log \left(\frac{x}{10}\right)$ **b)** $g(x) = \log \left(\frac{x}{100}\right)$

(*Dica*: Primeiro, reescrevam as leis das funções usando as propriedades dos logaritmos.)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4 Equações logarítmicas e sistemas

Equações que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo (ou em ambos) são classificadas como **equações logarítmicas**.

Exemplos

- $\log (2x - 3) = -1$
- $\log_x^2 x + \log_x x = 2$
- $\log_x 5 + 7 = 0$

Podemos resolver equações logarítmicas de diversas maneiras: aplicando a definição de logaritmo, usando as propriedades dos logaritmos, efetuando mudanças de variável etc. Acompanhe, nos exercícios resolvidos a seguir, alguns modos de resolução.

◆ Observação

Se o número obtido na resolução de uma equação logarítmica não satisfizer as condições de existência do logaritmo, o conjunto solução é o conjunto vazio.

Exercícios resolvidos

R16. Determinar o valor de x sabendo que $\log_6 (x + 5) = 2$.

▶ ***Resolução***

Primeiro, estabelecemos a condição de existência: $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

Em seguida, resolvemos a equação dada usando a definição de logaritmo:

$\log_6 (x + 5) = 2 \Rightarrow 6^2 = x + 5 \Rightarrow x = 31$

Como 31 atende à condição de existência do logaritmo, então x é igual a 31.

R17. Resolver a equação $\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6)$.

▶ ***Resolução***

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x + 7 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{7}{2} \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow x > 6$$

Para resolver equações como essa, podemos usar a consequência da definição de logaritmo:

$\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$

Assim:

$\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6) \Rightarrow 2x + 7 = x - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - x = -6 - 7 \Rightarrow x = -13$

Como $x = -13$ não obedece à condição de existência ($x > 6$), concluímos que não existe x que satisfaça a equação, ou seja, $S = \varnothing$.

R18. Resolver a equação $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 0$.

▶ ***Resolução***

Estabelecemos as condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

Resolvemos a equação utilizando as propriedades e a definição de logaritmo:

$\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 0 \Rightarrow \log_3 [x(x - 2)] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x = 3^0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

Apenas x_1 atende às condições de existência. Portanto, $S = \{1 + \sqrt{2}\}$.

R19. Resolver o sistema: $\begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ 4^{x + y} = 1.024 \end{cases}$

▶ ***Resolução***

Condições de existência do logaritmo:

$x > 0$ e $y > 0$

Preparando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ 4^{x + y} = 1.024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log \dfrac{x}{y} = \log 4 \\ 4^{x + y} = 4^5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 4 \Rightarrow x = 4y \text{ (I)} \\ x + y = 5 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II): $4y + y = 5 \Rightarrow y = 1$

Substituindo y por 1 em (I): $x = 4 \cdot 1 \Rightarrow x = 4$

Como ambos os resultados obedecem à condição de existência, $S = \{(4, 1)\}$.

◆ Observação

Em um sistema em que há duas equações e duas incógnitas, a solução, se existir, será um par ordenado (x, y). Por isso, há a necessidade de colocar, além das chaves na solução, os parênteses: $S = \{(x, y)\}$

R20. Resolver a equação $\log^2 x - 5 \cdot \log x + 4 = 0$.

▶ ***Resolução***

Condição de existência: $x > 0$

Substituindo $\log x$ por y, obtemos:

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$ e $y_2 = 1$

Como $y = \log x$, temos:

- $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$
- $\log x = 4 \Rightarrow x = 10.000$

Como ambos os resultados obedecem à condição de existência, temos $S = \{10, 10.000\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

42. Resolva as equações a seguir.

a) $\log_x 64 = 2$ $S = \{8\}$

b) $\log_4 (x + 1) = 2$ $S = \{15\}$

c) $\log (x - 1)^2 = \log 1$ $S = \{0, 2\}$

d) $\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$ $S = \{1\}$

e) $\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1$ $S = \{4\}$

f) $\log x + 2 \cdot \log^2 x - 1 = 0$ $S = \left\{\dfrac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$

43. Resolva o sistema.

$$\begin{cases} \log_2 (x - 2) - \log_2 (y + 1) = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$ $S = \{(8, 2)\}$

44. A massa A de uma substância radioativa decai segundo a lei $A = A_0 \cdot 10^{-0,012t}$, em que t é o tempo de decaimento, em hora, e A_0 é a massa inicial, isto é, a massa correspondente a $t = 0$.

Para calcular a meia-vida dessa substância, ou seja, o tempo decorrido para que $A = \dfrac{1}{2}A_0$, um químico substituiu A por $\dfrac{1}{2}A_0$ nessa lei e obteve a equação $\log 0,5 = \log 10^{-0,012t}$. Considerando $\log 0,5 = -0,30$, resolva essa equação para obter a meia-vida da substância. 25 horas

5 Inequações logarítmicas

Inequações que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo (ou em ambos) são denominadas **inequações logarítmicas**.

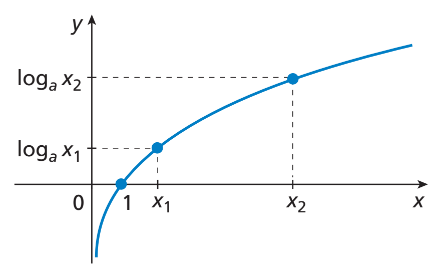
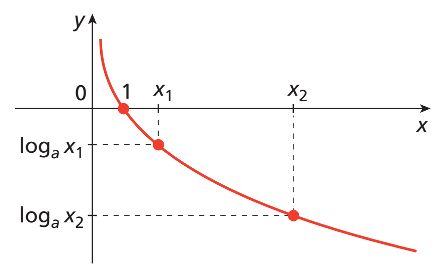
Observação

Nesta obra, estudaremos apenas as inequações logarítmicas que apresentam a incógnita no logaritmando.

Exemplos

- $\log_3 (x + 1) > \log_3 x$
- $\log_5 (x - 2) - \log_7 (x^2 + 4) \leqslant 9$
- $\log_6 x \geqslant 0$

Já vimos que uma função logarítmica pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base a.

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$

Assim, podemos concluir que:

- Quando a base do logaritmo é maior que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos. Ou seja, para $\mathbf{a > 1}$, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$$

sinal mantido

- Quando a base do logaritmo está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos. Ou seja, para $\mathbf{0 < a < 1}$, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

sinal invertido

Observação

Analogamente, temos:

- se $a > 1$, então:
  $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geqslant g(x)$
- se $0 < a < 1$, então:
  $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leqslant g(x)$

Apesar de essas regras serem análogas às utilizadas na resolução de inequações exponenciais, devemos lembrar que a função exponencial tem domínio $\mathbb{R}$, ou seja, não há condição de existência, ao contrário da função logarítmica, cujo domínio é $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, ao resolver inequações logarítmicas, é fundamental determinar as condições de existência.

Exercícios resolvidos

R21. Resolver a inequação $\log (x + 13) > \log 2$.

Resolução

Condição de existência:

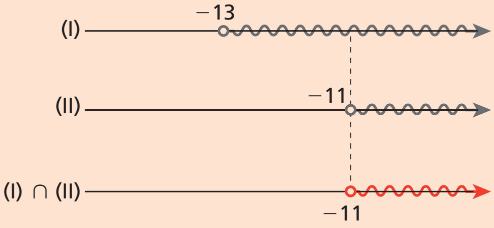
$x + 13 > 0 \Rightarrow x > -13$ (I)

Como a base é 10 (maior que 1), a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos:

$\log (x + 13) > \log 2 \Rightarrow x + 13 > 2 \Rightarrow x > -11$ (II)

sinal mantido

As duas desigualdades devem ser satisfeitas:
$x > -13$ e $x > -11$



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -11\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R22. Resolver a inequação

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant -2.$$

▶ ***Resolução***

Condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x + 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 10 \text{ (I)}$$

Agora, para resolver a inequação, devemos escrever -2 como o logaritmo de um número na base $\frac{1}{3}$. De acordo com a 3ª consequência da definição de logaritmo, para escrever um número real n como logaritmo de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, basta trocá-lo por $\log_a a^n$. Assim:

$$-2 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$$

Assim:

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$$

$$\log_{\frac{1}{3}} [x(-x + 10)] \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$$

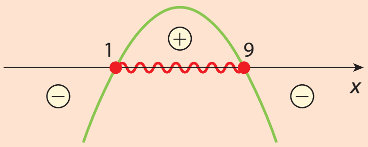
Como a base é $\frac{1}{3}$ (está entre 0 e 1), a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos:

$$\log_{\frac{1}{3}} [x(-x + 10)] \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9 \Rightarrow [x(-x + 10)] \geqslant 9 \Rightarrow$$

sinal invertido

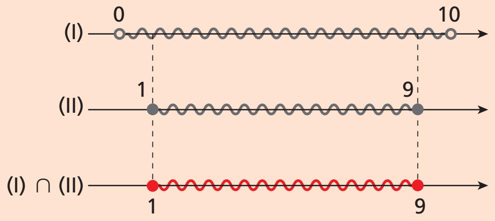
$$\Rightarrow -x^2 + 10x - 9 \geqslant 0$$

Resolvendo a equação $-x^2 + 10x - 9 = 0$, obtemos $x = 1$ ou $x = 9$.



Portanto: $-x^2 + 10x - 9 \geqslant 0 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 9$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 9\}$.

R23. Determinar os valores de x que tornam verdadeira a desigualdade: $1 < \log_3 (2x - 1) < 4$

▶ ***Resolução***

Condição de existência:

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \text{ (I)}$$

Devemos escrever 1 e 4 como os logaritmos de um número na base 3:

- $1 = \log_3 3^1 = \log_3 3$
- $4 = \log_3 3^4 = \log_3 81$

Dessa forma, temos:

$$\log_3 3 < \log_3 (2x - 1) < \log_3 81$$

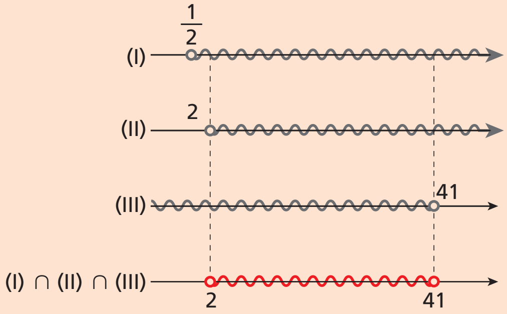
Como a base é 3 (maior que 1):

$$3 < 2x - 1 < 81$$

Assim:

- $3 < 2x - 1 \Rightarrow x > 2$ (II)
- $2x - 1 < 81 \Rightarrow x < 41$ (III)

As desigualdades (I), (II) e (III) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 41\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

45. Resolva as inequações.

a) $\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$

b) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

c) $\log_8 x \geqslant 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$

d) $\log_{0,2} (x + 3) > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$

e) $\log_{0,3} (2x - 2) + \log_{0,3} 2 > 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$

f) $0 < \log_3 (x - 2) < 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$

46. Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$. Ver resolução no Guia do professor.

a) Analise, com um colega, os intervalos do domínio em que $f(x) \geqslant g(x)$.

b) Montem a inequação, resolvam-na e comparem a solução com a análise dos gráficos.

c) Redijam a conclusão a que chegaram.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Determine o valor de:

a) $M = \log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2{,}5$ 5

b) $A = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$ $\frac{3}{8}$

2. (Cesgranrio-RJ) Se $\log_{10} 123 = 2{,}09$, o valor de $\log_{10} 1{,}23$ é: alternativa b

a) 0,0209

b) 0,09

c) 0,209

d) 1,09

e) 1,209

3. (Mackenzie-SP) Considerando que $x - y = \sqrt[3]{3}$ e que $x + y = \sqrt{3}$, o valor de $\log_3 (x^2 - y^2)$ é: alternativa e

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{5}{6}$

4. (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático $h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$, com $h(t)$ em metro e t em ano. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em ano) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de: alternativa b

a) 9

b) 8

c) 5

d) 4

e) 2

5. (PUC-MG) As indicações R_1 e R_2 de dois terremotos, na escala Richter, estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$, em que E_1 e E_2 medem as respectivas energias, liberadas pelos terremotos em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Nessas condições, se $R_1 = 8{,}5$ e $R_2 = 7{,}0$, é correto afirmar que a razão entre E_1 e E_2, nessa ordem, é igual a: alternativa d

a) 0,5

b) 1,5

c) $10^{0,5}$

d) $10^{1,5}$

6. (Enem) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10} (M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina · cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. Geological Survey. Historic Earthquakes.
Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>.
Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

U.S. Geological Survey. *USGS Earthquake Magnitude Policy*.
Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>.
Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina · cm)? alternativa e

a) $10^{-5,10}$

b) $10^{-0,73}$

c) $10^{12,00}$

d) $10^{21,65}$

e) $10^{27,00}$

7. A intensidade sonora é medida em uma unidade conhecida por decibel. Para medi-la, primeiro associa-se uma intensidade I_0 a um som muito fraco, que seria o menor valor audível pelo ser humano. Se um som tem intensidade I, o valor, em decibel, desse som é dado pela fórmula: $d = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

Quantos decibéis terá um som cuja intensidade equivale a $100I_0$? 20 decibéis

8. (Vunesp) O nível sonoro N, medido em decibéis (dB), e a intensidade I de um som, medida em watt por metro quadrado (W/m²), estão relacionados pela equação $N = 120 + 10 \cdot \log_{10} (I)$. Suponha que foram medidos em certo local os níveis sonoros N_1 e N_2 de dois ruídos com intensidades I_1 e I_2, respectivamente. Sendo $N_1 - N_2 = 20$ dB, a razão $\frac{I_1}{I_2}$ é: alternativa d

a) 10^{-2}

b) 10^{-1}

c) 10

d) 10^2

e) 10^3

Exercícios complementares

a) $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

9. A *meia-vida* de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.

a) Escreva a lei que fornece a massa final A em função da massa inicial A_0 e do tempo n.

b) Se 16 gramas de uma substância se reduzirem, daqui a n meias-vidas, a aproximadamente $1{,}355 \cdot 10^{-20}$ grama, qual será o valor aproximado de n? (Use uma calculadora científica.) $\simeq 70$

10. Estima-se hoje que a população de determinado país aumente de acordo com a lei $P(t) = P_0 \cdot (1{,}02)^t$, sendo t o tempo em ano, P_0 a população quando $t = 0$ e $P(t)$ o total de habitantes após t anos. Daqui a quantos anos aproximadamente a população desse país estará duplicada? (Use uma calculadora científica.)
aproximadamente 35 anos

11. (Fuvest-SP) O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$ é o intervalo: alternativa d

a) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

b) $\left]\frac{7}{4}, \infty\right[$

c) $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$

d) $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$

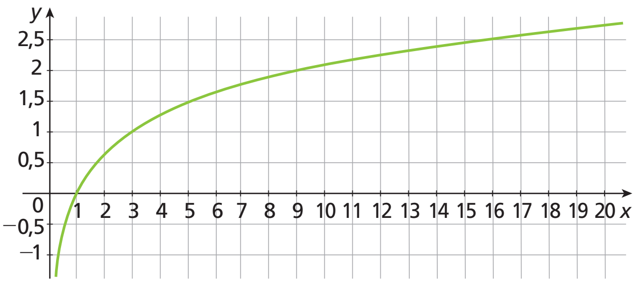
e) $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

12. (ESPM-SP) A solução da equação $\log_2 x^2 + \log_4 \sqrt{x} = -2{,}25$ é: alternativa a

a) 0,5
b) 3,5
c) 7,5
d) 10,5
e) 13,5

Aprofundamento

13. (Insper-SP) Na figura abaixo, está representada, fora de escala, uma parte do gráfico $y = \log_3 x$.



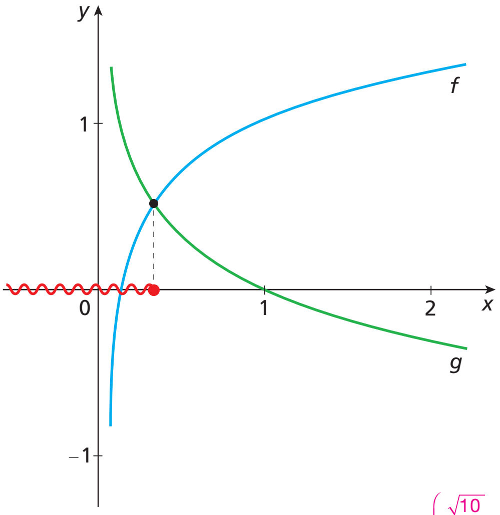
A partir do gráfico, pode-se concluir que a solução da equação $9^x = 15$ vale, aproximadamente: alternativa d

a) 2,50
b) 1,65
c) 1,45
d) 1,25
e) 1,10

14. (Fuvest-SP) Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a: alternativa e

a) $\frac{2}{p}$
b) $2p$
c) $2 + p^2$
d) $2 + 2p$
e) $\frac{2 + 2p}{p}$

15. Observe os gráficos das funções $f(x) = \log x + 1$ e $g(x) = -\log x$ e responda às questões a seguir.



$\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$

a) Qual é o ponto de intersecção dos gráficos das funções?

b) Escreva uma inequação cuja solução seja o intervalo de x representado na figura.
Resposta possível: $-\log x \geqslant \log x + 1$

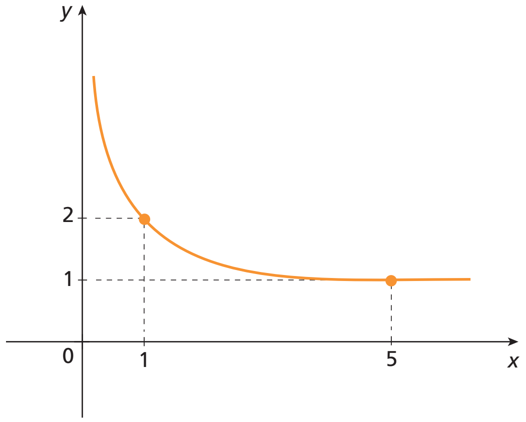
16. Escreva o domínio da função: $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1)}$

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$

17. Resolva a equação:
$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 x = \log_4 (2x - 1)$
$S = \{1\}$

Desafio

18. Observe o gráfico da função dada por $f(x) = \log_a x + k$.



- Sabendo que $g(x) = f(x) - 2$, calcule $g(125)$. -3

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Sendo g e h números reais positivos, com $g \neq 1$, se $\log_g h = i$, então: alternativa a

a) $g^i = h$
b) $g^h = i$
c) $h^g = i$
d) $i^h = g$

2. Considerando $\log_g h = i$, pode-se afirmar que: alternativa c

a) g pode ser zero.
b) h pode ser zero.
c) h deve ser positivo.
d) h deve ser diferente de 1.

3. É possível afirmar que $\log_4\left(\frac{2}{3}\right)$ equivale a: alternativa c

a) $\log_4 2 + \log_4 3$
b) $\log_4 2 : \log_4 3$
c) $\log_4 2 - \log_4 3$
d) $\log_4 2 \cdot \log_4 3$

4. Pode-se afirmar que $\log_{39} 42$ equivale a: alternativa b

a) $\log 42 \cdot \log 39$
b) $\frac{\log 42}{\log 39}$
c) $\log_{42} 39$
d) $\frac{\log 39}{\log 42}$

5. Admitindo $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}47$, então $\log 6$ é igual a: alternativa b

a) 0,141
b) 0,77
c) −0,17
d) 0,15

6. Sabemos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $\text{pH} = -\log\,[\text{H}^+]$; então, podemos afirmar que, se o pH de uma substância é 10, a concentração de H^+ é: alternativa a

a) 10^{-10}
b) 10^{10}
c) -10^{10}
d) 1.010

7. A função f, tal que $f(x) = \log_{\frac{2}{7}} x$, é: alternativa d

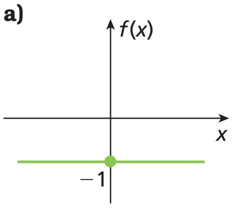
a) crescente.
b) nula.
c) constante.
d) decrescente.

8. As funções dadas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = 3^x$ são: alternativa c

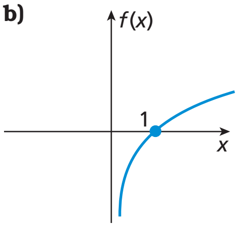
a) opostas.
b) polinomiais.
c) inversas.
d) constantes.

9. A função f, de lei $f(x) = \log_3 x$, pode ser representada pelo gráfico: alternativa b

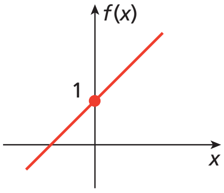
a)



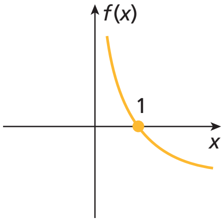
b)



c)



d)



10. A equação $\log_x 8 = 2$ tem por solução: alternativa d

a) 64
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $-\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2}$

11. Se $\log(x^2 + 6) < 1$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: alternativa d

a) $x > 2$
b) $x < -2$
c) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
d) $-2 < x < 2$

Retomada de conceitos

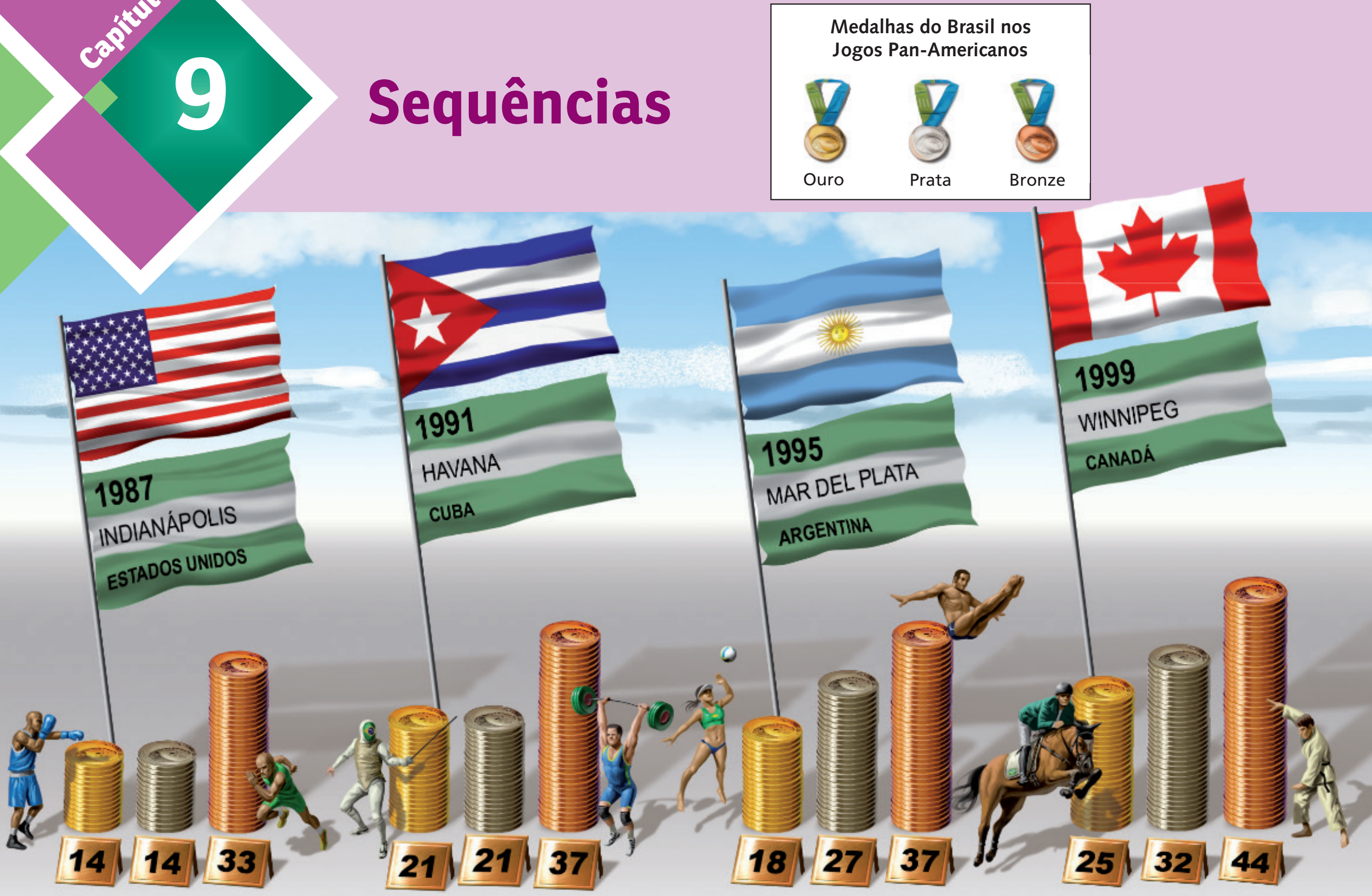
Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Calcular logaritmo.	X	X	X	X	X	X					
Identificar uma função logarítmica.							X	X	X		
Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica.							X		X		
Resolver situações-problema que envolvam logaritmos.						X					
Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas.										X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	169 a 171	169 a 171	172 e 173	174 a 176	172 e 173	169 a 171	176 a 178	176 a 181	175 a 179	181 e 182	183 e 184

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 9

Sequências


Medalhas do Brasil nos Jogos Pan-Americanos
Ouro
Prata
Bronze
1987
INDIANÁPOLIS
ESTADOS UNIDOS
14
14
33
1991
HAVANA
CUBA
21
21
37
1995
MAR DEL PLATA
ARGENTINA
18
27
37
1999
WINNIPEG
CANADÁ
25
32
44

Na página 252, apresentamos a sinopse e indicamos a leitura do livro *O diabo dos números*, que se relaciona ao assunto estudado neste item.

1 Sequências e padrões

O infográfico acima apresenta o número de medalhas que o Brasil conquistou nos oito últimos Jogos Pan-Americanos. Os anos em que ocorreram essas competições formam uma **sequência** ou **sucessão** e podemos escrevê-los da seguinte forma:

(1987, 1991, 1995, 1999, 2003, 2007, 2011, 2015).

Os elementos ou termos dessa sequência podem ser representados por uma letra (geralmente usa-se a letra *a*) e um índice que indica a posição ou ordem do elemento na sequência. Dessa maneira: $a_1 = 1987$ é o primeiro termo da sequência, $a_2 = 1991$ é o segundo termo e assim sucessivamente até $a_8 = 2015$.

Com os dados fornecidos pelo infográfico, também podemos escrever outras sequências, por exemplo:

- a sequência das cidades que sediaram os oito últimos Jogos Pan-Americanos: (Indianápolis, Havana, Mar del Plata, Winnipeg, Santo Domingo, Rio de Janeiro, Guadalajara, Toronto);
- a sequência do total de medalhas do Brasil nos oito últimos Jogos Pan-Americanos: (61, 79, 82, 101, 123, 157, 141, 141).

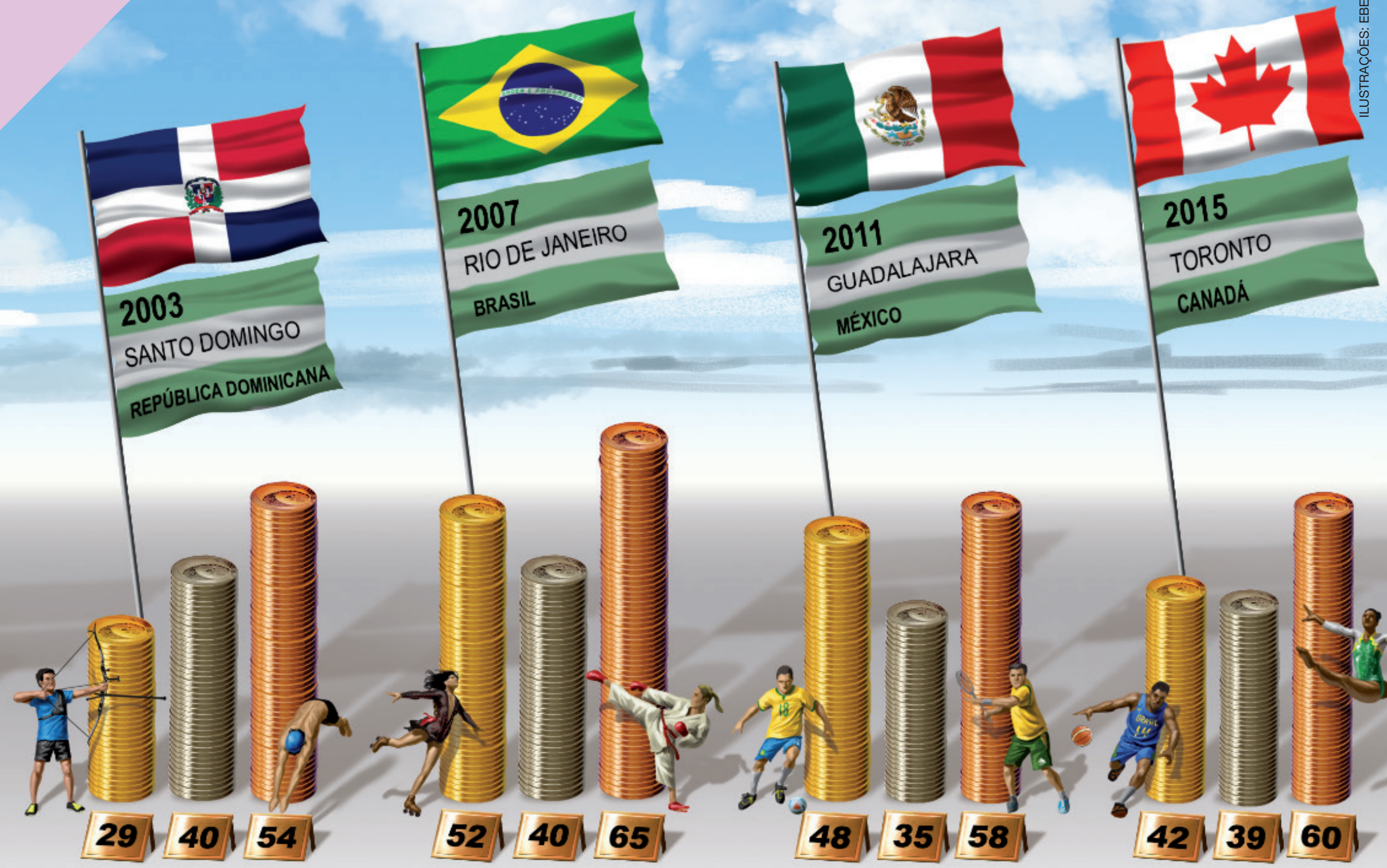
Se a sequência tiver um último termo, dizemos que ela é **finita**. Caso contrário, dizemos que é **infinita** e a indicamos colocando reticências no final.

Exemplos

a) A sequência dos meses de um ano é finita, pois tem um último elemento: (janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro).

Objetivos do capítulo

- Identificar padrões numéricos e sequências.
- Resolver problemas que envolvam sequências.
- Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.


2003
SANTO DOMINGO
REPÚBLICA DOMINICANA
2007
RIO DE JANEIRO
BRASIL
2011
GUADALAJARA
MÉXICO
2015
TORONTO
CANADÁ
29
40
54
52
40
65
48
35
58
42
39
60

ILUSTRAÇÕES: EBER EVANGELISTA

Dados obtidos em: <www.cob.org.br>. Acesso em: 7 out. 2015.

b) A sequência dos números naturais primos é infinita. Para indicá-la, escrevemos seus primeiros elementos e colocamos reticências no final:
(2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)

c) A sequência formada pelas letras iniciais dos dias de uma semana é uma sequência finita: (D, S, T, Q, Q, S, S). Veja que os termos de uma sequência não são necessariamente distintos.

Note que todas essas sequências pressupõem certa ordem em seus termos.

Em uma sequência, a_n representa um termo genérico, na posição n. Assim, se $n = 5$, a_5 é o quinto termo; se $n = 100$, a_{100} é o 100º termo. O termo subsequente a a_n é representado por a_{n+1}, e o antecessor de a_n, a partir do segundo termo, é representado por a_{n-1}.

1.1 Sequências numéricas

Um tipo importante de sucessão são as sequências numéricas.

Uma **sequência numérica infinita** é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^*$ e contradomínio é $\mathbb{R}$.

Uma **sequência numérica finita** de n termos é uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ e contradomínio é $\mathbb{R}$.

Assim, temos $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$. Uma sequência finita de n termos é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, e uma sequência infinita é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

◆ Observação

Quando for conveniente, podemos representar o primeiro termo de uma sequência por a_0 em vez de a_1. Nesse caso, o domínio da função é $\mathbb{N}$.

- a_0
- A lei de formação precisou ser alterada porque, ao substituir n por 0, devemos obter 1, que é o primeiro número natural ímpar.
- $f(n) = 2n + 1$

◆ Reflita

Supondo que a lei de formação que determina uma sequência associe cada número natural, inclusive o zero, a um termo $a_n = f(n)$, resolva:

- Como é representado o primeiro termo dessa sequência?
- Considerando $n \in \mathbb{N}$, a lei de formação da sequência de números naturais ímpares, apresentada ao lado, precisará ser alterada. Por quê?
- Escreva uma nova lei de formação para determinar a sequência de números naturais ímpares considerando $n \in \mathbb{N}$.

◆ Determinação de uma sequência numérica

Algumas sequências numéricas podem ser determinadas por uma **lei de formação**, ou seja, uma lei que associa a cada número natural n diferente de zero um termo $a_n = f(n)$. O termo a_n, nesse caso, é conhecido por **termo geral** da sequência.

Exemplos

a) Para determinar a sequência de números naturais ímpares, podemos utilizar a seguinte lei de formação: $f(n) = 2n - 1$, em que $n \in \mathbb{N}^*$. Essa lei de formação associa cada número natural diferente de zero a um termo da sequência formada pelos números naturais ímpares. Nesse caso, o primeiro termo da sequência será indicado por a_1.

Na tabela a seguir estão determinados os quatro primeiros termos dessa sequência:

n	1	2	3	4
a_n	$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$	$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$	$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Assim, podemos verificar que a sequência dos números naturais ímpares é (1, 3, 5, 7, ...). Como n pertence a um conjunto infinito, a sequência também é infinita.

$a_n = 2n - 1$ é a lei de formação que expressa a_n em função de n, com n natural não nulo.

b) Considerando a sequência (7, 14, 21, 28, 35), verificamos que pode ser estabelecida uma relação entre o valor de cada termo e sua posição na sequência:

n	1	2	3	4	5
a_n	$a_1 = 7 = 7 \cdot 1$	$a_2 = 14 = 7 \cdot 2$	$a_3 = 21 = 7 \cdot 3$	$a_4 = 28 = 7 \cdot 4$	$a_5 = 35 = 7 \cdot 5$

Analisando a tabela, verificamos que o termo geral dessa sequência é $a_n = 7n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

◆ Reflita

Por que na sequência do exemplo **b** se considerou $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e não $n \in \mathbb{N}^*$?

Porque a sequência apresentada é finita.

Exercícios resolvidos

R1. Escrever a sequência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 5, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$$

▶ ***Resolução***

Nessa sequência, a lei de formação é um sistema de duas equações: uma para identificar o primeiro termo e outra para identificar os próximos termos (a_n), que dependem do anterior (a_{n-1}).

n	a_n
1	$a_1 = -2$
2	$a_2 = 3 \cdot a_1 - 5 = 3 \cdot (-2) - 5 = -11$
3	$a_3 = 3 \cdot a_2 - 5 = 3 \cdot (-11) - 5 = -38$
4	$a_4 = 3 \cdot a_3 - 5 = 3 \cdot (-38) - 5 = -119$

Portanto, a sequência pedida é $(-2, -11, -38, -119, ...)$.

R2. Considerar a sequência numérica definida por $f(n) = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calcular os quatro primeiros termos.

b) Determinar a ordem do termo 163.

c) Verificar se 111 pertence a essa sequência.

▶ ***Resolução***

a)

n	$f(n) = 3n + 1$
1	$f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$
2	$f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$
3	$f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$
4	$f(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

Portanto, os quatro primeiros termos da sequência são: 4, 7, 10 e 13

b) Devemos calcular n, $n \in \mathbb{N}^*$, de modo que $f(n) = 163$.

$$3n + 1 = 163 \Rightarrow n = \frac{163 - 1}{3} \Rightarrow n = 54$$

Logo, 163 é o 54º termo da sequência.

c) Devemos verificar se existe n, $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $3n + 1 = 111$.

$$3n + 1 = 111 \Rightarrow n = \frac{111 - 1}{3} \Rightarrow n = \frac{110}{3}$$

Como $\frac{110}{3} \notin \mathbb{N}^*$, concluímos que 111 não pertence à sequência.

R3. Determinar o termo geral da sequência (0, 6, 12, 18, 24, 30, ...).

Resolução

Para $n = \mathbf{1}$, temos: $a_1 = 0 = 6 \cdot 0 = 6 \cdot (\mathbf{1} - 1)$
Para $n = \mathbf{2}$, temos: $a_2 = 6 = 6 \cdot 1 = 6 \cdot (\mathbf{2} - 1)$
Para $n = \mathbf{3}$, temos: $a_3 = 12 = 6 \cdot 2 = 6 \cdot (\mathbf{3} - 1)$
Para $\boldsymbol{n}$ qualquer, temos: $a_n = 6 \cdot (\boldsymbol{n} - 1)$

Logo, o termo geral é: $a_n = 6(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Usando planilhas eletrônicas para determinar os termos de uma sequência

Algumas vezes, o termo geral de uma sequência é dado por uma lei tal que para calcular um termo é necessário conhecer os termos anteriores. Por exemplo, a sequência dada pela lei de formação:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 10 \\ a_n = n + a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Como você faria para calcular o termo a_{57} dessa sequência?

Para calcular o termo a_{57}, seria necessário conhecer os valores de a_{56} e a_{55} e, para calcular esses valores, por sua vez, seria necessário saber os valores de a_{54} e a_{53} e assim por diante; ou seja, para determinar o termo a_{57}, seria preciso calcular todos os termos do a_3 ao a_{56}.

Perceba que realizar esse procedimento fazendo as contas uma a uma, mesmo que usando uma calculadora, seria extremamente trabalhoso. Uma maneira de facilitar esse processo seria usar uma planilha eletrônica, como mostrado a seguir.

Vamos usar duas colunas da planilha: A e B. A coluna A será usada para os valores de n, e a coluna B, para os valores de a_n.

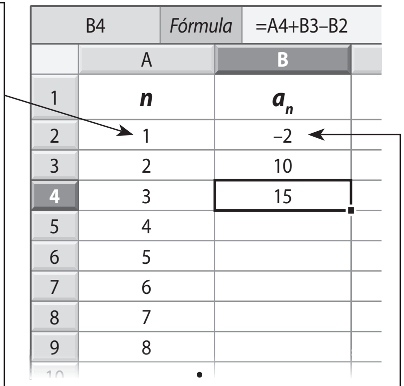
Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola para reproduzir esses procedimentos usando uma planilha eletrônica. Se achar conveniente, pedir a eles que encontrem os termos de outras sequências usando uma planilha. O uso de planilhas eletrônicas pode ser feito em diversos outros momentos deste capítulo, como determinar os termos de PAs e PGs, calcular a soma desses termos etc.

Inicialmente, para preencher a coluna A, basta digitar 1 na célula A2 e, na célula A3, digitar a fórmula:

$= A2 + 1$

(Adiciona 1 ao valor da célula A2)

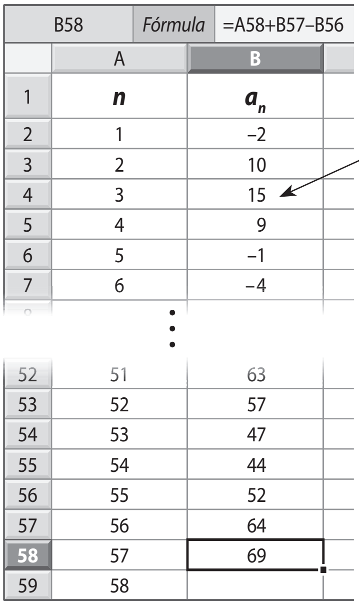
Para preencher as próximas células dessa coluna, basta selecionar a célula A3, levar o cursor até a quina e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo, até onde for conveniente; no nosso caso, pelo menos até $n = 57$.



B4 | Fórmula | =A4+B3–B2

	A	B
1	n	a_n
2	1	−2
3	2	10
4	3	15
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	

⋮



B58 | Fórmula | =A58+B57–B56

	A	B
1	n	a_n
2	1	−2
3	2	10
4	3	15
5	4	9
6	5	−1
7	6	−4
⋮	⋮	⋮
52	51	63
53	52	57
54	53	47
55	54	44
56	55	52
57	56	64
58	57	69
59	58	

Para copiar a fórmula para as outras células da coluna, basta selecionar a célula B4, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo. Assim, preenchemos os valores de a_n até $n = 57$.

Digitamos os valores de a_1 e de a_2 nas células B2 e B3, respectivamente.
Então, na célula B4, digitamos a fórmula:

$= A4 + B3 - B2$

(No caso da sequência, o valor de A4 é o valor correspondente a n, o valor de B3 é o correspondente a a_{n-1} e o valor de B2 é o correspondente a a_{n-2})

Assim, encontramos o termo a_{57} da sequência: $a_{57} = 69$

Reflita

Determine o 86º termo e o 104º termo dessa sequência. $a_{86} = 94$ e $a_{104} = 112$

Observação

Note que, para determinar qualquer outro termo dessa sequência, bastaria continuar arrastando a seleção da célula B4 até a célula conveniente.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Se achar conveniente, pedir aos alunos que resolvam os exercícios **1** e **2** usando uma planilha eletrônica. Você também pode pedir a eles que calculem outros termos dessas sequências ou da "sequência de Fibonacci", apresentada no exercício **7**.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, determine os cinco primeiros termos das sequências numéricas definidas pelas leis:

a) $f(n) = 4n - 8$ $-4, 0, 4, 8$ e 12

b) $f(n) = -3$ $-3, -3, -3, -3$ e -3

c) $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$ $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8$ e $\frac{25}{2}$

2. Determine e escreva os quatro primeiros termos das sequências numéricas definidas pelas seguintes leis:

a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 5n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ $4, 40, 600$ e 12.000

b) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_n = 3^n \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$

c) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (a_{n-1})^{-2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ $-2, \frac{1}{4}, 16$ e $\frac{1}{256}$

3. Escreva uma lei de formação para as seguintes sequências:

a) (0, 2, 4, 6, 8, 10, ...)

b) (17, 17, 17, 17, ...)

c) (−3, 4, 11, 18, ...)

d) $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

e) (−5, 5, −5, 5, ...)

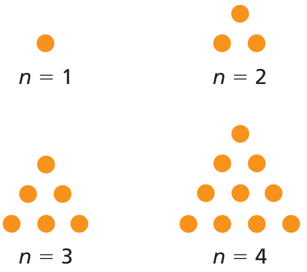
3. Respostas possíveis:
a) $a_n = 2(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$ ou
$a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$
b) $a_n = 17$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
d) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
e) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

4. Considere a sequência determinada pela lei:

$$\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Sabendo que $a_2 = 12$, escreva os elementos dessa sequência. (−4, 12, −36, 108, ...) ou (3, 12, 48, 192, ...)

5. Observe a quantidade de pontos nas figuras que formam a sequência de números triangulares e responda às questões.



a) Calcule os valores numéricos de $n \cdot (n + 1)$ para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ e compare-os com os números de pontos das figuras.

b) Que lei de formação dá o número de pontos da enésima figura dessa sequência? $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) Quantos pontos formarão a 13ª figura? 91 pontos

d) Essa sequência tem uma figura com 110 pontos? E com 120 pontos? não; sim

5. a) 2, 6, 12, 20. Para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.

6. Considere a sequência numérica infinita a seguir.

(−5, −1, 3, 7, 11, 15, 19, ...)

a) Calcule o valor das subtrações:

- $a_2 - a_1$ 4
- $a_3 - a_2$ 4
- $a_4 - a_3$ 4
- $a_5 - a_4$ 4
- $a_6 - a_5$ 4
- $a_7 - a_6$ 4

b) Analisando os resultados obtidos no item anterior, que resultado você espera encontrar para a subtração $a_n - a_{n-1}$, para $n \geqslant 2$? 4

c) Utilizando o valor de a_7, determine o valor de a_8. 23

d) Elabore uma estratégia que possa ser utilizada para determinar o valor de a_{n+1} conhecendo o valor de a_n. Espera-se que os alunos percebam que basta somar 4 ao valor de a_n para determinar a_{n+1}.

7. Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci ou "filho de Bonaccio", foi um dos mais talentosos matemáticos da Idade Média. Entre suas descobertas, pode ser citada a "sequência de Fibonacci":

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)

a) Analisando os sete primeiros termos dessa sequência, descubra o padrão de formação para essa sequência e escreva um parágrafo para explicar sua descoberta. Você pode resolver esse item com um colega.

b) Utilizando o padrão de formação identificado no item anterior, escreva os termos a_8, a_9 e a_{10} dessa sequência.

c) Escreva a lei de formação dessa sequência.

d) A "sequência de Fibonacci" pode ser aplicada no desenvolvimento de diversos padrões relacionados a fenômenos naturais. Faça uma pesquisa e identifique algumas dessas aplicações.

a) Espera-se que os alunos percebam que, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores.
b) $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$
c) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$
d) resposta pessoal

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2 Progressões aritméticas

O dono de uma papelaria preparou uma tabela com o valor a ser pago de acordo com a quantidade de fotocópias simples pedida pelos clientes.

Número de fotocópias simples	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a ser pago (R$)	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35	1,50

Observe que o valor a ser pago, em função do número de fotocópias simples, determina a sequência: (0,15; 0,30; 0,45; 0,60; 0,75; 0,90; 1,05; 1,20; 1,35; 1,50).

Os termos dessa sequência, a partir do segundo, são obtidos somando a constante 0,15 ao termo antecedente. Esse é um exemplo de progressão aritmética.

Uma **progressão aritmética (PA)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante r, chamada de **razão da PA**.

A razão pode ser calculada fazendo $r = a_n - a_{n-1}$, para qualquer $n \geqslant 2$.

Exemplos

a) $(-7, -4, -1, 2, 5)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_2 - a_1 = -4 - (-7) = 3$

b) $(32, 12, -8, \ldots)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_3 - a_2 = -8 - 12 = -20$

c) $(6, 6, 6, 6, \ldots)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_4 - a_3 = 6 - 6 = 0$

◆ Classificação de uma PA

Uma PA é classificada em:

- **crescente** quando $\boldsymbol{r > 0}$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior;
- **decrescente** quando $\boldsymbol{r < 0}$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior;
- **constante** quando $\boldsymbol{r = 0}$, ou seja, quando todos os termos têm o mesmo valor.

Exemplos

a) $\left(2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots\right)$ é uma PA crescente $\left(r = \frac{1}{2}\right)$.

b) $(4, 1, -2, -5, -8, -11, \ldots)$ é uma PA decrescente $(r = -3)$.

c) $(-3, -3, -3, -3, \ldots)$ é uma PA constante $(r = 0)$.

2.1 Termo geral de uma PA

Em uma PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PA:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r \qquad a_3 = (a_1 + r) + r \qquad a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r \qquad a_4 = (a_1 + 2r) + r \qquad a_4 = a_1 + 3r$$

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, chegaremos à conclusão de que o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

◆ Observações

- Note que a fórmula ao lado é a lei de formação de uma função e que n é o número de termos da PA até o termo a_n.
- Quando o primeiro termo de uma PA é representado por a_0, o termo geral é dado por: $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$

Exercícios resolvidos

R4. Determinar o termo geral da sequência (8, 15, 22, 29, 36, ...).

▸ ***Resolução***

Nessa sequência, cada um dos termos, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com 7. Então, essa sequência é uma PA de razão $r = 7$ e primeiro termo $a_1 = 8$.

Como o termo geral de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

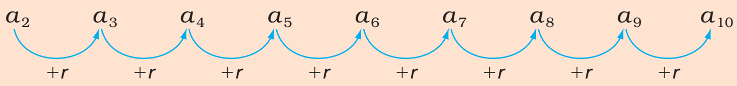
$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow a_n = 8 + 7n - 7 \Rightarrow a_n = 1 + 7n$

Portanto, o termo geral dessa sequência é $a_n = 1 + 7n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

R5. Camila estabeleceu como meta para seus treinos que cada semana nadaria 400 metros a mais que na semana anterior. Sabe-se que, na segunda semana, ela nadou 1.100 m. Quantos metros nadará na décima semana?

▸ ***Resolução***

A sequência dos percursos de Camila é uma PA de razão $r = 400$ e $a_2 = 1.100$. Queremos obter a_{10}. Veja o esquema que relaciona a_{10} com a_2 e r:



$a_{10} = a_2 + 8 \cdot r \Rightarrow a_{10} = 1.100 + 8 \cdot 400 \Rightarrow a_{10} = 4.300$

Portanto, Camila nadará 4.300 metros na décima semana.

BIKERIDERLONDON/SHUTTERSTOCK

Nadadora em treinamento.

R6. Dados três termos consecutivos de uma PA, a_p, a_q, a_s, nessa ordem, escrever a_q em função de a_p e a_s.

▸ ***Resolução***

Pela definição de PA, temos: $r = a_q - a_p$ e $r = a_s - a_q$

Assim: $a_q - a_p = a_s - a_q \Rightarrow 2a_q = a_s + a_p$

Portanto, $a_q = \dfrac{a_p + a_s}{2}$, ou seja, dados três termos consecutivos de uma PA, o termo do meio é a **média aritmética** dos outros dois.

◆ Observação

Três termos consecutivos de uma PA podem ser representados por: $x - r, x, x + r$

R7. Determinar o valor de x para que a sequência $(2x - 7, x^2 - 1, x^2 + 8x + 16)$ seja uma PA e escrever todos os termos.

▸ ***Resolução***

Sabemos que $a_1 = 2x - 7$, $a_2 = x^2 - 1$ e $a_3 = x^2 + 8x + 16$.

Para a sequência ser uma PA, devemos ter uma razão constante:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

Ou seja: $x^2 - 1 - (2x - 7) = x^2 + 8x + 16 - (x^2 - 1)$

$x^2 - 2x + 6 = 8x + 17$

$x^2 - 10x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$ ou $x = -1$

Substituindo os valores de x na sequência $(2x - 7, x^2 - 1, x^2 + 8x + 16)$:

- para $x = 11$, obtemos (15, 120, 225);
- para $x = -1$, obtemos (−9, 0, 9).

R8. Interpolar cinco meios aritméticos entre 4 e 250.

▸ ***Resolução***

Interpolar meios aritméticos significa inserir termos entre os que já foram dados de tal forma que a sequência seja uma PA. Nesse caso:

$$4,\ \underbrace{a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6}_{\text{cinco meios aritméticos}},\ 250$$

Assim, a PA considerada contém sete termos, sendo $a_1 = 4$ e $a_7 = 250$.

Como $a_7 = a_1 + 6r$, segue que:

$250 = 4 + 6r \Rightarrow r = 41$

Agora, podemos calcular:

$a_2 = 4 + 41 \Rightarrow a_2 = 45$

$a_3 = 4 + 2 \cdot 41 \Rightarrow a_3 = 86$

$a_4 = 4 + 3 \cdot 41 \Rightarrow a_4 = 127$

$a_5 = 4 + 4 \cdot 41 \Rightarrow a_5 = 168$

$a_6 = 4 + 5 \cdot 41 \Rightarrow a_6 = 209$

Logo, a sequência procurada é (4, 45, 86, 127, 168, 209, 250).

R9. Quantos múltiplos de 6 existem entre 4.000 e 5.000?

▸ *Resolução*

A sequência dos múltiplos de 6 é uma PA de razão 6.

O primeiro múltiplo de 6 existente nesse intervalo é $a_1 = 4.002$ e o último é $a_n = 4.998$.

Substituindo esses valores na expressão $a_n = a_1 + (n - 1)r$, obtemos:

$4.998 = 4.002 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 167$

Portanto, existem 167 múltiplos de 6 entre 4.000 e 5.000.

R10. Determinar os cinco termos de uma PA sabendo que o produto dos extremos é igual a −48 e que a soma dos demais termos é igual a 12.

▸ *Resolução*

Os termos dessa PA podem ser indicados da seguinte forma: $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} (x - 2r) \cdot (x + 2r) = -48 \\ (x - r) + (x) + (x + r) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4r^2 = -48 \quad \text{(I)} \\ 3x = 12 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Substituímos x por 4 na equação (I):

$4^2 - 4r^2 = -48 \Rightarrow 4r^2 = 64 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 4$ ou $r = -4$

- Se $r = -4$, temos a PA (12, 8, 4, 0, −4).
- Se $r = 4$, temos a PA (−4, 0, 4, 8, 12).

Logo, os termos da PA são −4, 0, 4, 8 e 12.

10. a) decrescente; $r = -3$; $a_n = 1 - 3n$, com $1 \leqslant n \leqslant 5$ e $n \in \mathbb{N}^*$
b) constante; $r = 0$; $a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) crescente; $r = 10$; $a_n = -20 + 10n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) crescente; $r = \frac{1}{1.000}$; $a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

8. Identifique quais das sequências abaixo são uma PA. alternativas a, d

a) (3, 10, 17, 24)

b) $\left(\frac{1}{1.000}, \frac{1}{500}, \frac{3}{1.000}, \frac{3}{500}, \ldots\right)$

c) (−1, 1, −1, 1, −1, ...)

d) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots\right)$

9. Calcule os cinco primeiros termos de cada PA.

a) $a_1 = 12$ e $r = 7$ 12, 19, 26, 33 e 40

b) $a_1 = 12$ e $r = -7$ 12, 5, −2, −9 e −16

c) $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{2}$ $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ e 0

d) $a_1 = 12$ e $r = -0{,}25$ 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11

10. Classifique cada PA em crescente, decrescente ou constante, identificando a razão de cada uma. A seguir, considerando o primeiro termo e a razão, obtenha a lei de formação dessas progressões aritméticas.

a) (−2, −5, −8, −11, −14)

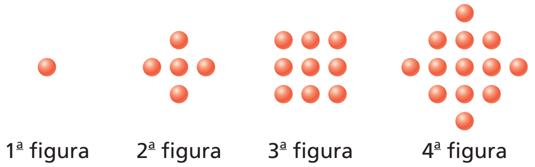
b) $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \ldots)$

c) (−10, 0, 10, ...)

d) $\left(\frac{1}{1.000}, \frac{1}{500}, \frac{3}{1.000}, \frac{1}{250}, \ldots\right)$

11. Na sequência de figuras, as quantidades de bolinhas estão em progressão aritmética.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



- Continuando a sequência, quantas bolinhas formarão a 12ª figura? 45 bolinhas

12. Determine a razão de uma PA que tem $a_1 = 5$ e $a_{12} = 247$. 22

13. Um artesão confecciona carteiras e as vende em uma feira na cidade por R$ 14,20 cada uma. Para incentivar as vendas no atacado, ele decidiu fazer uma promoção, na qual o cliente pagará de acordo com a quantidade que comprar, limitada a 10 carteiras, segundo a tabela:

Número de carteiras	1	2	3	4
Valor unitário (R$)	14,20	13,40	12,60	11,80

ISTOCKPHOTO/GETTY IMAGES

Veja que o valor unitário decresce em PA à medida que aumenta o número de carteiras compradas.

a) Qual é a razão dessa PA? −0,80

b) Se alguém comprar 10 carteiras, qual será o valor total da compra? R$ 70,00

c) Comparando com o valor não promocional, quanto uma pessoa economizaria se comprasse 8 carteiras na promoção? R$ 44,80

14. Durante os treinos para uma maratona, um atleta decidiu a cada dia aumentar em 1.400 m o circuito a ser percorrido. Sabendo que no segundo dia ele completou um circuito de 2 km, quantos quilômetros ele terá percorrido no oitavo dia? 10,4 km

15. Determine o primeiro termo da PA na qual:

a) $a_{17} = -39$ e $r = 4$ −103

b) $a_{10} = 9$ e $r = -\frac{1}{9}$ 10

16. Encontre o primeiro número menor que zero em cada PA.

a) (73, 51, 29, ...) −15

b) (101, 88, 75, ...) −3

17. Calcule os valores de a_1 e de r em uma PA sabendo que $a_4 = 10$ e que $a_7 + a_{13} = -25$. $a_1 = \frac{85}{4}$; $r = -\frac{15}{4}$

18. Determine o valor de p para que a sequência $(p + 5, 3p, p^2 - 1)$ seja uma PA. $p = 1$ ou $p = 4$

19. As medidas dos lados de um quadrilátero estão em PA e podem ser expressas em ordem crescente por 3, $x + 7$, $x^2 - 4$ e $6x$. Qual é o perímetro desse quadrilátero? 66 unidades de comprimento

20. Interpole quatro meios aritméticos entre −12 e 48. (−12, 0, 12, 24, 36, 48)

21. Quantos são os múltiplos de 4 entre 101 e 3.001? 725

22. Quantos números pares existem entre os números 23 e 987? 482

23. Quantos meios aritméticos devem ser inseridos entre os números 10 e 184 para que a razão da PA obtida seja igual a 6? 28

24. Na compra de um carro a prazo, Rui pagou R$ 3.500,00 de entrada e 12 prestações que decaíam em PA, sendo a primeira de R$ 660,00, a segunda de R$ 630,00, a terceira de R$ 600,00 e assim por diante.

a) Qual foi o valor da última prestação? E da penúltima? R$ 330,00; R$ 360,00

b) Qual é a soma da primeira com a última prestação? E da segunda com a penúltima? R$ 990,00; R$ 990,00

c) Qual foi o valor final do carro a prazo? R$ 9.440,00

25. Três números estão em PA. Qual é essa PA se o produto deles é 420 e a soma é −12? (−15, −4, 7) ou (7, −4, −15)

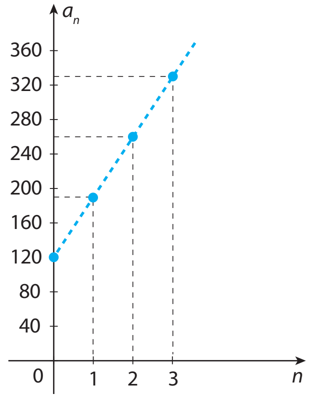
2.2 Interpretação gráfica de uma PA

Para fazer reparos na instalação elétrica, um técnico cobra R$ 120,00 pela visita mais R$ 70,00 por hora adicional. Observe a tabela a seguir.

Tempo (h)	0	1	2	3
Custo (R$)	120,00	190,00	260,00	330,00

O custo, em função das horas gastas no reparo, forma uma PA (120, 190, 260, 330, ...), em que $a_0 = 120$ e $r = 70$.

O termo geral (a_n) de uma PA, de primeiro termo a_0 e razão r, é uma função que associa a cada número natural n o valor $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$. Essa função se assemelha a uma função afim, mas com domínio no conjunto dos números naturais. Assim, o gráfico dessa função será formado por pontos colineares: $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... Veja abaixo os pontos de coordenadas (0, 120), (1, 190), (2, 260) e (3, 330).



ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R11. Sabendo que a soma e o produto dos três primeiros termos de uma PA crescente são iguais a -3 e 8, respectivamente, escrever a lei e construir o gráfico dessa sequência.

▶ ***Resolução***

Podemos representar os três primeiros termos dessa PA por $x - r$, x e $x + r$.

Pelo enunciado: $(x - r) + x + (x + r) = -3 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Como o produto desses primeiros termos é igual a 8, temos:

$(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 8 \Rightarrow (-1 - r) \cdot (-1) \cdot (-1 + r) = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow (r + 1) \cdot (r - 1) = 8 \Rightarrow r^2 - 1 = 8 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = -3$ ou $r = 3$

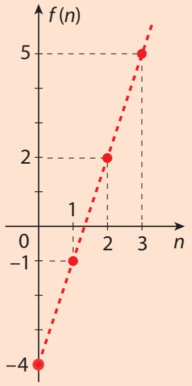
Como a razão não pode ser negativa, pois a PA é crescente, segue que r é igual a 3. Assim, os três primeiros termos dessa PA são -4, -1 e 2.

Agora, escrevemos a lei de formação:

$f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = a_0 + nr \Rightarrow f(n) = -4 + 3n$, com $n \in \mathbb{N}$

Partindo dessa lei de formação, podemos construir o gráfico da PA.

n	$f(n) = -4 + 3n$
0	$f(0) = -4 + 3 \cdot 0 = -4$
1	$f(1) = -4 + 3 \cdot 1 = -1$
2	$f(2) = -4 + 3 \cdot 2 = 2$
3	$f(3) = -4 + 3 \cdot 3 = 5$



Observe que os pontos do gráfico da PA pertencem ao gráfico de uma função afim.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

26. Sendo n um número natural, construa, para cada item, o gráfico cartesiano da progressão aritmética determinada pela lei de formação:

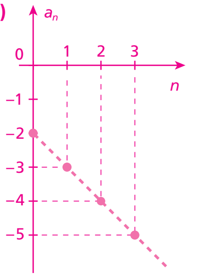
a) $a_n = -n - 2$

b) $a_n = -2$

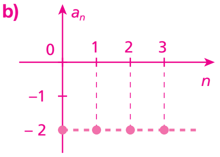
c) $a_n = n$

d) $a_n = 2n - 2$

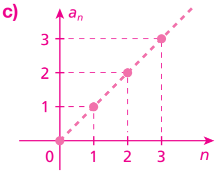
26. a)



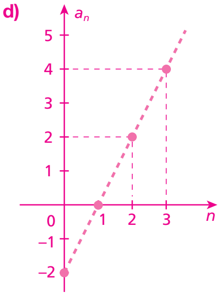
b)



c)



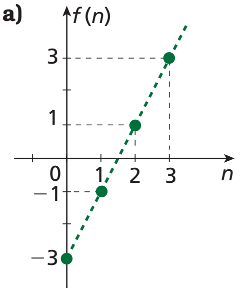
d)



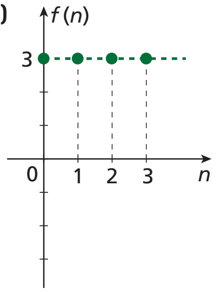
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

27. Verifique qual dos gráficos representa a PA $(3, 1, -1, ...)$. alternativa d

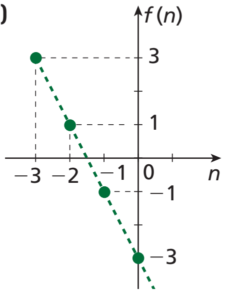
a)



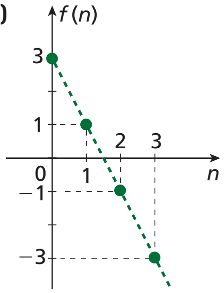
b)



c)

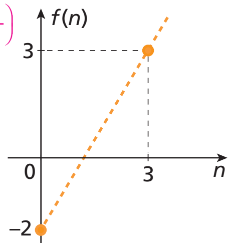


d)



28. Escreva os elementos da PA de cinco termos sabendo que dois de seus pontos estão representados no gráfico.

$\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$



MUSEU ESTATAL PUSHKIN DE BELAS ARTES, MOSCOU

Carl Friedrich Gauss, retratado acima por Christian Albrecht Jensen (1850), era filho único de pais sem instrução. Foi matemático, astrônomo e físico. Óleo sobre tela, 66 × 52 cm.

2.3 Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Conta-se que, quando criança, o professor de sua turma pediu aos alunos que calculassem a soma 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100. Para surpresa do professor, Gauss resolveu rapidamente o desafio e foi o único a acertar a resposta: 5.050. O pequeno Gauss percebeu que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

101

101

101

Como são 50 parcelas iguais a 101, a soma dos termos dessa PA será igual a: $50 \cdot 101 = 5.050$

A soma dos *n* primeiros termos de uma PA, sendo conhecidos o primeiro e o último termo da progressão, é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Demonstração

Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$. A soma dos *n* primeiros termos pode ser indicada por:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (I)

Ou, invertendo a ordem dos elementos:

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ (II)

Somando membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1 + a_n} + \ldots + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_n + a_1)}_{a_1 + a_n}$$

Veja que $2 \cdot S_n$ tem *n* parcelas iguais a $a_1 + a_n$. Assim: $2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$

Portanto: $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Para explicitar o fato de que a soma de dois termos (a_p e a_q), equidistantes dos extremos de uma PA, é igual à soma dos extremos, vamos considerar dois grupos com a mesma quantidade de termos:

$$(\underbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p}_{a_p = a_1 + (p-1)r}, \ldots, \underbrace{a_q, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n}_{a_n = a_q + (n-q)r})$$

Subtraindo a_p de a_n, temos: $a_n - a_p = [a_q + (n - q)r] - [a_1 + (p - 1)r]$

Lembrando que $(p - 1) = (n - q)$, obtemos: $a_n - a_p = a_q - a_1$

Logo: $a_n + a_1 = a_q + a_p$

Exercícios resolvidos

R12. Calcular a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos.

▸ ***Resolução***

A sequência dos números naturais pares não nulos (2, 4, 6, ...) forma uma PA de razão 2 e primeiro termo 2.

Assim: $a_{45} = a_1 + 44r \Rightarrow a_{45} = 2 + 44 \cdot 2 \Rightarrow a_{45} = 90$

Logo:

$$S_{45} = \frac{45 \cdot (a_1 + a_{45})}{2} \Rightarrow S_{45} = \frac{45 \cdot (2 + 90)}{2} \Rightarrow S_{45} = 2.070$$

Portanto, a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos é 2.070.

R13. Determinar o décimo termo de uma PA sabendo que a soma dos seus 48 primeiros termos é igual a 1.008 e que sua razão é $r = 2$.

Resolução

Para determinar o décimo termo, é necessário encontrar o primeiro termo da PA.

Temos que:

$$S_{48} = \frac{48 \cdot (a_1 + a_{48})}{2} \Rightarrow 1.008 = 24 \cdot [a_1 + (a_1 + 47r)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.008 = 24 \cdot (2a_1 + 47 \cdot 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 42 = 2a_1 + 94 \Rightarrow a_1 = -26$$

Assim:

$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = -26 + 9 \cdot 2 \Rightarrow a_{10} = -8$

Logo, o décimo termo da PA é -8.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

29. Calcule a soma dos 24 primeiros termos de cada PA.

a) $(-57, -27, 3, \ldots)$ 6.912

b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{14}{3}, \ldots\right)$ 568

c) $(7, 7, 7, \ldots)$ 168

d) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \ldots\right)$ 57

30. Calcule o valor de um imóvel vendido a um cliente nas seguintes condições: 1ª parcela de R\$ 600,00 e, daí em diante, parcelas que aumentam R\$ 5,00 a cada mês, até completar o pagamento, em 12 anos. R\$ 137.880,00

31. Uma academia de ginástica oferece o seguinte plano anual: em janeiro, o aluno paga R\$ 140,00. A partir daí, o valor da mensalidade decresce R\$ 8,00 a cada mês.

a) Quanto o aluno pagará no oitavo mês do plano? R\$ 84,00

b) Que valor total anual o aluno pagará? R\$ 1.152,00

c) Em um ano, em média, quanto o aluno pagará por mês? R\$ 96,00

HERO IMAGES/CORBIS/LATINSTOCK

32. Quantos termos da PA (3, 19, 35, ...) devem ser somados para que $S_n = 472$? 8 termos

33. A soma dos 30 primeiros termos de uma PA é 1.430. Sabendo que a razão é 6, determine seu oitavo termo. $\frac{8}{3}$

34. Calcule a soma dos múltiplos de 6 compreendidos entre 230 e 650. 30.870

35. Resolva a equação.

$$\frac{x}{2} + \frac{7x}{10} + \frac{9x}{10} + \ldots + \frac{17x}{10} = 462 \quad S = \{60\}$$

36. Um teatro tem 448 lugares, distribuídos da seguinte maneira: na primeira fila, há 13 poltronas; na segunda, 15; na terceira, 17; e assim sucessivamente, até completar n filas. Determine o número total de filas desse teatro. 16

37. (Mackenzie-SP) Uma empresa decidiu presentear seus principais clientes com lotes de 1.000 ações. Os clientes foram classificados em ordem crescente, de acordo com o faturamento de cada um deles. Ao primeiro, a empresa entregou 1 lote, ao segundo, 3 lotes, ao terceiro, 5 lotes, e assim por diante. Se a empresa distribuiu um total de 1.089.000 ações, o número de clientes presenteados foi: alternativa e

a) 47

b) 37

c) 43

d) 32

e) 33

38. Em uma PA crescente de cinco termos, a soma do segundo com o terceiro é igual a -26 e o quadrado do quarto termo é 144. Determine o valor da razão e a soma dos termos dessa PA. $r = \frac{50}{3}$ e $S = -\frac{70}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$ e $S = -\frac{190}{3}$

3 Progressões geométricas

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em julho de 2015 o estado mais populoso do Brasil era São Paulo, com aproximadamente 44.400.000 habitantes, população essa maior que das regiões Norte e Centro-Oeste juntas. Sabendo que a população do estado de São Paulo teve um crescimento de cerca de 0,8% em relação a julho de 2014, e supondo que esse crescimento anual se mantenha, qual seria a estimativa para a população desse estado em julho de 2018?

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Pedestres na Rua XV de Novembro, centro histórico de São Paulo (SP), 2014.

Para calcular esse valor, vamos partir da população em julho de 2015.

População estimada do estado de São Paulo

Data	Número de habitantes
julho/2015	44.400.000
julho/2016	$44.400.000 \cdot 1{,}008 = 44.755.200$
julho/2017	$44.755.200 \cdot 1{,}008 = 45.113.241{,}6$
julho/2018	$45.113.241{,}6 \cdot 1{,}008 = 45.474.147{,}5328$

◆ Reflita

Por que os números obtidos a partir de julho de 2017 não são números inteiros?

Espera-se que os alunos percebam que os valores obtidos são estimativas, não valores exatos.

Logo, em julho de 2018, a população estimada seria de aproximadamente 45.474.148 habitantes.

Observe que, a partir de julho de 2016, a estimativa da população do estado de São Paulo foi obtida multiplicando-se a população de julho do ano anterior pela constante 1,008.

A sequência (44.400.000; 44.755.200; 45.113.241,6; 45.474.147,5328) é um exemplo de progressão geométrica.

Uma **progressão geométrica (PG)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q, chamada de **razão da PG**.

Quando $a_{n-1} \neq 0$, a razão pode ser calculada fazendo-se $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, para qualquer $n \geqslant 2$.

Exemplos

a) $(-2, -4, -8, -16, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

b) $(1, -3, 9, -27, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{-27}{9} = -3$

c) $(10, 10, 10, 10, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{10}{10} = 1$

◆ Reflita

Invertendo a ordem dos termos de uma PG de três termos e razão q, não nula, obtemos uma PG de razão $\dfrac{1}{q}$? sim

Classificação de uma PG

Uma PG pode ser classificada em crescente, decrescente, constante, estacionária ou oscilante, de acordo com suas características. Observe a tabela.

Exemplos de PGs	Características
$(-8, -4, -2, -1, ...)$; com $a_1 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$ $(3, 6, 12, 24, ...)$; com $a_1 = 3$ e $q = 2$	Os termos das duas PGs estão em ordem crescente de valor. Na primeira: $\boldsymbol{a_1 < 0}$ **e** $\boldsymbol{0 < q < 1}$; na segunda: $\boldsymbol{a_1 > 0}$ **e** $\boldsymbol{q > 1}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **crescente**.
$(-3, -9, -27, ...)$; com $a_1 = -3$ e $q = 3$ $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$; com $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{2}$	Os termos das duas PGs estão em ordem decrescente de valor. Na primeira: $\boldsymbol{a_1 < 0}$ **e** $\boldsymbol{q > 1}$; na segunda: $\boldsymbol{a_1 > 0}$ **e** $\boldsymbol{0 < q < 1}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **decrescente**.
$(\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{7}, ...)$; com $a_1 = \sqrt{7}$ e $q = 1$ $(0, 0, 0, 0, 0, ...)$; com $a_1 = 0$ e $q \in \mathbb{R}$	Em cada uma das PGs, todos os termos têm o mesmo valor. Na primeira: $\boldsymbol{a_1 \neq 0}$ **e** $\boldsymbol{q = 1}$; na segunda: $\boldsymbol{a_1 = 0}$ **e** $\boldsymbol{q \in \mathbb{R}}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **constante**.
$(3, 0, 0, 0, ...)$; com $a_1 = 3$ e $q = 0$	Apenas o primeiro termo da PG é diferente de zero ($\boldsymbol{a_1 \neq 0}$); além disso, sua razão é $\boldsymbol{q = 0}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **estacionária**.
$(2, -10, 50, ...)$; com $a_1 = 2$ e $q = -5$ $(-7, 14, -28, ...)$; com $a_1 = -7$ e $q = -2$	Em ambas as PGs, dois termos consecutivos têm sinais alternados. Na primeira: $\boldsymbol{a_1 > 0}$ **e** $\boldsymbol{q < 0}$; na segunda: $\boldsymbol{a_1 < 0}$ **e** $\boldsymbol{q < 0}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **oscilante**.

3.1 Termo geral de uma PG

Dada uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ de razão q, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PG:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$
$$a_3 = (a_1 \cdot q) \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$
$$a_4 = (a_1 \cdot q^2) \cdot q$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, encontraremos o termo geral, que ocupa a enésima posição na PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Observe que essa fórmula é a lei de formação de uma função e que n é o número de termos da PG até o termo a_n.

Reflita

Quando, em uma PG de razão q, o primeiro termo é representado por a_0, qual é a lei de formação da função que determina o termo geral da PG? $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \in \mathbb{N}$

Exercícios resolvidos

R14. Determinar o oitavo termo da progressão geométrica $(-3, 18, -108, ...)$.

▸ ***Resolução***

Primeiro, devemos encontrar a razão da PG:

$$q = \frac{-108}{18} \Rightarrow q = -6$$

Depois, basta aplicar a fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $n = 8$, $a_1 = -3$ e $q = -6$:

$$a_8 = -3 \cdot (-6)^{8-1} \Rightarrow a_8 = 839.808$$

Logo, o oitavo termo dessa PG é 839.808.

R15. Interpolar três meios geométricos entre 4 e 256.

Resolução

Interpolar meios geométricos significa inserir termos entre os que já foram dados de tal forma que a sequência seja uma PG. Nesse caso: 4, a_2, a_3, a_4, 256

A PG considerada tem cinco termos, sendo $a_1 = 4$ e $a_5 = 256$.

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 256 = 4 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 64 \Rightarrow q = 2\sqrt{2}$ ou $q = -2\sqrt{2}$

Há duas possibilidades:

- para $q = 2\sqrt{2}$, a sequência procurada é $\left(4,\ 8\sqrt{2},\ 32,\ 64\sqrt{2},\ 256\right)$;
- para $q = -2\sqrt{2}$, a sequência é $\left(4, -8\sqrt{2}, 32, -64\sqrt{2}, 256\right)$.

R16. Quantos termos tem a PG $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \dots,\ \frac{81}{32}\right)$?

Resolução

A sequência apresentada tem $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{3}{2}$.

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{81}{32} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

Logo, a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{81}{32}\right)$ tem cinco termos.

◆ Observação

Potências de mesma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, são iguais se os expoentes são iguais:
$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

R17. Obter três números em PG de modo que a soma deles seja 333 e o produto seja 27.000.

Resolução

Sendo x o termo intermediário e $q \neq 0$ a razão da PG, podemos denotar os três termos consecutivos da seguinte maneira: $\left(\frac{x}{q},\ x,\ x \cdot q\right)$

Primeiro, indicamos o produto, determinando o valor de x:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 27.000 \Rightarrow x^3 = 27.000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27.000} \Rightarrow x = 30$$

Depois, indicamos a soma:

$$\frac{x}{q} + x + x \cdot q = 333 \Rightarrow x \cdot q^2 + x \cdot q + x - 333q = 0 \quad \text{(I)}$$

Substituindo o valor x por 30 na equação (I), obtemos:

$30 \cdot q^2 + 30 \cdot q + 30 - 333q = 0$

$30q^2 - 303q + 30 = 0$

Resolvendo a equação, chegamos a $q = \frac{1}{10}$ ou $q = 10$.

Assim:

- para $q = \frac{1}{10}$, obtemos a PG: (300, 30, 3)
- para $q = 10$, obtemos a PG: (3, 30, 300)

Logo, os números procurados são 3, 30 e 300.

◆ Observação

$30q^2 - 303q + 30 = 0$
$10q^2 - 101q + 10 = 0$
$\Delta = (-101)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 10$
$\Delta = 9.801$
$q = \frac{101 \pm \sqrt{9.801}}{2 \cdot 10}$
$q = \frac{1}{10}$ ou $q = 10$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

39. Identifique quais das sequências numéricas são PA e quais são PG.

a) $\left(-8,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \dots\right)$ PG
b) (5, 15, 25, ...) PA
c) (1, 2, 4, 8, ...) PG
d) (1, 2, 3, 4, ...) PA

40. Classifique as PGs em constante, oscilante, crescente ou decrescente.

a) $(\pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5, \dots)$ crescente
b) PG com $q < 0$ e $a_1 \neq 0$ oscilante
c) PG com $a_1 < 0$ e $q > 1$ decrescente
d) $\left(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}\right)$ constante

41. Calcule a razão de cada PG.

a) $\left(-3, -\frac{12}{5}, -\frac{48}{25}, \ldots\right)$

b) $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \ldots)$

c) $\left(5, \frac{10}{\pi}, \frac{20}{\pi^2}, \ldots\right)$

d) $(5, -10, 20, \ldots)$

- Qual é a lei de formação dessas PGs em função do primeiro termo e da razão?
- Que processo adotaríamos para representar essas progressões graficamente?

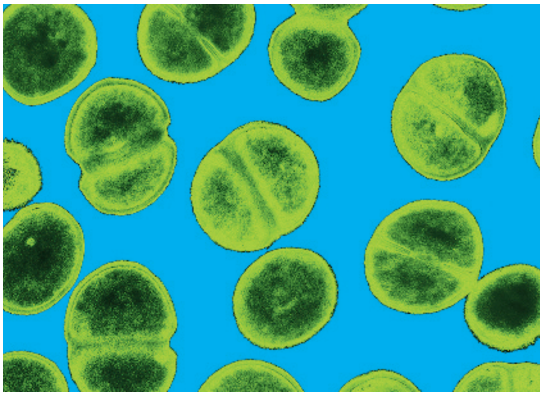
42. Responda às perguntas.

a) Quais são os cinco primeiros termos da PG em que $a_1 = 4$ e $q = 6$? 4, 24, 144, 864 e 5.184

b) Quais são os seis primeiros termos da PG em que $a_1 = x^2$ (com $x \neq 0$) e $q = \frac{y}{x^3}$? $x^2, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^4}, \frac{y^3}{x^7}, \frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$

43. Uma dívida triplica a cada ano. Se hoje a dívida é de R$ 112,00, qual será seu valor após cinco anos? R$ 27.216,00

44. Uma população de bactérias dobra seu número a cada 30 minutos. Considerando que o processo se inicia com uma única bactéria, quantas existirão após 4 horas e 30 minutos? 512 bactérias



BIOMEDICAL IMAGING UNIT/SOUTHAMPTOM GENERAL HOSPITAL/SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

Microscopia eletrônica da bactéria *Staphylococcus aureus* em processo de divisão, ampliada 19.000×.

45. Determine o primeiro termo da PG em que $a_4 = 27$ e $a_7 = 125$. $\frac{729}{125}$

46. O segundo termo de uma PG é 1 e o quinto termo é $\frac{1}{343}$. Determine a razão dessa PG. $\frac{1}{7}$

47. Determine o número de termos da PG $\left(3, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{19.683}\right)$. 6 termos

48. Um atleta corre, a cada dia, o dobro da distância que correu no dia anterior. Sabendo que esse atleta correu 6.600 m no quarto dia de treinamento, qual é a distância que ele correrá no sexto dia? 26.400 m

49. A sequência $(x, 2x, x^2)$ forma uma PG crescente. Determine o valor de x. 4

50. Que número deve ser somado a 2, 6 e 15, nessa ordem, para que a nova sequência se torne uma PG? $\frac{6}{5}$

51. Interpole quatro meios geométricos entre 6 e 192. (6, 12, 24, 48, 96, 192)

52. Três números, que estão em PG, têm soma 105 e produto 27.000. Determine esses números. 15, 30 e 60

53. As medidas do lado, da diagonal e da superfície de um quadrado formam uma PG. Determine a razão dessa PG e as medidas do lado e do perímetro desse quadrado. $\sqrt{2}$; 2; 8

54. Um capital inicial C_0 foi aplicado e cresce à taxa de i ao mês. Após o primeiro mês, o montante aplicado foi: **a)** $C_2 = C_0(1 + i)^2$; $C_3 = C_0(1 + i)^3$ **b)** $q = (1 + i)$

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i \Rightarrow C_1 = C_0(1 + i)$$

a) De quanto será o montante aplicado após o segundo mês? E após o terceiro mês?

b) Qual é a razão da PG $(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots)$?

c) Utilize a fórmula do termo geral para determinar C_n (montante após n meses) em função de C_0. $C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

41. a) $q = \frac{4}{5}$; $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

b) $q = \sqrt{3}$; $a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) $q = \frac{2}{\pi}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

d) $q = -2$; $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Para representar graficamente, para cada valor n, marcamos o valor a_n correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.

3.2 Interpretação gráfica de uma PG

Na medicina nuclear, é importante conhecer a velocidade com que um elemento radioativo se desintegra para saber por quanto tempo haverá radioatividade no organismo.

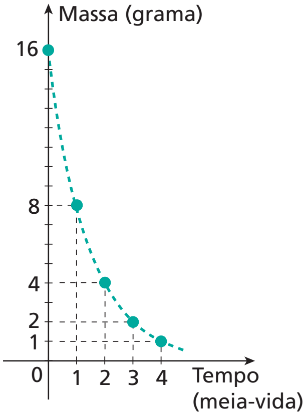
Chama-se *meia-vida* o tempo necessário para desintegrar metade dos átomos radioativos existentes em uma amostra. Um exemplo é o elemento radioativo iodo, cuja meia-vida é 8 dias. Esse elemento é usado no diagnóstico de doenças da glândula tireoide.

É possível interpretar graficamente o decaimento radioativo. Suponha que se deseje representar a desintegração de 16 gramas de iodo.

A lei de formação que descreverá a situação é do tipo exponencial: $f(n) = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, em que n é a quantidade de meias-vidas ($n \in \mathbb{R}_+$) e $f(n)$ é a massa.

Observe que, para $n \in \mathbb{N}$, temos a sequência (16, 8, 4, 2, 1, ...), que é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

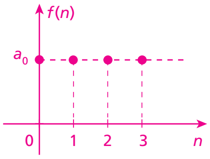
O termo geral (a_n) de uma PG, de primeiro termo a_0 e razão q, é uma função que associa a cada número natural n o valor $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Para $a_0 \neq 0$, $q > 0$ e $q \neq 1$, essa função se assemelha a uma função exponencial com restrição do domínio ao conjunto dos números naturais. O gráfico dessa função será formado pelos pontos $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... Veja, no gráfico abaixo, os pontos de coordenadas (0, 16), (1, 8), (2, 4), (3, 2) e (4, 1).



◆ Reflita

Se $q = 1$, como é o gráfico da PG cuja lei de formação é $a_n = a_0 \cdot q^n$?

Espera-se que os alunos percebam que, se $q = 1$, a PG assemelha-se a uma função constante, com restrição do domínio aos números naturais. Nesse caso, a lei de formação é $f(n) = a_0$, com $n \in \mathbb{N}$.



Exercício resolvido

R18. Construir o gráfico da progressão geométrica em que $a_0 = \frac{1}{3}$ e $q = 3$.

▶ *Resolução*

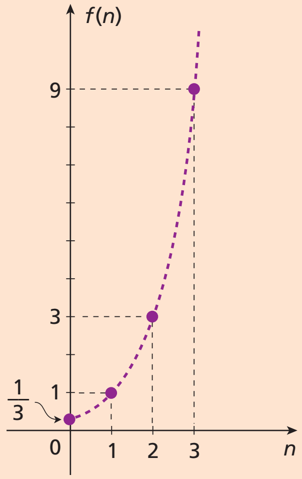
Inicialmente, escrevemos a lei de formação dessa PG:

$$a_n = f(n) = \frac{1}{3} \cdot 3^n, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Aplicando a lei, encontramos alguns pontos do gráfico da PG:

- para $n = 0$: $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 3^0 = \frac{1}{3}$
- para $n = 1$: $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 3^1 = 1$
- para $n = 2$: $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3$
- para $n = 3$: $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$

Observe que os pontos do gráfico da PG pertencem ao gráfico de uma função do tipo exponencial.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

55. Construa o gráfico das progressões geométricas.

a) (1, 2, 4, 8, ...)

b) $\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots\right)$

c) PG com $a_0 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$

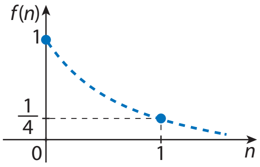
d) PG com $a_0 = \sqrt{3}$ e $q = 1$

56. Observe ao lado o gráfico de uma PG.

a) Qual é a lei de formação dessa PG?

b) Qual é o décimo termo dessa PG? $\frac{1}{4^9}$

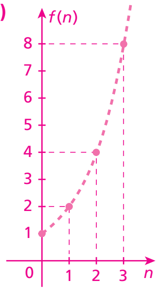
c) Essa PG tem algum termo menor ou igual a zero? não



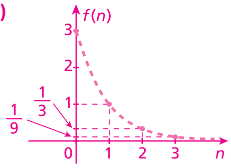
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

56. a) $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

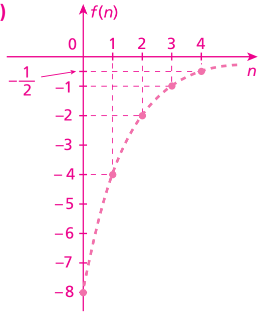
55. a)



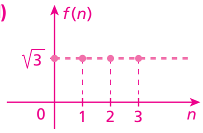
b)



c)



d)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3.3 Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

A soma dos n primeiros termos de uma PG, sendo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão q, com $q \neq 1$, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

◆ Observação

Para a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão $q = 1$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n =$$
$$= a_1 + a_1 \cdot q + ... + a_1 \cdot q^{n-1} =$$
$$= a_1 + a_1 \cdot 1 + ... + a_1 \cdot 1^{n-1} =$$
$$= \underbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}_{n \text{ vezes}} = n \cdot a_1$$

Demonstração

Primeiro, consideramos a soma dos termos da PG: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ (I)

Depois, multiplicamos os dois membros da sentença pela razão q, com $q \neq 1$:

$$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$$
$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_n \cdot q$$
$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n+1} \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), vem:

$$q \cdot S_n - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$$
$$q \cdot S_n - S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1} - a_1 - a_2 - a_3 - ... - a_n$$
$$S_n \cdot (q - 1) = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{[a_1 \cdot q^{(n+1)-1}] - a_1}{q - 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{(a_1 \cdot q^n) - a_1}{q - 1}$$

Logo, para $q \neq 1$, temos: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

◆ Reflita

Qual é a soma dos n primeiros termos de uma PG de razão $q = 0$?

Espera-se que os alunos percebam que $S_n = a_1$ para $q = 0$.
Se julgar oportuno, pedir que apliquem a fórmula $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ e verifiquem sua validade nesse caso.

Exercícios resolvidos

R19. Calcular a soma dos sete primeiros termos da PG (6, 18, 54, ...).

▸ ***Resolução***

Essa PG tem $a_1 = 6$ e $q = 3$. Aplicando a fórmula, obtemos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{6 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{6 \cdot (2.187 - 1)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_7 = 3 \cdot 2.186 \Rightarrow S_7 = 6.558$$

Portanto, a soma dos sete primeiros termos dessa PG é 6.558.

R20. Determinar o valor de x na sentença $4x + 16x + ... + 4.096x = 10.920$, sabendo que os termos do primeiro membro formam uma PG.

▸ ***Resolução***

A PG $(4x, 16x, ..., 4.096x)$ tem $a_1 = 4x$, $a_n = 4.096x$ e $q = 4$, com $x \neq 0$.
Vamos calcular o valor de n utilizando a fórmula do termo geral de uma PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 4.096x = 4x \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 1.024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 = n - 1 \Rightarrow n = 6$$

Agora, aplicamos a fórmula soma dos n primeiros termos de uma PG:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{4x \cdot (4^6 - 1)}{4 - 1} \Rightarrow 10.920 = \frac{4x \cdot 4.095}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10.920 = 5.460x \Rightarrow x = 2$$

Então, x é igual a 2.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

57. Dada a PG (6, 48, 384, ...), determine a soma dos cinco primeiros termos. 28.086

58. A soma dos n termos de uma PG finita é 504. Sabe-se que $a_n = 256$ e $q = 2$. Calcule o primeiro termo da PG. 8

59. Calcule x na equação abaixo, sabendo que, no primeiro membro, os termos adicionados formam uma PG. 2

$$7x + 21x + \dots + 189x = 560$$

60. A cada ano, o número de passageiros de uma empresa de ônibus cresce 4%. Se em 2011 foram transportadas 500.000 pessoas, calcule o total de passageiros transportados de 2011 a 2017. aproximadamente 3.949.147 passageiros

61. Em janeiro do ano passado, uma empresa produziu 25.000 unidades de certo produto. A partir de fevereiro, a cada mês, a produção foi 15% maior que no mês anterior. Determine a quantidade total de unidades que essa empresa produziu nesse ano. aproximadamente 725.042 unidades

62. No sábado passado, Paula enviou uma mensagem por e-mail para três amigos. No dia seguinte, cada amigo de Paula que recebeu o e-mail enviou-o para três amigos e assim por diante. Se nenhuma pessoa recebeu a mensagem mais de uma vez, descubra quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte. 9.840 pessoas

63. Considere a PG infinita, em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

a) Calcule a soma dos quatro primeiros termos.

b) Usando uma calculadora, responda: qual é a soma dos dez primeiros termos? E dos vinte primeiros? $\simeq 1{,}998$; $\simeq 1{,}999$ **a)** 1,875 ou $\frac{15}{8}$

c) Você acha que, conforme aumentamos o número de termos somados, a soma se aproxima de algum número? Sim, aproxima-se do número 2.

3.4 Soma dos infinitos termos de uma PG

Já estudamos a soma nos n primeiros termos de uma PG para $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, veremos como calcular a soma dos termos de uma PG infinita. Para isso, vamos primeiro analisar o valor de algumas potências. Observe.

n	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$
1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$
2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}421875$
⋮	⋮
10	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59.049}{1.048.576} \simeq 0{,}056314$

n	$\left(-\frac{1}{5}\right)^n$
1	$\left(-\frac{1}{5}\right)^1 = -\frac{1}{5} = -0{,}2$
2	$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04$
3	$\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125} = -0{,}008$
⋮	⋮
10	$\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{9.765.625} \simeq 0{,}0000001$

Analisando os valores obtidos, verificamos que, em ambas as potências, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero será o resultado obtido. Intuitivamente, podemos considerar que para qualquer número real a, com $0 < |a| < 1$, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero estará o valor de a^n. Dizemos, então, que, para $-1 < a < 1$, quando n tende a infinito, o valor de a^n tende a zero, ou, ainda, para $-1 < a < 1$, o limite de a^n, quando n tende a infinito, é igual a zero.

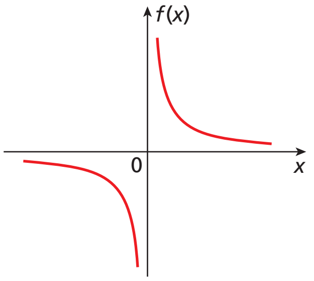
Em linguagem simbólica: $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, para $-1 < a < 1$

Exemplos

- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (-0{,}6)^n = 0$

◆ Reflita

Observe o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.



ADILSON SECCO

Quando x tende a infinito, para qual valor tende $f(x)$?

Quanto maior ou quanto menor o valor de x, mais o gráfico de f se aproxima do eixo x. Portanto, quando x tende a infinito, $f(x)$ tende a zero.

Cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG

Para calcular a soma dos termos de uma PG infinita, vamos partir do cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ uma progressão geométrica em que $q \in \mathbb{R}$ e $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$. Como vimos, quando n tende a infinito, a potência q^n tende a zero. Sabendo disso, vamos calcular o **limite** da soma S_n nesse caso:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Logo, para $\mathbf{-1 < q < 1}$, a soma dos infinitos termos da PG é dada por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exercícios resolvidos

R21. Calcular a soma dos termos da PG infinita $(-8, 4, -2, 1, \dots)$.

Resolução

Primeiro, calculamos a razão q da PG:

$$q = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Como $-1 < q < 1$ e $a_1 = -8$, utilizamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{-8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-8}{\frac{2 + 1}{2}} =$$

$$= -\frac{8}{\frac{3}{2}} = -8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

Assim, a soma dos infinitos termos dessa PG é $-\frac{16}{3}$.

R22. Determinar o valor de:

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \dots$$

Resolução

Os termos somados formam uma PG infinita, na qual $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 10$.

Como $-1 < q < 1$, aplicamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{10}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 10 \cdot 2 = 20$$

Logo: $10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \dots = 20$

R23. Determinar a fração geratriz de cada dízima periódica.

a) 0,444...

b) 0,6454545...

Resolução

a) Vamos escrever essa dízima periódica como uma soma infinita.

Sendo $x = 0{,}444\dots$, podemos escrever:

$x = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + \dots$

As parcelas formam uma PG infinita com $a_1 = 0{,}4$ e $q = 0{,}1$.

Assim, a fração geratriz é dada por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0{,}4}{0{,}9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{4}{9}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica 0,444... é $\frac{4}{9}$.

b) Sendo $x = 0{,}64545\dots$, então

$x = 0{,}6 + 0{,}045 + 0{,}00045 + \dots$

A partir da segunda, as parcelas formam uma PG infinita com $a_1 = 0{,}045$ e $q = 0{,}01$.

Como $0{,}6 = \frac{3}{5}$, temos:

$$0{,}64545\dots = \frac{3}{5} + \frac{0{,}045}{1 - 0{,}01} =$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{22} = \frac{71}{110}$$

Logo, a fração geratriz da dízima periódica 0,6454545... é $\frac{71}{110}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

64. Calcule a soma dos infinitos termos de cada PG.

a) $\left(15,\ 10,\ \frac{20}{3},\ \ldots\right)$ 45

b) $\left(-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4},\ \ldots\right)$ -2π

65. Calcule o valor de:

a) $2 - 1 + \frac{1}{2} - \ldots$ $\frac{4}{3}$

b) $12 - 4 + \frac{4}{3} - \ldots$ 9

66. Determine a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas.

a) 0,777... $\frac{7}{9}$

b) 0,060606... $\frac{2}{33}$

c) 0,1222... $\frac{11}{90}$

d) 0,12333... $\frac{111}{900}$

67. Imagine que um atleta corra 20 km no primeiro dia de treinamento, 10 km no segundo, 5 km no terceiro e assim sucessivamente, até parar de correr. Que distância total ele percorre? 40 km

68. Uma bola é solta da altura de 100 m, atinge o solo e sobe a uma altura igual à metade da anterior. Esse movimento ocorre sucessivamente até ela parar. Qual é a distância total percorrida pela bola? 300 m

69. Considere um quadrado de lado a. Unindo-se os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se um novo quadrado. Unindo-se os pontos médios dos lados do novo quadrado, obtém-se um terceiro quadrado e assim por diante. Qual é o limite da soma das áreas determinadas por esses quadrados? $2a^2$

JOHN LINNELL/CC BY 4.0 – BIBLIOTECA WELLCOME, LONDRES

O economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), retratado acima por John Linnell (1834), tentou prever o crescimento da população mundial. Com dados relativos à população de anos anteriores, ele estabeleceu um modelo no qual a população crescia em PG enquanto a produção de alimentos crescia em PA. Hoje, sabe-se que esse modelo tem algumas falhas, por exemplo, não considerar a disponibilidade de recursos.

4 Problemas que envolvem PA e PG

Depois de estudar progressões aritméticas e progressões geométricas, vamos resolver alguns problemas que envolvem essas sequências simultaneamente.

1. Determinar os valores de x e y de modo que a sequência $(x, 7, y)$ seja uma PA e que $(y, 15, 75)$ seja uma PG.

- Se x, 7 e y estão em PA, então:

$7 - x = y - 7 \Rightarrow x + y = 14$

- Se y, 15 e 75 estão em PG, então:

$$\frac{15}{y} = \frac{75}{15} \Rightarrow y = 3$$

Substituindo y por 3 na equação $x + y = 14$, temos: $x + 3 = 14 \Rightarrow x = 11$

Logo, os valores de x e y são, respectivamente, 11 e 3.

2. As empresas A e B foram inauguradas na mesma data. Nos últimos anos, a empresa A manteve-se em crescimento: no primeiro ano, obteve lucro de R$ 100.000,00; após dois anos, obteve lucro de R$ 110.000,00; após três anos, R$ 120.000,00; e assim por diante. A empresa B também se manteve em crescimento: no primeiro ano, obteve lucro de R$ 20.000,00; após dois anos, obteve lucro de R$ 40.000,00; após 3 anos, R$ 80.000,00; e assim por diante.

a) Verificar graficamente o crescimento anual do lucro das duas empresas.

A sequência dos lucros da empresa A forma uma PA:

(100.000, 110.000, 120.000, ...), em que $a_1 = 100.000$ e $r = 10.000$

A lei de formação dessa PA é:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_n = 100.000 + 10.000 \cdot (n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Já a sequência dos lucros da empresa B forma uma PG:

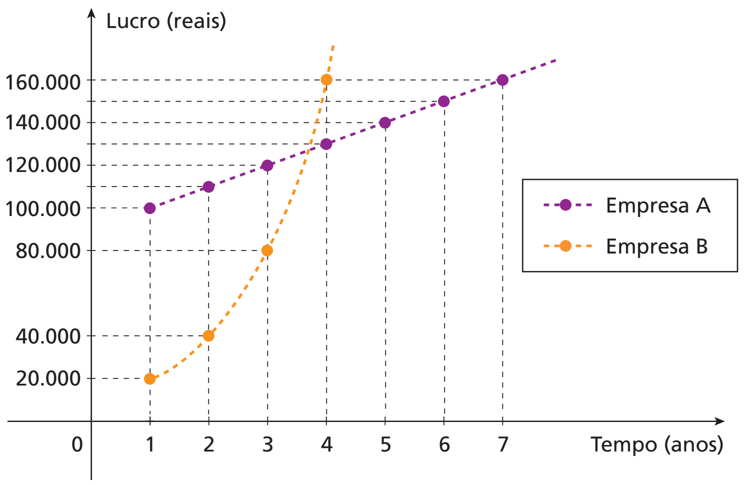
(20.000, 40.000, 80.000, ...), em que $a_1 = 20.000$ e $q = 2$

A lei de formação dessa PG é:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 20.000 \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Construindo os gráficos da PA e da PG, temos:



ADILSON SECCO

◆ Observação

Um gráfico pode ter eixos em escalas diferentes, pois isso não impede uma análise qualitativa da informação.

b) Qual dos lucros cresce mais rápido: o da empresa A ou o da empresa B?

Comparando os gráficos, percebemos que o lucro da empresa B cresce mais rápido que o da empresa A.

Podemos verificar que, após 4 anos de funcionamento, a empresa B atingiu um lucro de R$ 160.000,00 (8 vezes o lucro inicial); já a empresa A, após esse mesmo período, atingiu um lucro de R$ 130.000,00 (1,3 vez o lucro inicial).

◆ Observação

Para identificar qual é o crescimento mais rápido, podemos comparar a variação do lucro de cada empresa ao longo de um mesmo intervalo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

70. Sendo $\left(10,\ x,\ \dfrac{19}{2}\right)$ uma PA e $(1,\ x - 8,\ y)$ uma PG, determine x e y. $x = \dfrac{39}{4}$ e $y = \dfrac{49}{16}$

71. A sequência $\left(20,\ a,\ 5,\ \dfrac{5}{2}\right)$ é uma PG de razão q. A sequência $(5q,\ 3,\ b,\ c)$ é uma PA de razão r. Calcule os valores de a, b, c, q e r. $a = 10$, $b = \dfrac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \dfrac{1}{2}$, $r = \dfrac{1}{2}$

72. (Fuvest-SP) Sejam a e b números reais tais que:

(I) a, b e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA;

(II) 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.

Então, o valor de a é: alternativa e

a) $\dfrac{2}{3}$ **b)** $\dfrac{4}{3}$ **c)** $\dfrac{5}{3}$ **d)** $\dfrac{7}{3}$ **e)** $\dfrac{8}{3}$

73. Descubra três números positivos em PA sabendo que sua soma é igual a 90 e que, se acrescentarmos 10 ao segundo termo e 40 ao último termo, eles formarão uma PG. 20, 30, 40

74. Uma PA e uma PG têm, ambas, o primeiro termo igual a 2. Sabe-se também que seus terceiros termos são maiores que zero e iguais e que o segundo termo da PA excede o segundo termo da PG em 1. Qual é o terceiro termo das progressões? 8

75. Sabe-se que a sequência $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ é uma PA de razão $r = 4$ e que a sequência $(d_1,\ d_2,\ d_3,\ ...)$ é uma PG de razão q. Sabe-se, ainda, que $q = r - 1$, $d_1 = a_1 + 3$, $d_2 = a_2 + 5$ e $d_3 = a_3 + 19$.

Determine:

a) os valores de a_1, a_2, a_3, d_1, d_2 e d_3. $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$

b) a soma dos 10 primeiros termos da PA. $S_{10} = 180$

c) a soma dos 5 primeiros termos da PG. $S_5 = 363$

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Descubra o termo geral da sequência:
$\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{6}, \frac{12}{7}, \frac{15}{8}, \ldots\right)$ $a_n = \frac{3n}{3+n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

2. (Enem) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado? alternativa d

a) 38.000
b) 40.500
c) 41.000
d) 42.000
e) 48.000

3. Os Jogos Olímpicos acontecem a cada 4 anos. Embora tenham sido cancelados em alguns anos, o calendário continuou sendo obedecido como se tivessem ocorrido normalmente. Em sua 1ª edição da Era moderna, os Jogos ocorreram em 1896, em Atenas (Grécia), e, em sua 28ª edição, em 2016, no Rio de Janeiro. Quantas vezes os Jogos Olímpicos deixaram de acontecer nesse período? três vezes

TM RIO 2016

4. A soma dos dez primeiros elementos de uma PA é o quadrado de 10 e a soma dos vinte primeiros elementos dessa mesma PA é o quadrado de 20. A soma de seus trinta primeiros elementos é o quadrado de 30? sim

5. Entre 3 e 3.000 temos n números na forma 2^k, em que k é um número natural. Determine n. 10

6. Considere uma progressão geométrica de cinco termos e de razão positiva, em que a soma do primeiro termo com o terceiro é $\frac{9}{2}$ e o produto dos termos é 1.024. Encontre o produto dos três primeiros termos da PG. $2\sqrt{2}$

7. Resolva a equação: $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 9$ $S = \{6\}$

8. Um aluno, depois de formar uma progressão aritmética com oito termos começando pelo 3 e composta apenas de números naturais, percebe que o segundo, o quarto e o oitavo termos dessa PA formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Calcule a soma dos elementos dessa PG. 9 ou 42

9. Se a sequência $\left(\frac{1}{3}, a, 27\right)$, com $a > 0$, é uma progressão geométrica, e a sequência (x, y, z), em que $x + y + z = 18$, é uma progressão aritmética, determine x, sabendo que ambas as sequências têm a mesma razão. −3

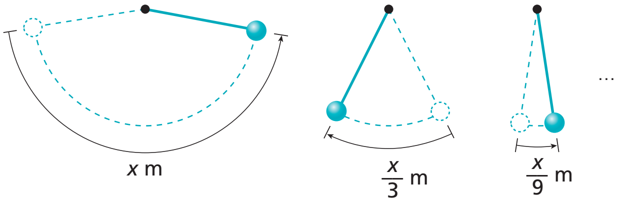
10. Se $(40, x, y, 5, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão q e $\left(q, 8 - a, \frac{7}{2}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética, encontre o valor de a. 6

11. (Mackenzie-SP) Se a sequência
$\left(2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, 6, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ é formada por termos de uma progressão aritmética alternados com os termos de uma progressão geométrica, então o produto do vigésimo pelo trigésimo primeiro termo dessa sequência é: alternativa e

a) 2^{10}
b) $\frac{1}{2^8}$
c) 2^{15}
d) $\frac{1}{2^{20}}$
e) $\frac{1}{2^5}$

Aprofundamento

12. Observe a seguir a trajetória de um pêndulo.

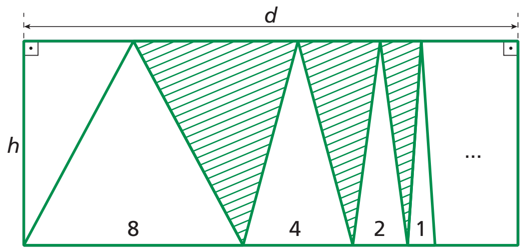


Sabendo que a cada oscilação o pêndulo percorre $\frac{1}{3}$ da distância percorrida na oscilação anterior, quanto ele percorrerá até parar? 1,5x m

13. Sabendo que os números 20, 56 e 83 são termos de uma progressão aritmética crescente, encontre os possíveis valores naturais da razão dessa PA. 1, 3 ou 9

Desafio

14. (FGV) A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetro, 8, 4, 2, 1, ...



Sabendo que a soma das áreas dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados h e d é igual a: alternativa c

a) 68
b) 102
c) 136
d) 153
e) 192

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. As ______ (2, 5, 8, 11, ...) e (3, 12, 48, 192, ...) são determinadas, respectivamente, pelas leis de formação $a_n = 3n - 1$ e $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com n natural não nulo. alternativa b

a) inequações
b) sequências
c) progressões geométricas
d) progressões aritméticas

2. A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma: alternativa c

a) função constante.
b) progressão aritmética.
c) progressão geométrica.
d) função afim.

3. O termo geral da PA (7, 5, 3, ...) é: alternativa d

a) $a_n = 5n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b) $a_n = 7n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $a_n = 8n - 7$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) $a_n = 9 - 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

4. Os pontos do gráfico de uma PA pertencem ao gráfico de uma função: alternativa a

a) afim.
b) quadrática.
c) exponencial.
d) logarítmica.

5. Calculando a soma dos vinte primeiros termos da PA (1, 2, 3, ..., 20), obtemos: alternativa c

a) 110 **b)** 20 **c)** 210 **d)** 300

6. O termo geral da PG (−2, −6, −18, ...) é: alternativa b

a) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b) $a_n = (-2) \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

7. A população de uma cidade é de 20.000 habitantes. Sabendo que essa população cresce à taxa de 2% ao ano, daqui a 10 anos ela será de aproximadamente: alternativa b

a) 22.200 habitantes.
b) 24.380 habitantes.
c) 27.300 habitantes.
d) 26.430 habitantes.

8. Os pontos do gráfico de uma PG pertencem ao gráfico de uma função do tipo: alternativa c

a) afim.
b) quadrática.
c) exponencial.
d) logarítmica.

9. Calculando a soma dos quatro primeiros termos da PG (3, 24, 192, ...), obtemos: alternativa d

a) 1.500
b) 200
c) 27
d) 1.755

10. O valor de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ é: alternativa a

a) 2
b) 5
c) 10
d) 7

11. A fração geratriz da dízima periódica 2,2333... é: alternativa d

a) $\frac{37}{10}$
b) $\frac{37}{30}$
c) $\frac{67}{10}$
d) $\frac{67}{30}$

12. Três números positivos estão em PA. Sua soma é igual a 30 e, se acrescentarmos a eles, respectivamente, 1, 2 e 9, obteremos uma PG. Então, o menor deles é: alternativa b

a) 2
b) 5
c) 10
d) 7

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão											
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Identificar padrões numéricos e sequências.	X	X										
Resolver problemas que envolvam sequências.			X		X	X	X		X	X	X	X
Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.				X				X				
Páginas do livro referentes ao conceito	188 a 192	200 a 203	193 a 196	196 e 197	198 e 199	200 a 203	200 a 203	203 e 204	205 e 206	206 a 208	206 a 208	208 e 209

Capítulo

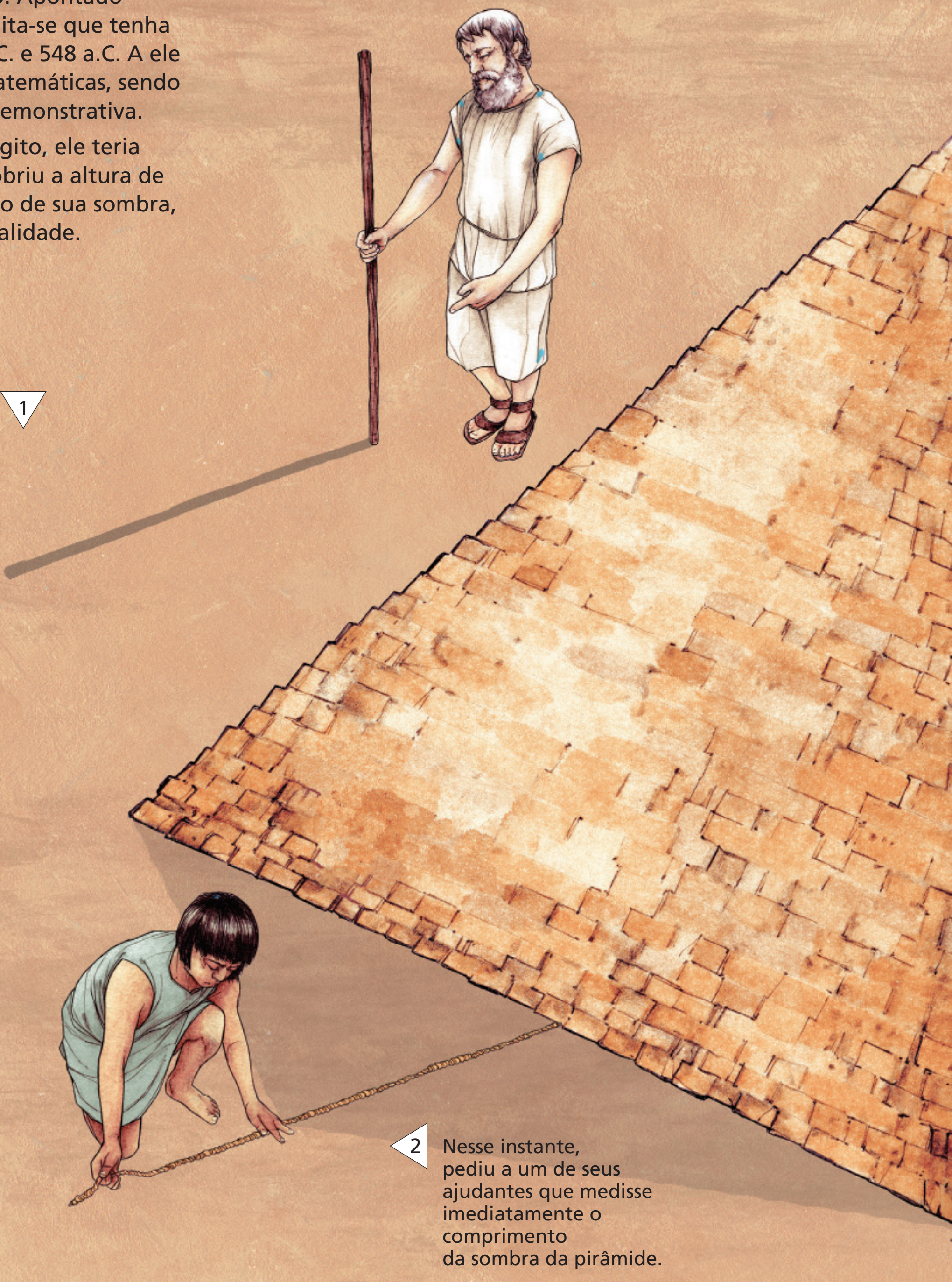
10

A semelhança e os triângulos

Tales e a semelhança

Pouco se sabe sobre Tales de Mileto. Apontado como o primeiro filósofo grego, acredita-se que tenha vivido aproximadamente entre 624 a.C. e 548 a.C. A ele são atribuídas diversas descobertas matemáticas, sendo considerado o criador da Geometria demonstrativa.

Conta-se que, em uma viagem ao Egito, ele teria feito um cálculo surpreendente: descobriu a altura de uma pirâmide a partir do comprimento de sua sombra, com base em conceitos de proporcionalidade.



1 Próximo à pirâmide, Tales fincou um bastão no chão e esperou até o momento em que a sombra e o bastão tivessem o mesmo comprimento.

2 Nesse instante, pediu a um de seus ajudantes que medisse imediatamente o comprimento da sombra da pirâmide.

Objetivos do capítulo

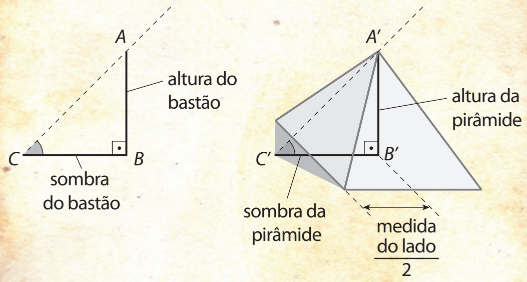
- Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.
- Identificar figuras planas semelhantes.
- Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.
- Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.

MARK BRODKIN/GETTY IMAGES

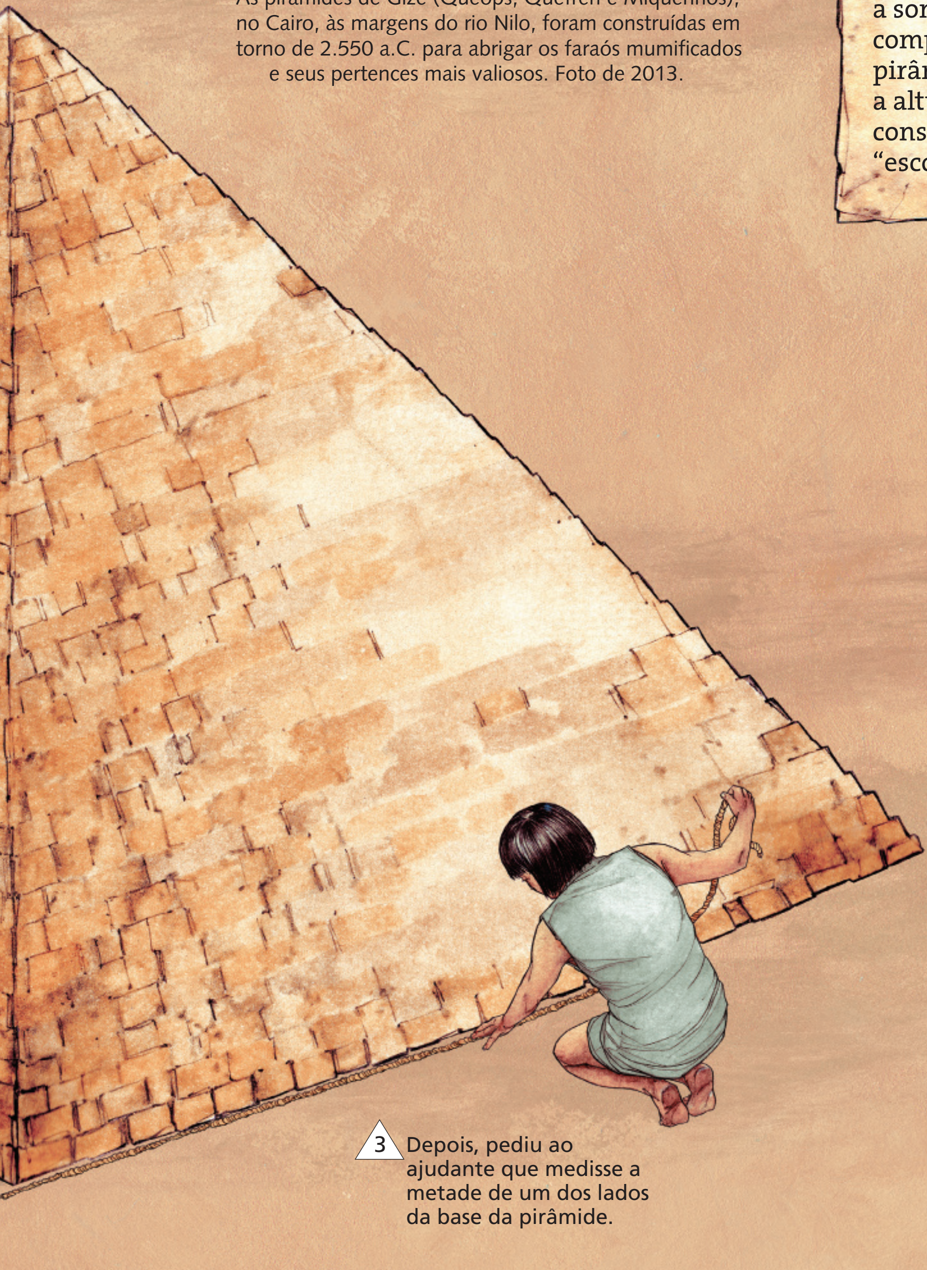
As pirâmides de Gizé (Quéops, Quéfren e Miquerinos), no Cairo, às margens do rio Nilo, foram construídas em torno de 2.550 a.C. para abrigar os faraós mumificados e seus pertences mais valiosos. Foto de 2013.

Qual foi o raciocínio de Tales?

Tales considerou que os raios solares são paralelos.


A
altura do bastão
C
B
sombra do bastão
A'
altura da pirâmide
C'
B'
sombra da pirâmide
$\frac{\text{medida do lado}}{2}$
ADILSON SECCO

Com base em seus conhecimentos sobre triângulos, ele concluiu que, quando a sombra do bastão tivesse o mesmo comprimento que o bastão, a sombra da pirâmide teria o mesmo comprimento que a altura da pirâmide. Mas ele levou em consideração que parte da sombra estava "escondida", conforme mostra o esquema.


3 Depois, pediu ao ajudante que medisse a metade de um dos lados da base da pirâmide.

4 Então, Tales adicionou essas duas medidas e descobriu a altura da pirâmide.

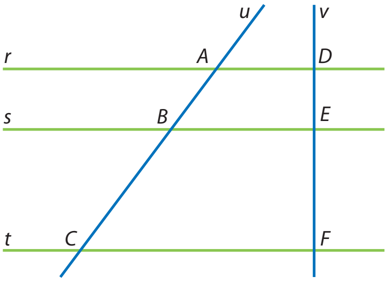
ILUSTRAÇÕES: TOMA

1 Proporcionalidade entre segmentos

A noção de proporcionalidade entre segmentos é a base para o conceito de semelhança de figuras. Por isso, vamos iniciar este capítulo estudando esse tema.

1.1 Feixe de retas paralelas e retas transversais

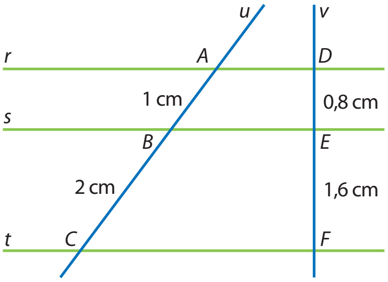
Observe a figura abaixo. As retas coplanares *r*, *s* e *t* são distintas e paralelas entre si, formando um **feixe de retas paralelas**. As retas *u* e *v* são **retas transversais** ao feixe, pois pertencem ao plano do feixe e intersectam todas as paralelas.



As retas paralelas determinam sobre as retas transversais pares de **segmentos correspondentes** (segmentos das transversais cujos extremos pertencem às mesmas paralelas). Na figura acima:

- $\overline{AB}$ é correspondente a $\overline{DE}$;
- $\overline{BC}$ é correspondente a $\overline{EF}$;
- $\overline{AC}$ é correspondente a $\overline{DF}$.

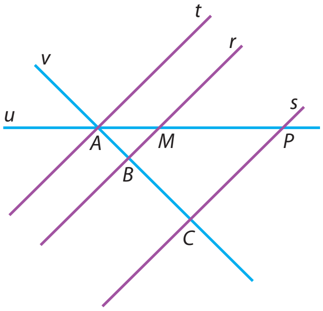
Medindo esses segmentos, obtemos:



Note que $\frac{1}{0,8} = \frac{2}{1,6}$, isto é, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$. Ou seja, as razões entre as medidas dos segmentos correspondentes são iguais. Por isso, dizemos que esses segmentos são **proporcionais**.

◆ Reflita

Na figura a seguir, quais são os pares de segmentos correspondentes?



$\overline{AB}$ e $\overline{AM}$; $\overline{BC}$ e $\overline{MP}$; $\overline{AC}$ e $\overline{AP}$

Esse fato ocorre para qualquer feixe de paralelas e quaisquer transversais?

O teorema de Tales afirma que sim. Mas, antes de estudá-lo, veremos uma importante propriedade dos triângulos, enunciada a seguir.

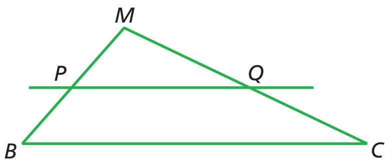
1.2 Teorema fundamental da proporcionalidade

Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

A seguir, vamos demonstrar esse teorema, supondo conhecida a fórmula da área de um triângulo.

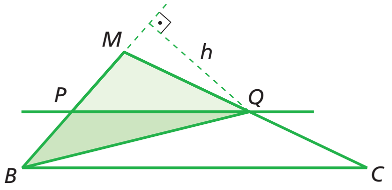
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Demonstração



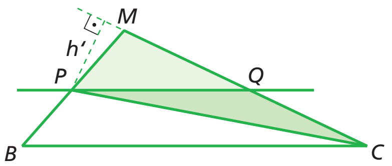
1. Considere o triângulo BCM e a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, paralela a $\overline{BC}$, tal que $P \in \overline{BM}$ e $Q \in \overline{MC}$.

Vamos mostrar que: $\frac{MP}{PB} = \frac{MQ}{QC}$



2. Os triângulos QMP e QPB têm a mesma altura de medida h relativas aos lados $\overline{MP}$ e $\overline{PB}$, respectivamente. Então, a razão entre suas áreas é:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(MP)\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot(PB)\cdot h} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \quad \text{(I)}$$

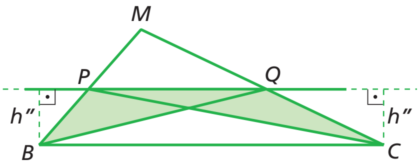


3. Os triângulos QMP e QPC têm mesma altura de medida h' relativas aos lados $\overline{MQ}$ e $\overline{QC}$, respectivamente. Então, a razão entre suas áreas é:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(MQ)\cdot h'}{\frac{1}{2}\cdot(QC)\cdot h'} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC} \quad \text{(II)}$$

4. De (I) e (II), vem que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \Rightarrow A_{QMP} = \frac{MP}{PB}\cdot A_{QPB} \\ \frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC} \Rightarrow A_{QMP} = \frac{MQ}{QC}\cdot A_{QPC} \end{array}\right\} \frac{MP}{PB}\cdot A_{QPB} = \frac{MQ}{QC}\cdot A_{QPC}$$



Os triângulos QPB e QPC têm base $\overline{PQ}$ e altura de medida h'' em relação ao lado comum $\overline{PQ}$. Logo, têm a mesma área.

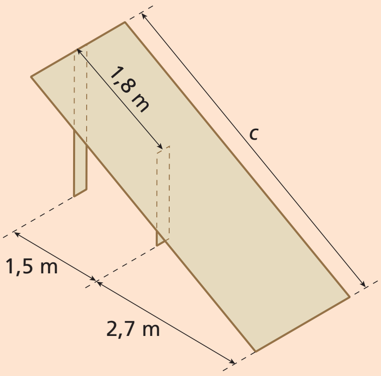
Assim, podemos concluir que: $\frac{MP}{PB} = \frac{MQ}{QC}$

◆ Observação

A recíproca desse teorema também é válida, isto é:

Se uma reta que intercepta dois lados de um triângulo em pontos distintos determina sobre eles segmentos proporcionais, então essa reta é paralela ao terceiro lado do triângulo.

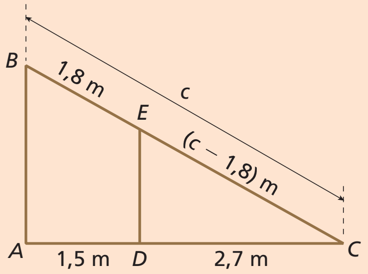
Exercício resolvido



R1. Dois pilares paralelos de sustentação de uma rampa distam 1,5 m. O pilar mais baixo foi fincado no chão a 2,7 m do pé da rampa, e seu topo dista 1,8 m do topo do pilar mais alto. Determinar o comprimento dessa rampa.

▸ ***Resolução***

Esquematizando a situação, obtemos a figura abaixo. Como o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, concluímos que $\overline{DE}$ determina sobre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ segmentos proporcionais.



Assim, temos:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA}$$

$$\frac{c - 1{,}8}{1{,}8} = \frac{2{,}7}{1{,}5}$$

$$c - 1{,}8 = 3{,}24$$

$$c = 5{,}04$$

Logo, a rampa tem 5,04 m de comprimento.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

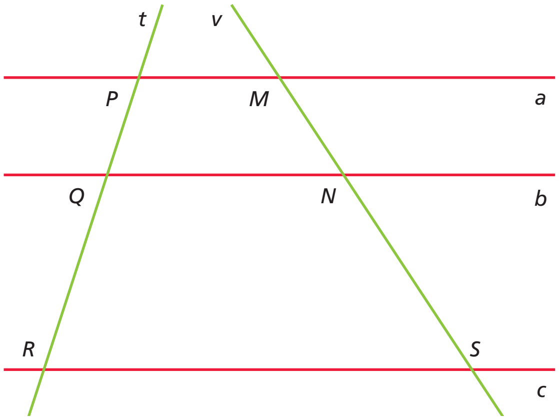
1.3 Teorema de Tales

Conforme vimos na abertura deste capítulo, Tales foi um matemático grego que realizou, entre outras coisas, o estudo da proporcionalidade entre segmentos. O enunciado a seguir é conhecido como **teorema de Tales**.

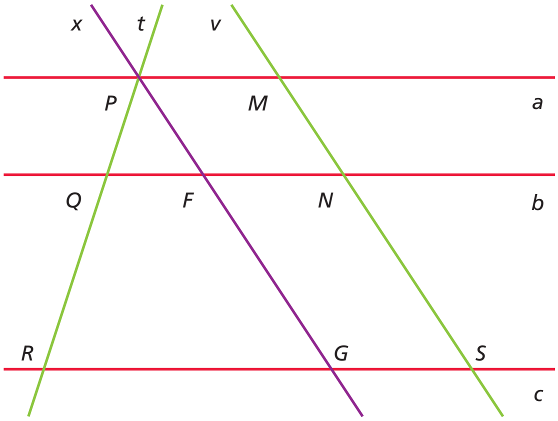
Os segmentos correspondentes determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas retas transversais são proporcionais.

Demonstração

Sejam *a*, *b* e *c* retas paralelas interceptadas pelas retas transversais *t* e *v* nos pontos *P*, *Q*, *R*, *M*, *N* e *S*. Vamos mostrar que $\frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$.



Considere uma reta *x*, paralela à reta *v* e que passe por *P*, encontrando as retas *b* e *c* nos pontos *F* e *G*, respectivamente.



No triângulo *PRG*, vale o teorema fundamental da proporcionalidade. Assim, concluímos que: $\frac{PQ}{QR} = \frac{PF}{FG}$ (I)

Os quadriláteros *PMNF* e *FNSG* são paralelogramos. Então, seus lados opostos têm mesma medida: $PF = MN$ e $FG = NS$ (II)

De (I) e (II), concluímos que: $\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NS}$ (III)

Logo: $\frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$

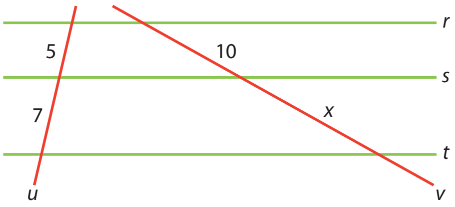
◆ Observações

- A partir da proporção (III), decorrem outras, por exemplo: $\frac{PQ}{PR} = \frac{MN}{MS}$ e $\frac{PR}{QR} = \frac{MS}{NS}$
- O teorema de Tales garante que a razão entre dois segmentos quaisquer de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exemplo

Na figura abaixo, as retas *r*, *s* e *t* são paralelas, cortadas por duas transversais, *u* e *v*. Vamos determinar *x*.


r
s
t
u
v
5
7
10
x

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{5}{10} = \frac{7}{x}$$

$$5x = 70$$

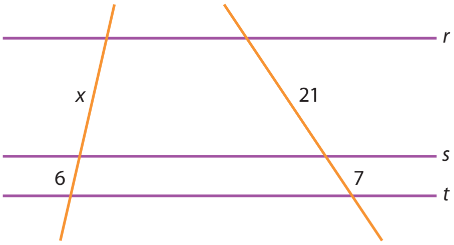
$$x = 14$$

Exercícios propostos

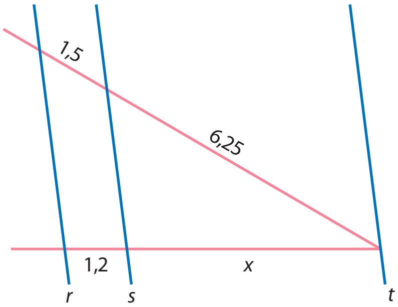
Registre as respostas em seu caderno

1. Sabendo que as retas *r*, *s* e *t* são paralelas, determine o valor de *x* em cada item.

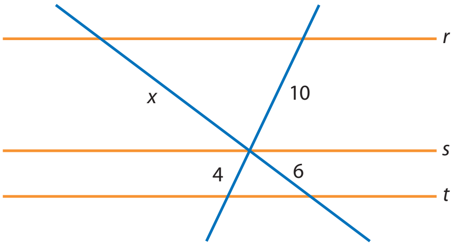
a) 18



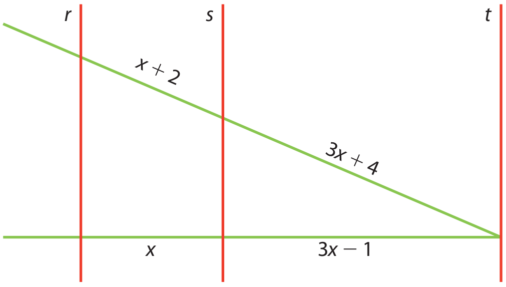
b) 5


1,5
6,25
1,2
x
r
s
t

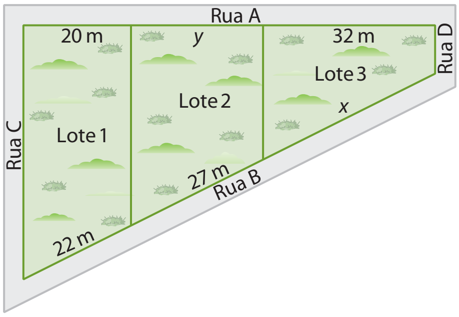
c) 15



d) 2

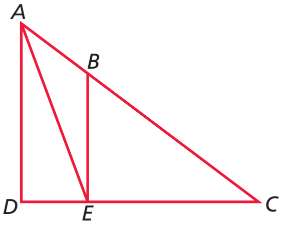

r
s
t
x + 2
3x + 4
x
3x − 1

2. Um terreno foi dividido em três lotes, conforme mostra a figura a seguir.


Rua A
Rua B
Rua C
Rua D
20 m
y
32 m
Lote 1
Lote 2
Lote 3
x
27 m
22 m

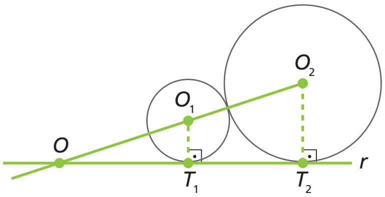
Sabendo que as divisas são paralelas às ruas C e D, encontre as medidas *x* e *y*.
$x = 35{,}2$ m e $y \simeq 24{,}5$ m

3. Para a cobertura de um galpão, instalou-se uma estrutura metálica na forma de treliça, conforme a figura, na qual as peças $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são paralelas.



Determine AB sabendo que $BC = 3{,}6$ m, $DE = 1{,}12$ m e $EC = 2{,}88$ m. 1,4 m

4. Considere duas circunferências, de centros O_1 e O_2, que são tangentes entre si, e a reta *r*, que é tangente a essas circunferências nos pontos T_1 e T_2, respectivamente.


O
O₁
O₂
T₁
T₂
r

Sabendo que $OT_1 = 12$ cm, $OT_2 = 27$ cm e $OO_1 = 13$ cm, determine a distância entre os centros O_1 e O_2. 16,25 cm

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2 Semelhança

Em muitas situações do cotidiano, encontramos figuras e objetos semelhantes: em maquetes, miniaturas, mapas de uma região, reproduções, ampliações e reduções de fotos etc. Nessas situações, as figuras não têm necessariamente o mesmo tamanho, mas têm a mesma forma. Por isso, dizemos que essas figuras são **semelhantes**.

Por exemplo, as fotos I e II são semelhantes, pois a foto II é uma redução da foto I, sem deformar a imagem. O mesmo não ocorre com as fotos I e III.

foto I

foto II

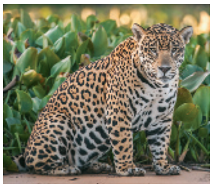
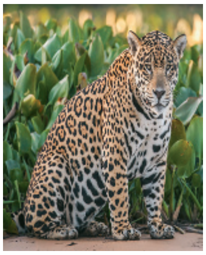


foto III



FOTOS: ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

Onça-pintada.

Reflita

- Dois círculos são sempre semelhantes?
- E dois retângulos?

- Dois círculos são sempre semelhantes, pois a forma é mantida, apenas o raio é modificado.
- Apesar de as medidas dos ângulos correspondentes serem sempre iguais, dois retângulos podem ter a forma diferente (por exemplo, um retângulo pode ser mais "achatado" que outro). Por isso, dois retângulos nem sempre são semelhantes.

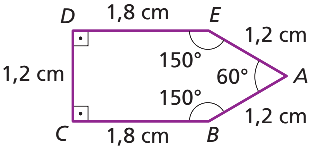
Além de estar presente na ampliação ou redução de fotografias (sem deformação), a ideia de semelhança também está presente nas figuras geométricas.

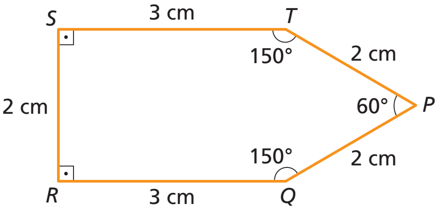
2.1 Semelhança de polígonos

Dois polígonos são **semelhantes** quando têm os ângulos internos correspondentes de mesma medida e os lados correspondentes proporcionais.

Exemplos

a) Observe os polígonos *ABCDE* e *PQRST*.





Esses polígonos são semelhantes, pois:

I. têm os ângulos internos correspondentes ($\hat{A}$ e $\hat{P}$, $\hat{B}$ e $\hat{Q}$, $\hat{C}$ e $\hat{R}$, $\hat{D}$ e $\hat{S}$, $\hat{E}$ e $\hat{T}$) de mesma medida;

II. têm os lados correspondentes proporcionais.

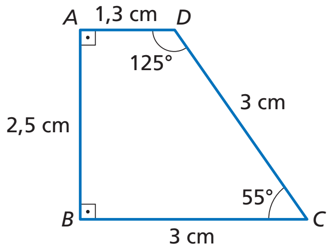
Observe:

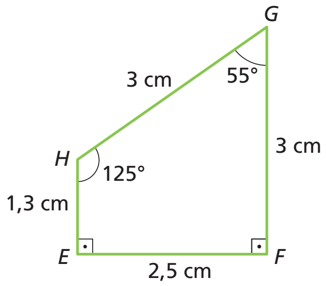
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{1{,}2}{2} = 0{,}6 \\[2ex] \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{1{,}8}{3} = 0{,}6 \\[2ex] \dfrac{CD}{RS} = \dfrac{1{,}2}{2} = 0{,}6 \\[2ex] \dfrac{DE}{ST} = \dfrac{1{,}8}{3} = 0{,}6 \\[2ex] \dfrac{EA}{TP} = \dfrac{1{,}2}{2} = 0{,}6 \end{array}\right\} \quad \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CD}{RS} = \dfrac{DE}{ST} = \dfrac{EA}{TP} = \underline{0{,}6}$$

A razão entre as medidas dos segmentos correspondentes é chamada de **razão de semelhança**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Os quadriláteros *ABCD* e *EFGH* abaixo também são semelhantes, pois têm ângulos internos correspondentes ($\hat{A}$ e $\hat{E}$, $\hat{B}$ e $\hat{F}$, $\hat{C}$ e $\hat{G}$, $\hat{D}$ e $\hat{H}$) de mesma medida e lados correspondentes proporcionais (nesse caso, a razão de semelhança é 1).





Quando a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes é 1, dizemos que eles são polígonos **congruentes**. Então, nesse exemplo, os polígonos, além de serem semelhantes, são também congruentes. Indicamos assim: *ABCD* ≅ *EFGH* (lemos: "*ABCD* é congruente a *EFGH*").

Note que, para dois polígonos serem semelhantes, não é necessário que estejam na mesma posição. Porém, ao indicar a semelhança ou a congruência, devemos respeitar a ordem dos vértices correspondentes: ao escrever *ABCD* ≅ *EFGH*, está implícito que *A* é correspondente a *E*, *B* é correspondente a *F* e assim por diante.

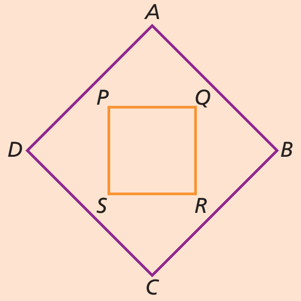
◆ Reflita

Explique o que são polígonos congruentes.

Espera-se que os alunos percebam que figuras congruentes têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Exercícios resolvidos

R2. Os quadrados *ABCD* e *PQRS* são semelhantes?



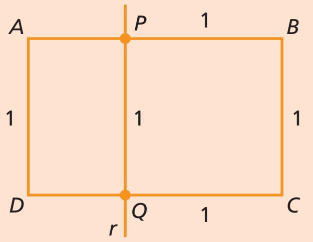
▶ ***Resolução***

Os quadrados *ABCD* e *PQRS* são semelhantes, pois:

- têm todos os ângulos internos medindo 90°;
- os lados de cada quadrado são congruentes entre si; então, os lados correspondentes serão proporcionais: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$

A argumentação acima é válida para quaisquer dois quadrados. Portanto, podemos concluir que dois quadrados são sempre polígonos semelhantes.

R3. Veja o retângulo *ABCD* da figura abaixo, em que $AD = BC = 1$. Uma reta *r* intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ desse retângulo determinando o quadrado *PBCQ* de lado 1. Sabendo que os retângulos *ABCD* e *ADQP* são semelhantes, quanto mede o lado $\overline{AB}$?



◆ Reflita

Desenhe dois quadrados, mostre que eles são semelhantes e encontre a razão de semelhança. Depois, determine a razão entre as medidas de suas diagonais, entre seus perímetros e entre suas áreas.

Comparando essas razões, o que você observa?

Espera-se que os alunos percebam que:
- a razão entre as medidas das diagonais é igual à razão de semelhança;
- a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança;
- a razão entre as áreas é igual à razão de semelhança elevada ao quadrado.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Resolução

Vamos representar por x a medida do lado $\overline{AB}$. Assim, $\overline{AP}$ mede $x - 1$.

Como os retângulos $ABCD$ e $ADQP$ são semelhantes, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

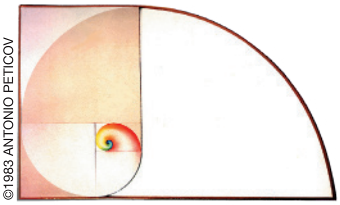
Como x é a medida do lado de um polígono, descartamos o valor negativo. Logo, o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observações

Se achar conveniente, propor aos alunos que pesquisem na internet sobre a razão áurea.

- O número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como **número de ouro**, razão áurea ou divina proporção, usualmente representado pela letra grega ϕ (lemos: "fi"). Esse número tem diversas aplicações na Matemática.
- **Retângulo áureo** é aquele no qual a razão entre o seu comprimento e a sua largura é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. O retângulo *ABCD* do exercício **R3** é um retângulo áureo.

Mais informações sobre o número de ouro podem ser encontradas no livro *Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente*; ver página 251, na seção "Sugestões de leitura".



©1983 ANTONIO PETICOV

Antonio Peticov. *Obra 1.618*, 1983. Madeira e tinta sobre tela, 220 × 350 cm. Espiral construída tendo como base retângulos áureos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

5. Responda às questões e justifique sua resposta.

a) Todos os triângulos retângulos são polígonos semelhantes?

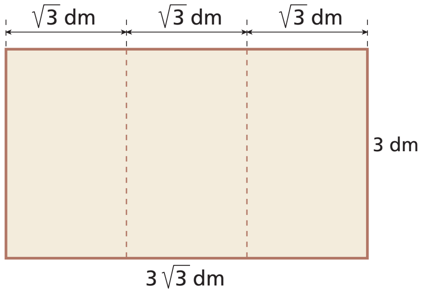
b) Dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes?

5. a) Não, pois triângulos retângulos podem ter formas diferentes. Por exemplo: dois triângulos retângulos, sendo um deles com catetos que medem *a* e *a*, e outro com catetos que medem *a* e 2*a*, não são semelhantes.

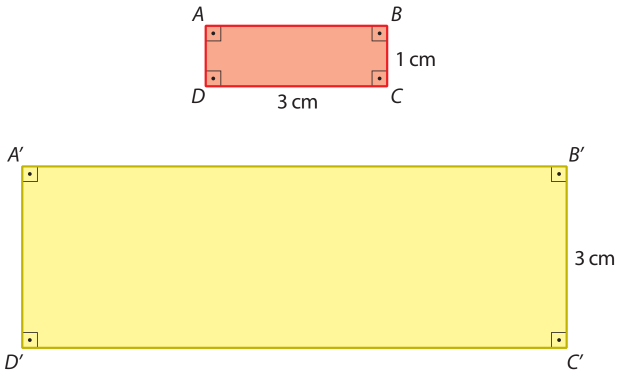
b) Sim, pois todos os ângulos internos dos dois triângulos medem 60° (são congruentes) e os lados são proporcionais, já que a razão entre as medidas dos lados correspondentes é sempre a mesma (os lados de cada um são congruentes entre si).

6. Um guardanapo retangular de medidas 3 dm por $3\sqrt{3}$ dm é dobrado em três partes iguais, conforme mostra a figura. Os retângulos correspondentes ao guardanapo aberto e a ele dobrado são semelhantes? Se forem, qual é a razão de semelhança?

São semelhantes; a razão de semelhança é $\sqrt{3}$.



7. Considere os retângulos semelhantes.



a) Qual é o comprimento do retângulo maior? 9 cm

b) Qual é a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo retângulo? $\frac{1}{3}$

c) Qual é a razão entre o perímetro do primeiro retângulo e o do segundo? $\frac{1}{3}$

d) Qual é a razão entre a área do primeiro retângulo e a do segundo? $\frac{1}{9}$

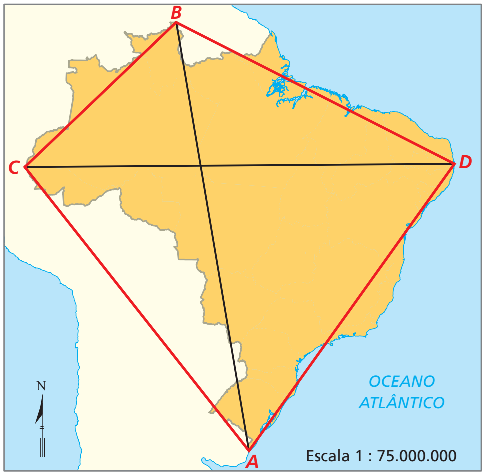
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. A semelhança de figuras também é usada na confecção de mapas. Nesse caso, a figura desenhada no mapa deve ser semelhante à região real.

Veja, por exemplo, o mapa ao lado, no qual estão indicados os pontos mais extremos do Brasil.

Esta atividade permite um trabalho interdisciplinar com Geografia.

A: Arroio Chuí (RS)
B: Nascente do rio Ailã (RR)
C: Nascente do rio Moa (AC)
D: Ponta do Seixas (PB)



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Fonte: *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2009.

Repare que a **escala** do mapa é 1 : 75.000.000. Isso significa que 1 cm no mapa corresponde a 75.000.000 cm na realidade.

a) Com uma régua, meça a distância, no mapa, entre os pontos *A* e *B*. Qual é essa distância real, em quilômetro? 5,8 cm; 4.350 km

b) Qual é a distância no mapa entre *C* e *D*? E a distância real, em quilômetro? 5,7 cm; 4.275 km

9. Em um terreno retangular de 1.440 m^2 de área, foi construída uma oficina com planta retangular, semelhante à do terreno.

Sabendo que a razão entre as larguras da oficina e do terreno é $\frac{2}{5}$, responda:

a) Qual é a razão entre a área da oficina e a área total do terreno? Escreva essa razão na forma de porcentagem. $\frac{4}{25}$; 16%

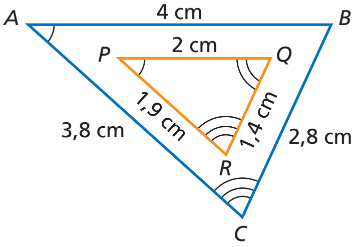
b) Qual é a área da oficina? 230,4 m^2

2.2 Semelhança de triângulos

Por serem polígonos, dois triângulos são semelhantes quando satisfazem as condições de semelhança de polígonos, isto é, quando têm os lados correspondentes proporcionais e os ângulos internos correspondentes congruentes.

Exemplo

Comparando as medidas dos ângulos internos e dos lados dos triângulos *ABC* e *PQR*, podemos perceber que:



ADILSON SECCO

- $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{Q}$, $\hat{C} \cong \hat{R}$
- $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 2$

Assim, podemos concluir que: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$
(lemos: "o triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *PQR*")

Entretanto, o triângulo é um polígono especial, pois, verificada apenas uma das condições de semelhança, automaticamente a outra também ocorre. Em outras palavras, para que dois triângulos sejam semelhantes basta que uma das condições a seguir seja satisfeita.

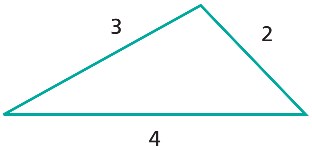
- Os lados correspondentes são proporcionais.
- Os ângulos internos correspondentes são congruentes.

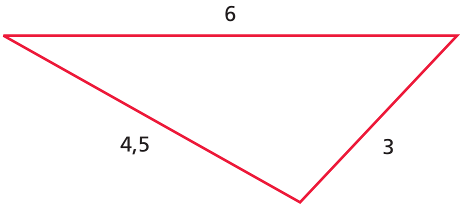
◆ **Observações**

- Quando dois ângulos têm a mesma medida, dizemos que eles são **congruentes.**
- Lembre que o símbolo $\cong$ é usado para indicar uma congruência. $\hat{A} \cong \hat{P}$ significa que o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{P}$, ou seja, eles têm a mesma medida.
- O símbolo $\sim$ é usado para indicar a semelhança.

Exemplos

a)





Esses dois triângulos são semelhantes, pois têm os lados correspondentes proporcionais, isto é:

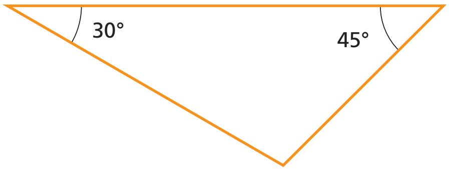
$$\frac{3}{4,5} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 0,666\ldots \text{ (razão de semelhança)}$$

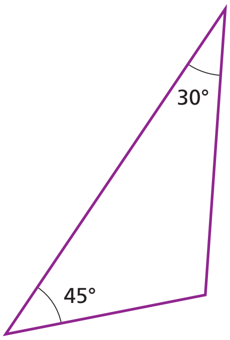
Consequentemente, os ângulos correspondentes são congruentes.

Observação

Os lados correspondentes podem ser identificados de acordo com seus tamanhos. Por exemplo, o maior lado de um triângulo é correspondente ao maior lado do outro.

b) Estes outros dois triângulos também são semelhantes:

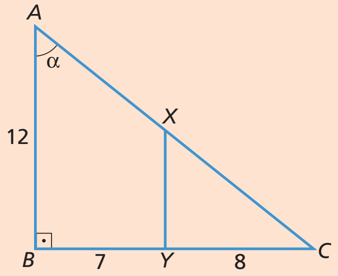




Note que, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, em ambos os triângulos o ângulo não identificado mede 180° − 30° − 45° = 105°. Assim, podemos perceber que a segunda condição de semelhança para triângulos também pode ser simplificada: basta que dois ângulos correspondentes sejam congruentes para que os dois triângulos sejam semelhantes.

Exercícios resolvidos

R4. No triângulo ABC representado abaixo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{XY}$ são paralelos. O ângulo $\hat{A}$ mede α, e o ângulo $\hat{B}$ é reto. As medidas estão expressas em centímetro. Quanto mede $\overline{XY}$?



Resolução

Como $\overline{AB}$ e $\overline{XY}$ são paralelos e cortados pelos segmentos transversais $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, temos $B\hat{A}C \cong Y\hat{X}C$ e $A\hat{B}C \cong X\hat{Y}C$. Assim, os triângulos ABC e XYC são semelhantes, pois têm dois ângulos correspondentes congruentes.

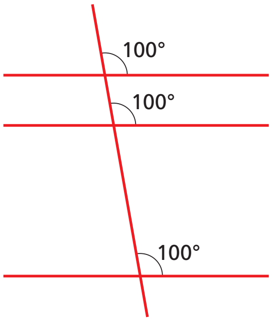
Logo, os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais, isto é:

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YC} \Rightarrow \frac{12}{XY} = \frac{7 + 8}{8} \Rightarrow XY = \frac{8 \cdot 12}{15} \Rightarrow XY = 6,4$$

Portanto, $\overline{XY}$ mede 6,4 cm.

Observação

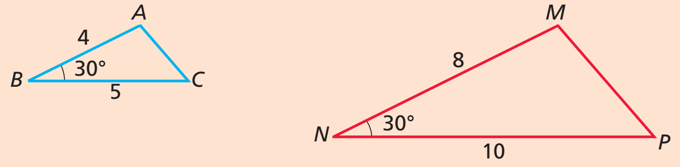
Os ângulos destacados na figura são **ângulos correspondentes**.



Uma reta transversal a um feixe de paralelas determina sobre elas ângulos correspondentes congruentes.

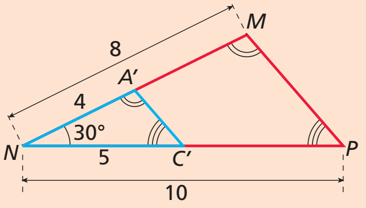
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R5. Os triângulos ABC e MNP representados a seguir têm dois lados correspondentes proporcionais (medidas expressas em centímetro) e os ângulos compreendidos entre eles congruentes. Mostrar que esses triângulos são semelhantes.



▸ ***Resolução***

No triângulo MNP, sobre o lado $\overline{MN}$ marcamos 4 cm a partir de N, obtendo o ponto A'.
Do mesmo modo, no lado $\overline{NP}$ obtemos o segmento $\overline{NC'}$ de 5 cm.



Como $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$, os segmentos $\overline{NA'}$, $\overline{MN}$, $\overline{NC'}$ e $\overline{NP}$ são proporcionais; então, pela recíproca do teorema fundamental da proporcionalidade, temos $\overline{A'C'} \,/\!/\, \overline{MP}$. Assim, os ângulos correspondentes são congruentes: $\hat{A}' \cong \hat{M}$ e $\hat{C}' \cong \hat{P}$

Dessa forma, mostramos que os triângulos ABC e MNP são semelhantes, pois têm os três ângulos internos correspondentes congruentes.

Nos exemplos da página anterior, abordamos os casos LLL (lado-lado-lado) e AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos e, neste exercício **R5**, o caso LAL (lado-ângulo-lado).

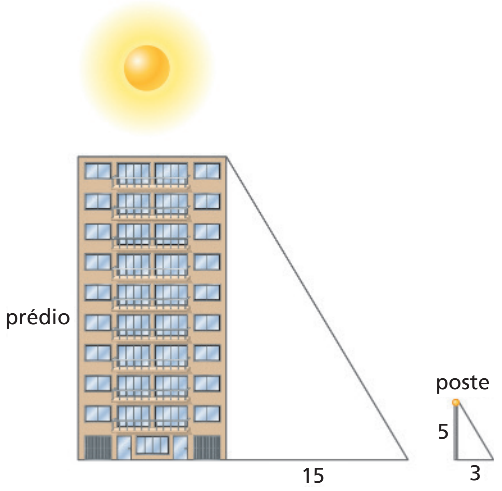
◆ Observação

Se quaisquer dois triângulos estiverem nas mesmas condições, ou seja, se tiverem dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos formados por esses lados forem congruentes, então os triângulos serão semelhantes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

10. (Vunesp) A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m.



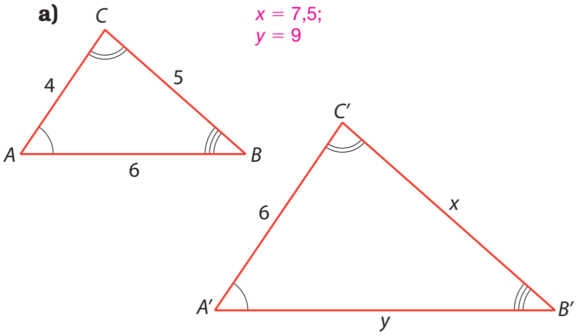
A altura do prédio, em metro, mede: alternativa a

a) 25 **b)** 29 **c)** 30 **d)** 45 **e)** 75

11. Determine, em cada item, o valor das incógnitas.

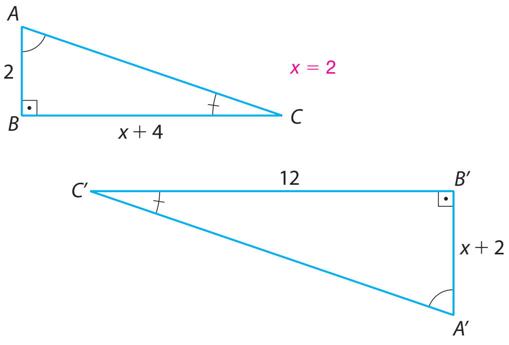
a)

$x = 7{,}5$;
$y = 9$



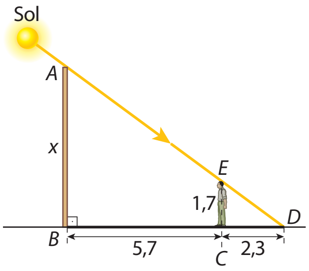
b)

$x = 2$

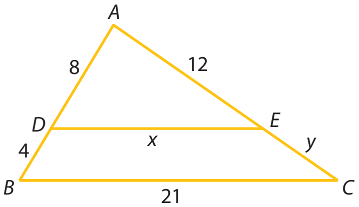


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

12. Uma pessoa de 1,7 m de altura está a 5,7 m da base de um poste e projeta uma sombra de 2,3 m. Qual é a altura aproximada do poste? 5,9 m



13. Determine x e y sabendo que $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$. $x = 14$; $y = 6$



14. (FEI-SP) Na figura, x mede: alternativa b

a) 3

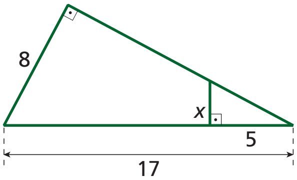
b) $2\frac{10}{15}$

c) Faltam dados para calcular x.

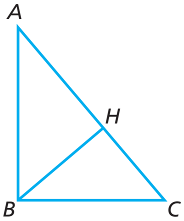
d) $3 + 2\frac{10}{15}$

e) n.r.a.

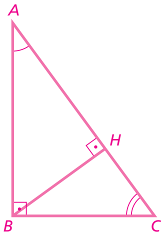
(*Observação*: Nesta questão “n.r.a.” significa “nenhuma resposta anterior”.)

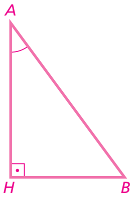


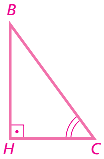
15. O ângulo $\hat{B}$ de um triângulo ABC é reto. A altura relativa à hipotenusa desse triângulo divide-o em dois triângulos: ABH e CBH. Mostre que esses três triângulos são semelhantes.



15. Desenhando os triângulos separadamente, temos:



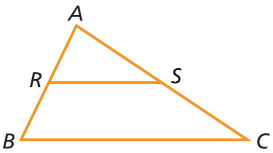




Os triângulos *AHB* e *BHC* são semelhantes ao triângulo *ABC*, pois têm dois ângulos respectivamente congruentes a dois ângulos do triângulo *ABC*. Logo, os triângulos *AHB* e *BHC* são semelhantes entre si.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

16. Com a figura a seguir, é possível obter conclusões importantes.
Ver resolução no Guia do professor.



Sabendo que $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e que R é ponto médio de $\overline{AB}$, faça o que se pede.

a) Mostre que S é ponto médio de $\overline{AC}$.

b) Pela conclusão do item **a**, mostre que RS é metade de BC.

c) Agora, verifique que a medida da altura do triângulo ARS relativa ao lado $\overline{RS}$ é metade da medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

d) Discuta com um colega e, em seguida, elaborem um pequeno texto com as conclusões a que vocês chegaram.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Teorema de Pitágoras

Os triângulos retângulos têm diversas aplicações: estão presentes nas construções, nos trabalhos de topografia e agrimensura, nas situações em que é preciso calcular distâncias inacessíveis etc.

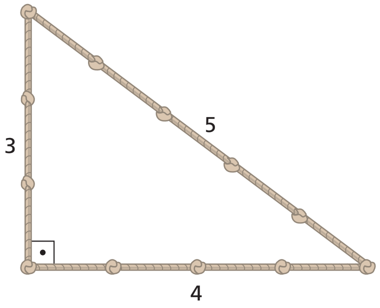
Muitos povos da Antiguidade conheciam o triângulo retângulo. Os egípcios utilizavam um triângulo retângulo em particular: o de lados 3, 4 e 5. Ele era usado como esquadro, a fim de verificar ângulos retos para demarcar terrenos, por exemplo.

O esquadro egípcio era constituído por uma corda com 12 nós igualmente espaçados. Cada espaço entre os nós era uma unidade de medida de comprimento.

Eles sabiam que um triângulo nessas condições é um triângulo retângulo.

ANDY DEAN PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Observe os triângulos retângulos que servem de sustentação à estrutura do telhado.



Observação

Em um triângulo retângulo:

- **catetos** são os lados perpendiculares;
- **hipotenusa** é o lado oposto ao ângulo reto.

Algum tempo depois, os gregos descobriram que essas medidas, e muitas outras, mantêm a relação $3^2 + 4^2 = 5^2$, que passou a ser conhecida por **relação pitagórica**, porque acredita-se que tenha sido estudada pelos pensadores gregos da escola de Pitágoras.

3.1 Explorando o teorema de Pitágoras

Com o auxílio do computador, vamos explorar uma relação que os gregos perceberam há cerca de 2.500 anos.

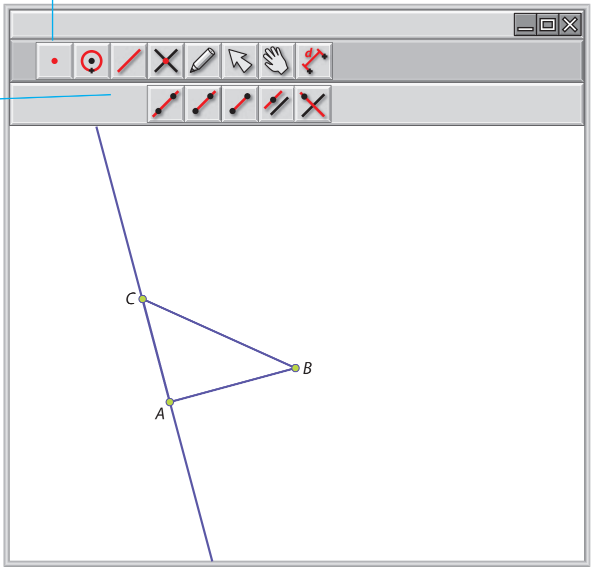
Em um *software* de Geometria interativa, vamos acompanhar os seguintes passos:

Na internet, há diversos *softwares* livres de Geometria interativa, por exemplo, o *Igeom* e o *Geogebra*. Se achar conveniente, escolher um deles e realizar essa atividade com os alunos. Vale ressaltar que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula.

1. Construímos um triângulo retângulo qualquer.

Normalmente, as ferramentas disponíveis ficam nessa parte superior.

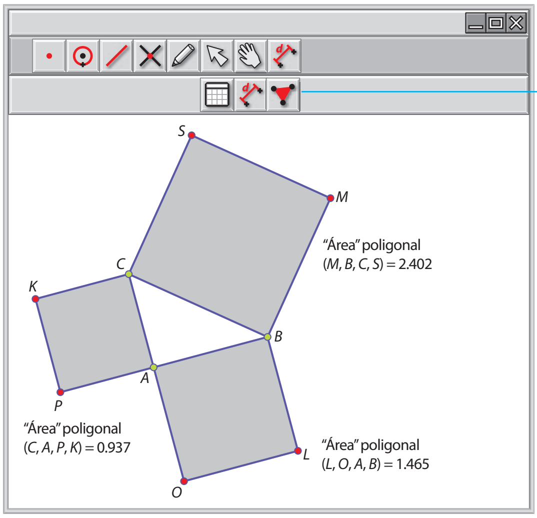
Em cada botão, há diversas opções de ferramenta. Com elas, podemos construir segmentos, retas perpendiculares, polígonos, medir segmentos etc.



Nessa etapa, os alunos devem perceber que, para construir um triângulo retângulo, é preciso construir uma reta perpendicular a um dos catetos.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2. Construímos um quadrado sobre cada um dos lados. Depois, com a ferramenta do *software*, medimos a área desses quadrados.



"Área" poligonal $(M, B, C, S) = 2.402$

"Área" poligonal $(C, A, P, K) = 0.937$

"Área" poligonal $(L, O, A, B) = 1.465$

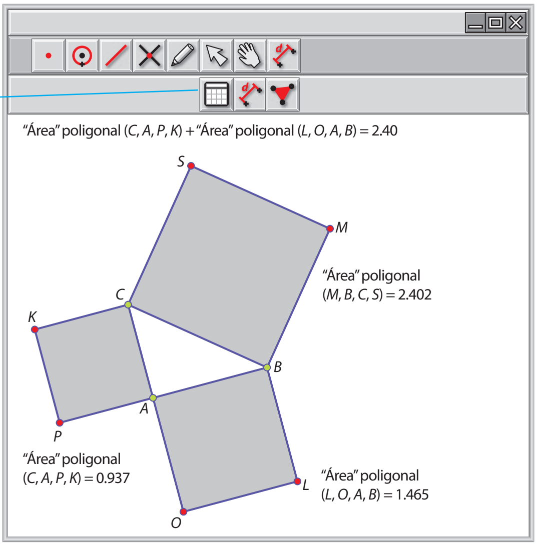
Esta ferramenta fornece a área do polígono selecionado.

Para construir os quadrados, além de construir retas perpendiculares, os alunos devem garantir que todos os lados tenham a mesma medida. Para isso, podem usar a ferramenta "circunferência" como compasso.

Para a tela não ficar "poluída", podemos ocultar os elementos que foram usados na construção dos quadrados usando a ferramenta "esconder objetos".

3. Com a ferramenta "calculadora", adicionamos as áreas dos dois quadrados menores (sobre os catetos). Essa soma aparecerá na tela.

Na ferramenta "calculadora", não precisamos digitar os valores: basta selecionar uma das áreas, clicar em $\boxed{+}$, clicar sobre a outra área e, finalmente, clicar em $\boxed{\text{Calcule}}$. Com isso, a soma ficará vinculada às áreas dos quadrados.



"Área" poligonal (C, A, P, K) + "Área" poligonal $(L, O, A, B) = 2.40$

"Área" poligonal $(M, B, C, S) = 2.402$

"Área" poligonal $(C, A, P, K) = 0.937$

"Área" poligonal $(L, O, A, B) = 1.465$

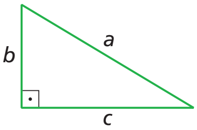
Repare que essa soma é igual à área do quadrado maior (construído sobre a hipotenusa), desconsiderando erros de aproximação.

4. Agora, com a ferramenta "mover", clicamos sobre um dos vértices do triângulo *ABC* e o movimentamos. Observando a soma das áreas dos dois quadrados, concluímos que a relação anterior continua válida.

Verificamos assim, experimentalmente, que a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos é igual à área do quadrado sobre a hipotenusa. Esse é o princípio do teorema de Pitágoras.

3.2 Demonstrando o teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras pode ser enunciado da seguinte forma:



Se um triângulo retângulo tem os catetos de medidas *b* e *c* e a hipotenusa de medida *a*, então:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

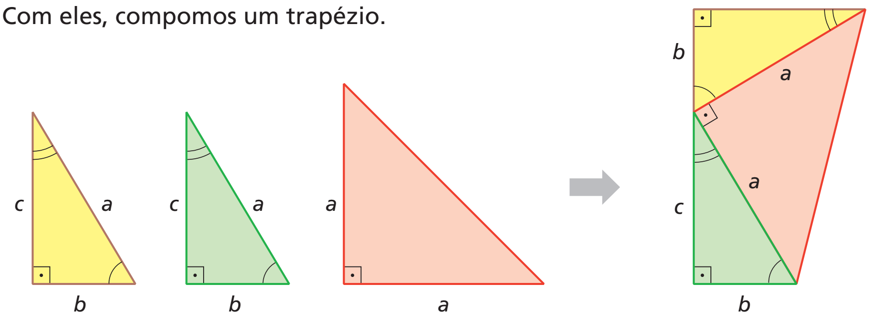
Existem diversas demonstrações para esse teorema. Acompanhe a seguir uma demonstração com base na área de figuras planas.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Demonstração

Vamos considerar dois triângulos retângulos com catetos de medidas *b* e *c* e hipotenusa de medida *a*, e um terceiro triângulo retângulo isósceles de catetos de medida *a*.

Com eles, compomos um trapézio.



A área da região limitada pelo trapézio é a soma das áreas das três regiões triangulares. Assim, podemos escrever:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \quad \text{(I)}$$

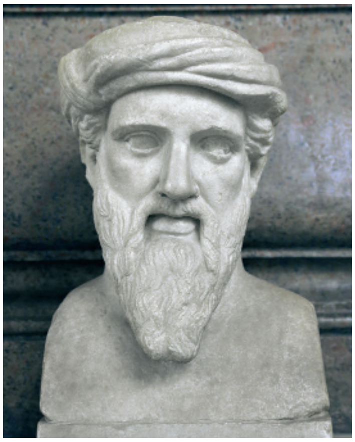
No entanto, sabemos que:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{\text{medida da base menor} + \text{medida da base maior}}{2} \times \text{medida da altura} \quad \text{(II)}$$

Então, de (I) e (II), podemos escrever:

$$\frac{2bc + a^2}{2} = \frac{b + c}{2} \cdot (b + c) \Rightarrow \frac{2bc + a^2}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Com esse teorema, a partir da medida de dois lados de um triângulo retângulo, podemos calcular a medida do terceiro lado.



LANMAS/ALAMY/GLOW IMAGES - MUSEUS CAPITOLINOS, ROMA

Embora a existência de Pitágoras seja discutível, vários escultores modelaram sua suposta imagem. Na foto, você vê uma dessas esculturas. Foto de 2015.

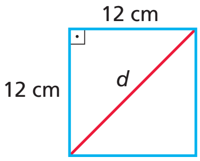
◆ Observação

A recíproca do teorema de Pitágoras também é válida. Ou seja, um triângulo com lados de medidas *a*, *b* e *c* tal que $a^2 = b^2 + c^2$ é um triângulo retângulo.

Isso pode ser deduzido da lei dos cossenos, que será vista no volume do 2º ano desta coleção.

Exemplos

a) O lado de um quadrado mede 12 cm. Quanto mede cada uma de suas diagonais?



A diagonal desse quadrado forma com dois de seus lados consecutivos um triângulo retângulo cujos lados medem 12 cm, 12 cm e *d* cm.

Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$d^2 = 12^2 + 12^2 \Rightarrow d^2 = 144 + 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \sqrt{288} \Rightarrow d = 12\sqrt{2}$

Como as diagonais de um quadrado são congruentes, cada uma delas mede $12\sqrt{2}$ cm.

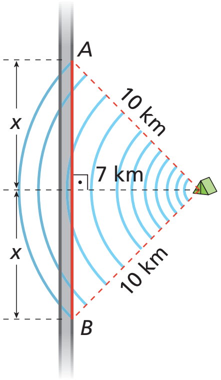
◆ Reflita

Uma **diagonal** de um polígono é um segmento de reta que tem extremidades em dois vértices não consecutivos desse polígono.

Existe polígono sem diagonal? Caso exista, identifique-o.

Sim, apenas o triângulo.

b) Um grupo de amigos acampa a 7 km de uma estrada. Com um equipamento de rádio cujo alcance é de 10 km, eles pretendem se comunicar com os caminhoneiros que circulam nessa estrada. Vamos determinar 2*x*, que representa o comprimento da borda da estrada ($\overline{AB}$) atingida pelas ondas desse rádio.



Observando o triângulo isósceles da figura, vemos que está dividido em dois triângulos retângulos congruentes. Aplicando o teorema de Pitágoras em um desses triângulos retângulos, temos:

$x^2 + 7^2 = 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{51} \Rightarrow x \simeq 7{,}14$

De *A* até *B*, temos: $2x \simeq 2 \cdot 7{,}14 = 14{,}28$

Portanto, a onda de rádio alcança aproximadamente 14,28 km da estrada.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

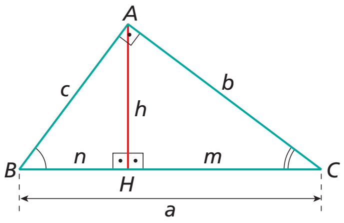
3.3 A semelhança e o teorema de Pitágoras

É possível demonstrar o teorema de Pitágoras por meio da semelhança de triângulos. Nessa demonstração, encontramos outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo. Acompanhe.

Demonstração

Considere:

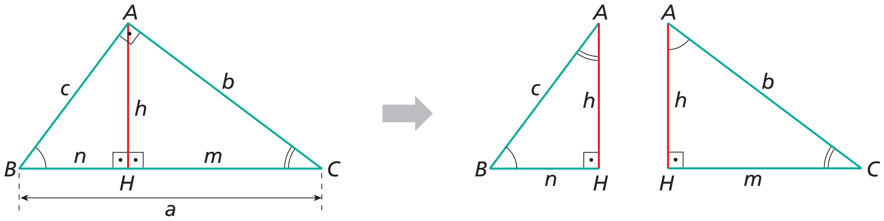
- um triângulo retângulo com catetos de medidas b e c e hipotenusa de medida a;
- a altura relativa à hipotenusa desse triângulo, de medida h;
- os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{BH}$ de medidas m e n, respectivamente.



◆ Observação

Os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{BH}$, de medidas m e n, respectivamente, são conhecidos por **projeções ortogonais dos catetos** sobre a hipotenusa.

A altura AH divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos: HAC e HBA. Esses três triângulos são semelhantes, pois possuem três ângulos internos respectivamente congruentes.



Pela semelhança entre os triângulos, obtemos:

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow \mathbf{bc = ah} \text{ e } \mathbf{b^2 = am}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow \mathbf{c^2 = an}$$

$$\triangle AHC \sim \triangle BHA \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \mathbf{h^2 = mn}$$

Somando as relações $b^2 = am$ e $c^2 = an$, membro a membro, temos:

$$b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow \mathbf{b^2 + c^2 = a^2}$$

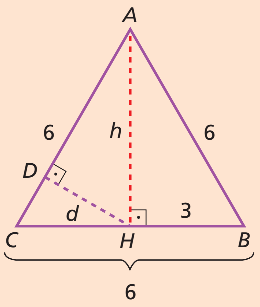
Assim, demonstramos o teorema de Pitágoras e obtemos outras relações no triângulo retângulo.

Exercício resolvido

R6. Na figura, o triângulo ABC é equilátero. Determinar:

a) a medida h da altura desse triângulo.

b) a medida d da altura relativa ao lado $\overline{AC}$, no triângulo AHC.



▸ ***Resolução***

a) Em um triângulo equilátero, as três alturas são congruentes. Logo, basta determinar apenas uma delas.

No triângulo ABC, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ determina dois triângulos retângulos congruentes (AHC e AHB) de hipotenusa 6 e catetos h e 3. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AHB, obtemos:

$$h^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow h = \sqrt{36 - 9} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$$

b) No triângulo AHC, a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ determina o triângulo retângulo DHA, semelhante ao triângulo HCA. Da proporcionalidade entre os lados correspondentes:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{DH}{HC}$$

Assim: $\frac{h}{6} = \frac{d}{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} \cdot 3 = 6 \cdot d \Rightarrow d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

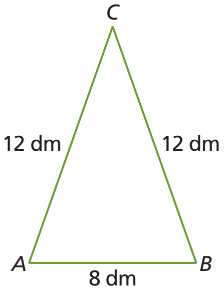
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

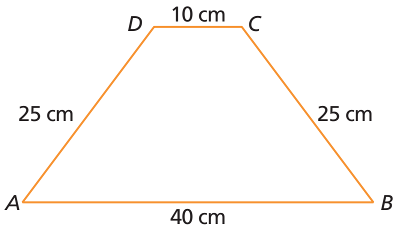
Registre as respostas em seu caderno

17. Calcule a altura das figuras a seguir em relação ao lado $\overline{AB}$.

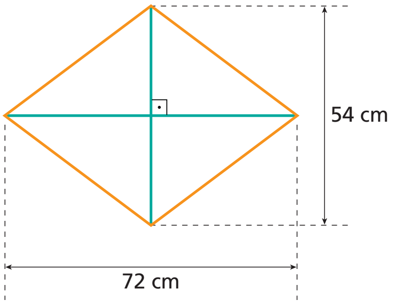
a) Triângulo isósceles. $8\sqrt{2}$ dm



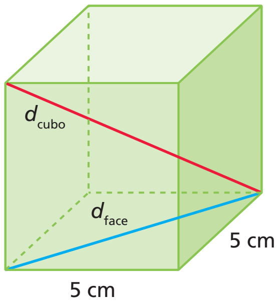
b) Trapézio isósceles. 20 cm



18. Determine o perímetro do losango a seguir. 180 cm



19. Considere um cubo cuja aresta mede 5 cm.

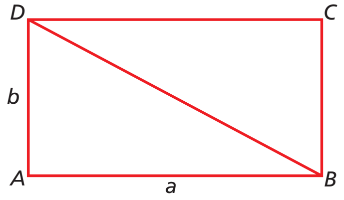


a) Determine:

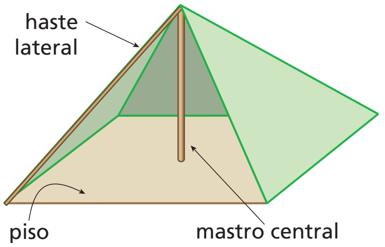
- a medida da diagonal de uma face. $5\sqrt{2}$ cm
- a medida da diagonal do cubo. $5\sqrt{3}$ cm

b) Junte-se com um colega, analisem o item anterior e respondam: Dado um cubo cuja aresta mede a, qual é a relação entre as medidas de sua aresta e de sua diagonal? $d_{cubo} = a\sqrt{3}$

20. No retângulo a seguir, temos $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ e $BD = 10$ cm. Quanto mede cada lado do retângulo? $a = 8$ cm e $b = 6$ cm



21. Uma barraca tem o mastro central de sustentação perpendicular ao centro do piso quadrado. Sabendo que o mastro tem 1,60 m de altura e o piso, 5,76 m^2 de área, determine o comprimento de cada haste lateral da barraca usando uma calculadora. $\simeq 2,33$ m



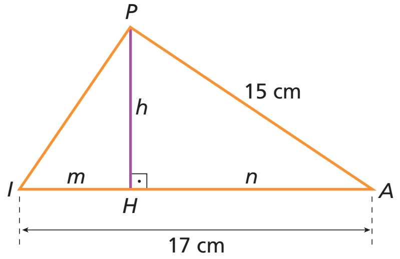
22. Três números **naturais** não nulos que obedecem à relação pitagórica são conhecidos como **terno pitagórico**, por exemplo, 3, 4 e 5, e formam um triângulo pitagórico.

a) Dê as medidas de outros dois triângulos pitagóricos. Resposta possível: 6, 8, 10 e 5, 12, 13

b) Que tipo de triângulo obtemos quando as medidas de seus lados formam um terno pitagórico? Justifique. triângulo retângulo

c) Pode existir um triângulo retângulo cujas medidas não formam um terno pitagórico? Justifique.

23. Observe o triângulo retângulo *PIA*.



Sabendo que $\overline{PH}$ é a altura relativa à hipotenusa, determine:

a) a medida do cateto $\overline{PI}$. $PI = 8$ cm

b) a medida aproximada h dessa altura. $h \simeq 7,1$ cm

c) as medidas aproximadas m e n das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. $m \simeq 3,8$ cm e $n \simeq 13,2$ cm

22. c) Sim, por exemplo, 1, 1 e $\sqrt{2}$ formam um triângulo retângulo, mas não um triângulo pitagórico, já que $\sqrt{2}$ não é um número natural.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

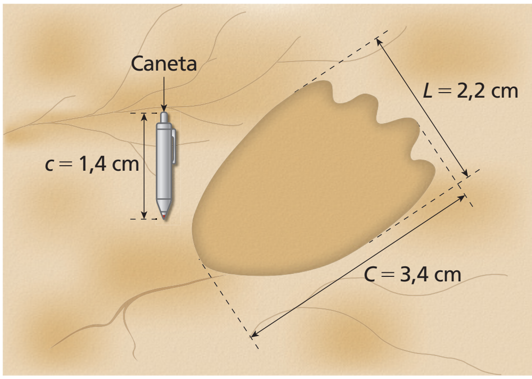
Aplicação

1. (Enem) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete? alternativa c

a) 4,8 e 11,2
b) 7,0 e 3,0
c) 11,2 e 4,8
d) 28,0 e 12,0
e) 30,0 e 70,0

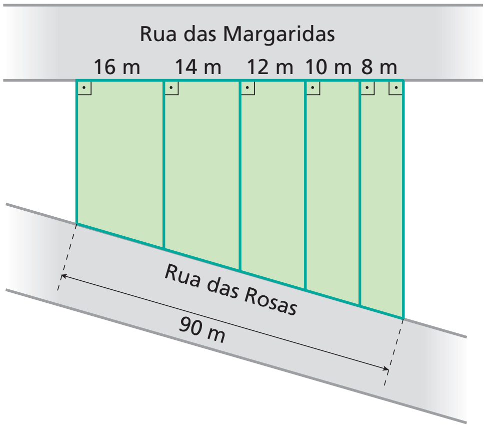
2. Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetro, são, respectivamente, iguais a: alternativa d

a) 4,9 e 7,6
b) 8,6 e 9,8
c) 14,2 e 15,4
d) 26,4 e 40,8
e) 27,5 e 42,5

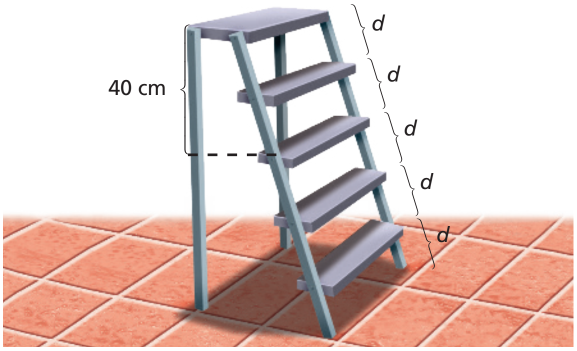
3. Um terreno tem frente para duas ruas e foi dividido em cinco lotes, conforme mostra a figura.



- Determine a medida da frente de cada terreno para a Rua das Rosas. 24 m, 21 m, 18 m, 15 m e 12 m

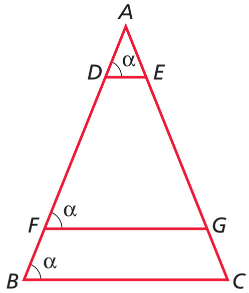
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4. Na escada representada abaixo, os degraus estão separados entre si por uma distância d igual a 25 cm. Calcule a medida da altura dessa escada. 100 cm



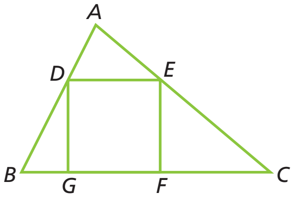
PAULO MANZI

5. (Mackenzie-SP) Na figura, se $AB = 5 \cdot (AD) = 5 \cdot (FB)$, a razão $\frac{FG}{DE}$ vale: alternativa b

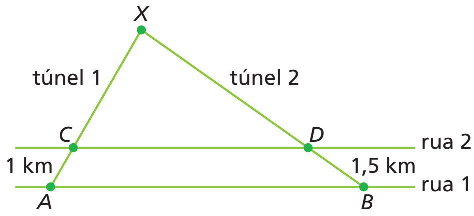


a) 3
b) 4
c) 5
d) $\frac{5}{2}$
e) $\frac{7}{2}$

6. Um quadrado está inscrito em um triângulo como mostra a figura. Calcule a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC sabendo que o perímetro do quadrado inscrito é 19,2 cm e que $BC = 12$ cm. 8 cm



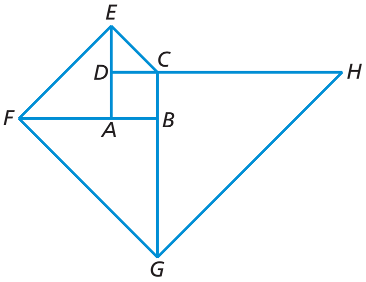
7. (UFV-MG) Sob duas ruas paralelas de uma cidade serão construídos, a partir das estações A e B, passando pelas estações C e D, dois túneis retilíneos, que se encontrarão na estação X, conforme ilustra a figura abaixo.



A distância entre as estações A e C é de 1 km e entre as estações B e D, de 1,5 km. Em cada um dos túneis são perfurados 12 m por dia. Sabendo que o túnel 1 demandará 250 dias para ser construído e que os túneis deverão se encontrar em X, no mesmo dia, é correto afirmar que o número de dias que a construção do túnel 2 deverá anteceder à do túnel 1 é: alternativa e

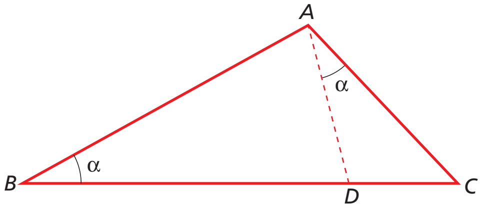
a) 105 **b)** 145 **c)** 135 **d)** 115 **e)** 125

8. (UFBA) Na figura abaixo, todos os triângulos são retângulos isósceles, e *ABCD* é um quadrado.



Nessas condições, determine o quociente $\frac{GH}{CE}$. 4

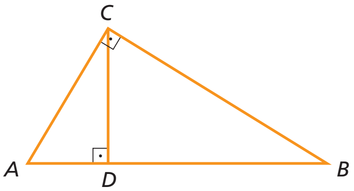
9. (UFS-SE) Na figura, são dados $AC = 8$ cm e $CD = 4$ cm.



A medida de $\overline{BD}$ é, em centímetro: alternativa c

a) 9 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 15 **e)** 16

10. Considere o triângulo *ABC* a seguir.



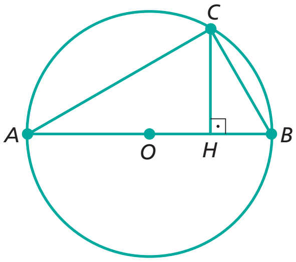
a) O que representa $\overline{CD}$ nesse triângulo? a altura relativa ao lado $\overline{AB}$

b) Mostre que $(CD)^2 = (AD) \cdot (DB)$.
Ver resolução no Guia do professor.

Aprofundamento

11. As bases de um trapézio medem 20 cm e 32 cm, e a altura mede 9 cm. Prolongando os lados não paralelos, obtemos um triângulo. Calcule a medida da altura desse triângulo em centímetro. 24 cm

12. Na figura, $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência de centro *O*. A altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo *ABC* mede 18 cm, e *H* é o ponto médio de $\overline{OB}$. Determine o raio dessa circunferência. $12\sqrt{3}$ cm



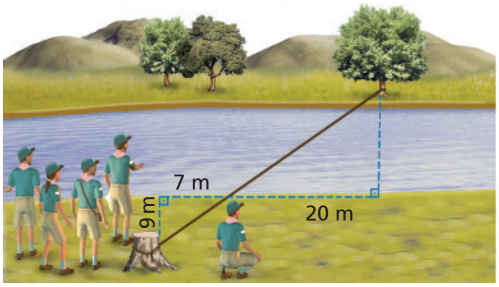
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

13. (UFSCar-SP) Um programa de rádio é gerado em uma cidade plana, a partir de uma central *C* localizada 40 km a leste e 20 km ao norte da antena de transmissão *T*. *C* envia o sinal de rádio para *T*, que em seguida o transmite em todas as direções, a uma distância máxima de 60 km. O ponto mais a leste de *C*, que está 20 km ao norte de *T* e poderá receber o sinal do rádio, está a uma distância de *C*, em km, igual a: alternativa c

a) $20(\sqrt{2}-1)$ **c)** $40(\sqrt{2}-1)$ **e)** $50(2-\sqrt{2})$

b) $30(\sqrt{3}-1)$ **d)** $40(\sqrt{3}-1)$

14. Um grupo de escoteiros deve atravessar um rio caudaloso. Para isso, o melhor nadador deve cruzar o rio com uma corda e amarrá-la do outro lado. Observe a imagem.



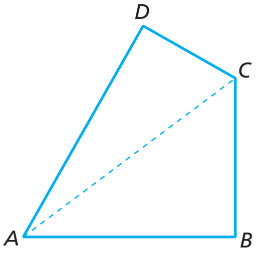
PAULO MANZI

- Qual deve ser o comprimento aproximado da parte esticada da corda? aproximadamente 44 m

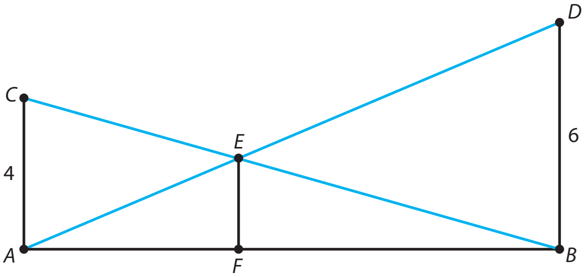
15. (PUC) Na figura, está a planta de um lago poligonal de lados $AB = 2CD$, $BC = 6$ m e $AD = 2\sqrt{21}$ m. Os ângulos internos de vértices *B* e *D* são retos. A medida do segmento $\overline{AC}$, em metro, é: alternativa a

a) 10 **c)** 14

b) 12 **d)** 16



16. (Enem) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos *AC* e *BD* e a haste é representada pelo segmento *EF*, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta *AB*. Os segmentos *AD* e *BC* representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste *EF*?

a) 1 m **c)** 2,4 m **e)** $2\sqrt{6}$ m

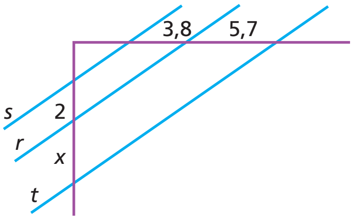
b) 2 m **d)** 3 m alternativa c

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

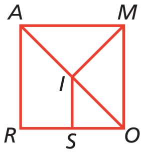
1. Na figura abaixo, as retas *s*, *r* e *t* são paralelas. Os valores indicam as medidas dos segmentos determinados. Quanto vale *x*? alternativa c

- **a)** 1
- **b)** 2
- **c)** 3
- **d)** 1,9



2. No quadrado *AMOR*, o segmento $\overline{MI}$ é parte de uma de suas diagonais. Portanto, é possível afirmar que os pares de polígonos ▬▬▬ são semelhantes. alternativa a

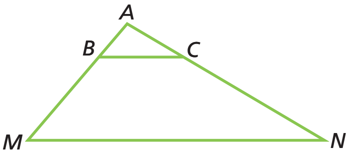
- **a)** *AIM* e *AMO*
- **b)** *ARSI* e *AMOR*
- **c)** *AISOM* e *AISR*
- **d)** *ROIMA* e *MAISO*



3. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois eles: alternativa c

- **a)** são acutângulos.
- **b)** não são retângulos.
- **c)** têm todos os ângulos internos medindo 60°.
- **d)** têm os lados de medidas diferentes.

4. Prolongando-se dois dos lados de um triângulo *ABC* obtém-se uma figura na qual $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ são paralelos.



Se *AB* = 10 cm, *AM* = 35 cm e *AC* = 15 cm, a medida de *CN*, em centímetro, é: alternativa c

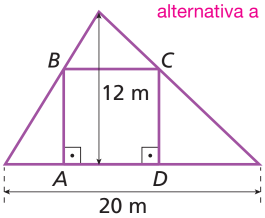
a) 7,5 **b)** 4,5 **c)** 37,5 **d)** 30

5. O Sol projeta no chão plano as sombras de um poste e de uma haste verticais, que medem, respectivamente, 12 m e 0,6 m. Se a altura da haste mede 1 m, a altura do poste é: alternativa d

- **a)** 6 m
- **b)** 7,2 m
- **c)** 12 m
- **d)** 20 m

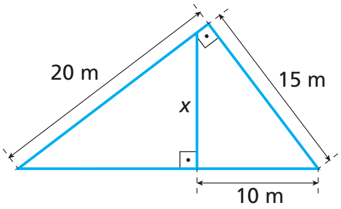
6. Um triângulo com base de 20 m e altura relativa a essa base de 12 m está circunscrito a um quadrado *ABCD*. O lado desse quadrado mede: alternativa a

- **a)** 7,5 m
- **b)** 4,5 m
- **c)** 30 m
- **d)** 18 m



7. Observe a figura. A medida *x* vale: alternativa d

- **a)** 12,75 m
- **b)** 12,25 m
- **c)** 11,75 m
- **d)** 11,25 m



8. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 9 cm e 12 cm. A medida da hipotenusa é ▬▬▬ cm, a medida da altura relativa à hipotenusa é ▬▬▬ cm, e as medidas dos segmentos determinados por essa altura sobre a hipotenusa são ▬▬▬ cm e ▬▬▬ cm. alternativa d

- **a)** 17; 7,2; 7,4; 9,6
- **b)** 15; 5,4; 7,2; 9,6
- **c)** 19; 7,2; 10,6; 8,4
- **d)** 15; 7,2; 5,4; 9,6

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.	X			X				
Identificar figuras planas semelhantes.		X	X	X	X	X	X	
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.					X	X	X	
Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.							X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	214 a 217	218 a 224	221 a 224	214 a 224	221 a 224	221 a 224	221 a 229	228 e 229

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Pesquisa e ação

Maquete

A construção de maquetes é uma atividade que requer conhecimentos de semelhança de figuras e de proporcionalidade. Além da necessidade dos cálculos matemáticos para a definição da escala e das medidas que serão utilizadas na representação, a maquete possibilita uma intervenção criativa, aproveitando materiais recicláveis na sua construção.

FOTOS: VITOR MARIGO/OPÇÃO BRASIL

Os moradores da favela Pereira da Silva, em Laranjeiras, na Zona Sul do Rio de Janeiro, em 1997, com a intenção de desafiar a percepção popular das favelas brasileiras, criaram o Projeto Morrinho, uma ação social e cultural. A principal iniciativa do projeto foi criar uma maquete da favela. Na maquete, que ocupa uma área 350 m^2, tijolos imitam casas, materiais recicláveis pavimentam ruas e compõem a paisagem. Fotos de 2015.

Nesta atividade, vamos construir uma maquete com materiais recicláveis.

Procedimentos

1) Reúna-se com seus colegas em pequenos grupos e definam que espaço será representado na maquete da equipe. Vocês poderão escolher algum ambiente do espaço escolar, como a sala de aula ou a biblioteca. Porém, se preferirem, é possível representar um cômodo da residência de um dos integrantes, como o quarto ou a cozinha.

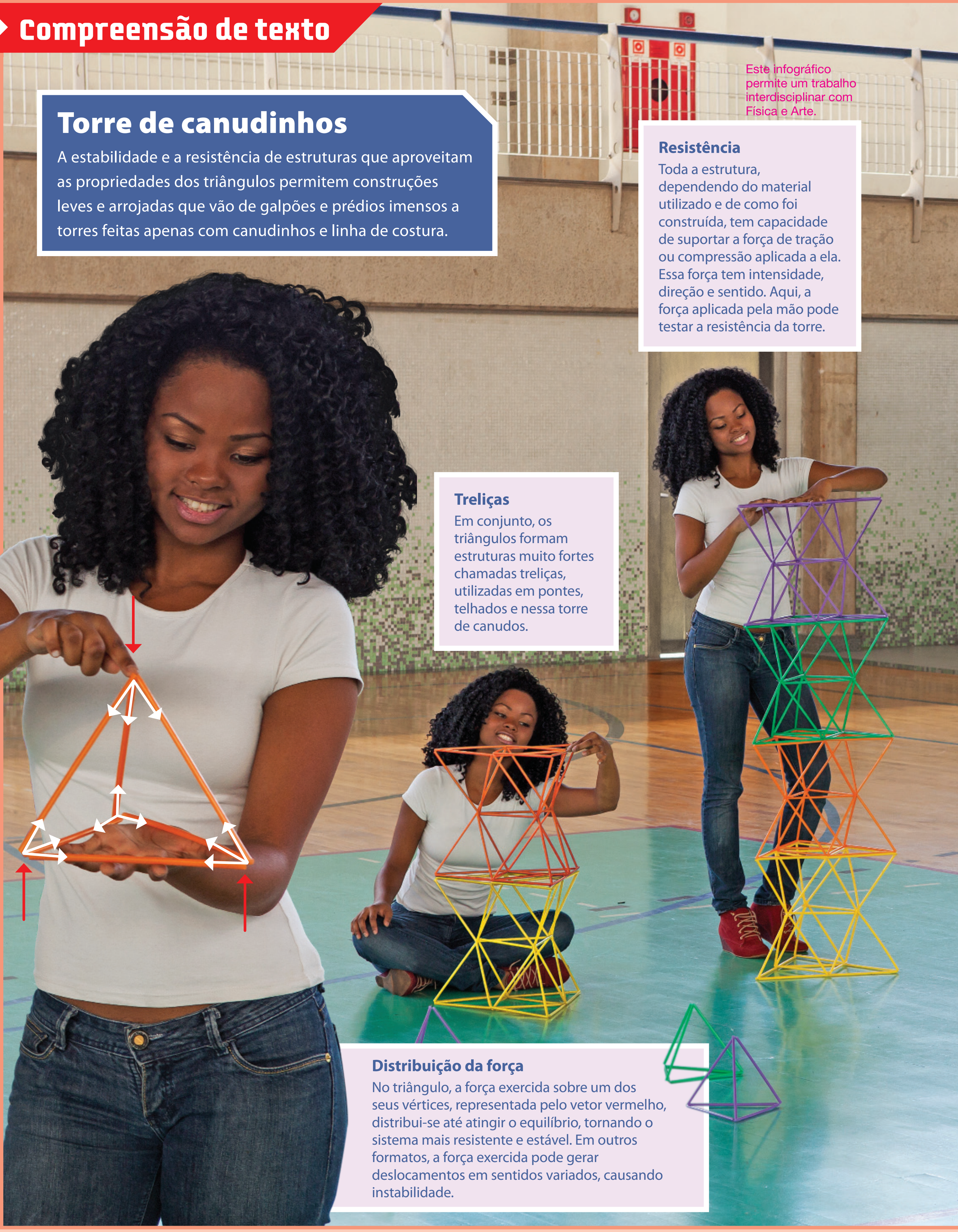
2) Escolhido o local, vocês deverão obter as medidas no ambiente real, com uma trena. É importante medir o comprimento e a largura desse ambiente. Depois, preocupem-se com o mobiliário (mesas, cadeiras etc.). Para que a maquete represente verdadeiramente o ambiente escolhido, é preciso ficar atento aos detalhes: tapetes, vasos e objetos de decoração em geral também são bem-vindos na maquete.

3) A escolha da escala é a etapa mais importante. Ela vai determinar o tamanho da maquete e dos objetos representados nela. Para facilitar, vocês podem montar uma tabela a fim de registrar a medida real e a medida representada na maquete, a partir da escala escolhida, de cada um dos itens selecionados.

4) Escolhida a escala e feitos os cálculos, passa-se à etapa da separação dos materiais e montagem da maquete, que pode ser feita, por exemplo, sobre uma placa de madeira ou isopor. O reaproveitamento de garrafas PET, tampas, caixas de fósforo, embalagens de iogurte, rolos de papel higiênico e de papel toalha, entre outros, tornará sua maquete ecologicamente correta. Se necessário, pintem os objetos com tinta, giz de cera, lápis de cor e canetas hidrográficas. Não se esqueçam de separar cola líquida para este trabalho.

5) Escolham com o professor um espaço de circulação da escola e façam a exposição das maquetes construídas. Se for possível, fotografem o local escolhido para representação e coloquem a fotografia ao lado da maquete. Isso permite ao visitante estabelecer um paralelo entre o espaço real e o espaço representado. E não deixem de informar a escala utilizada.

Compreensão de texto



FOTOS: DOTTA2

Torre de canudinhos

A estabilidade e a resistência de estruturas que aproveitam as propriedades dos triângulos permitem construções leves e arrojadas que vão de galpões e prédios imensos a torres feitas apenas com canudinhos e linha de costura.

Este infográfico permite um trabalho interdisciplinar com Física e Arte.

Resistência

Toda a estrutura, dependendo do material utilizado e de como foi construída, tem capacidade de suportar a força de tração ou compressão aplicada a ela. Essa força tem intensidade, direção e sentido. Aqui, a força aplicada pela mão pode testar a resistência da torre.

Treliças

Em conjunto, os triângulos formam estruturas muito fortes chamadas treliças, utilizadas em pontes, telhados e nessa torre de canudos.

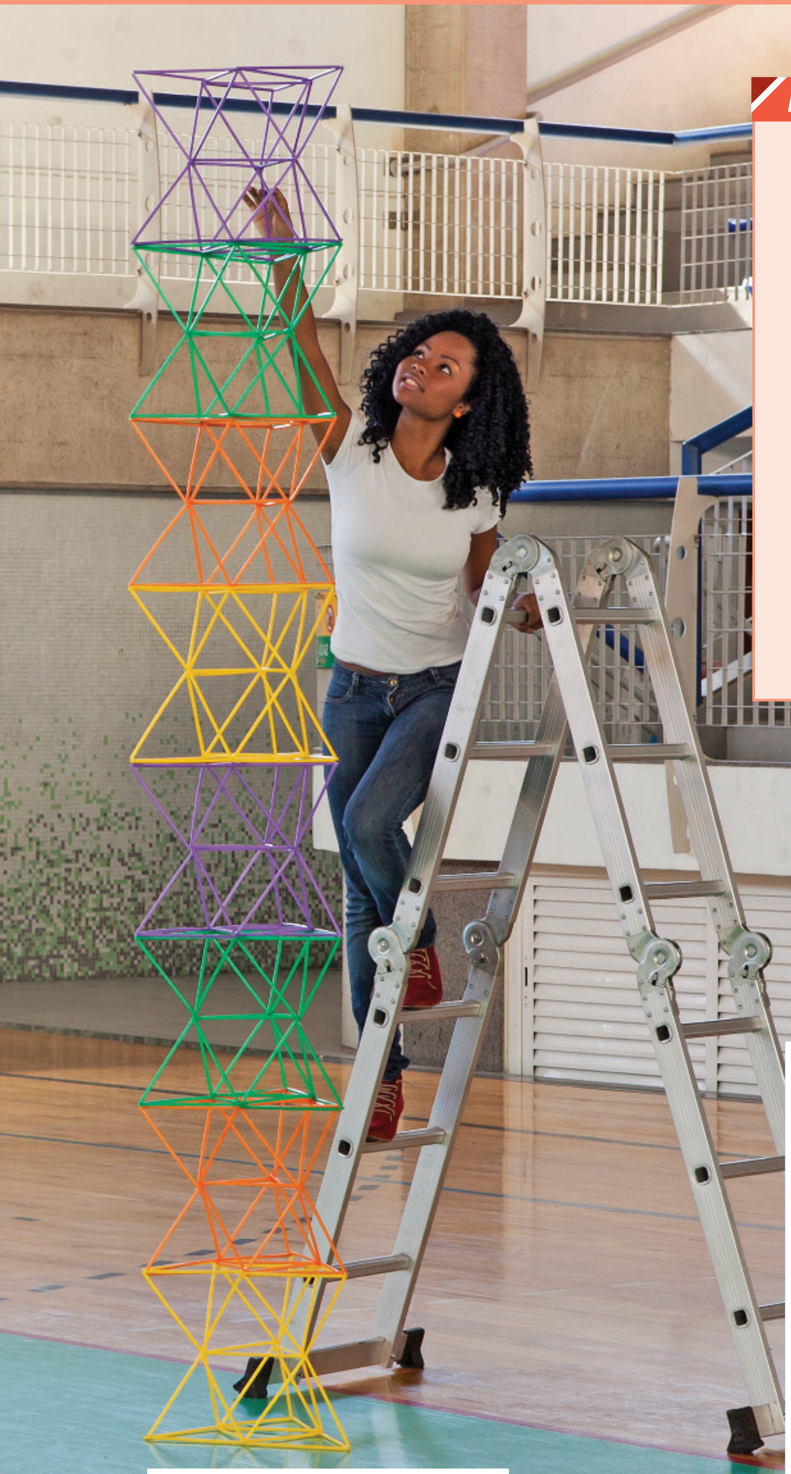
Distribuição da força

No triângulo, a força exercida sobre um dos seus vértices, representada pelo vetor vermelho, distribui-se até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Em outros formatos, a força exercida pode gerar deslocamentos em sentidos variados, causando instabilidade.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. Observe as construções ao redor da sua escola. Desenhe ou tire fotos de estruturas que utilizam triângulos. Pesquise em livros, revistas, jornais, *sites* etc. construções de outras cidades e países que também usam triângulos em suas estruturas. Monte um mural com as diferentes construções encontradas. Por que o triângulo é tão usado nas construções? Ver resolução no Guia do professor.
2. Por que módulos triangulares são mais estáveis do que os módulos quadriláteros?
3. A resistência de uma estrutura depende somente do material utilizado? Justifique.
4. Construa um módulo quadrilátero usando canudos e linha de costura e responda: como poderíamos deixar esse módulo estável? Faça algumas tentativas e compare com os módulos de outros colegas. Ver resolução no Guia do professor.

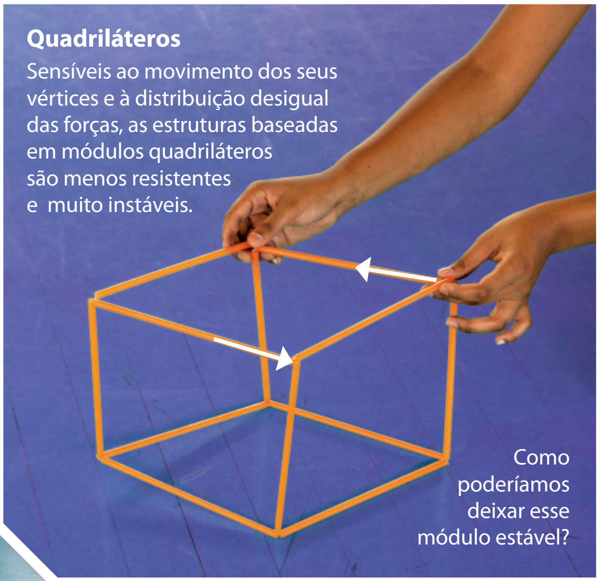


Estabilidade

O triângulo não pode alterar sua forma sem alterar o comprimento dos seus lados; assim, uma estrutura triangular, como a dessa torre, apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamentos pela ação da força aplicada. Outros modelos, como o quadrado, não têm a mesma estabilidade.

Quadriláteros

Sensíveis ao movimento dos seus vértices e à distribuição desigual das forças, as estruturas baseadas em módulos quadriláteros são menos resistentes e muito instáveis.



Como poderíamos deixar esse módulo estável?

Fontes: Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível em: <http://www.ufjf.br/lrm/files/2009/06/concurso-de-estruturas-apostila.pdf>. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Disponível em: <http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano1/mec1/aulas_praticas/elementos_apoio/Sistemas%20articulados%20planos.pdf>. Acessos em: 4 nov. 2015.

2. O triângulo não pode alterar sua forma sem alterar o comprimento de seus lados; assim, um sistema de triângulos apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamento pela ação da força aplicada. A força exercida sobre um dos vértices do triângulo se distribui até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Isso não ocorre com módulos quadriláteros, já que são sensíveis ao movimento dos seus vértices e à distribuição desigual das forças, tornando-os menos resistentes e instáveis.
3. Não. A resistência de uma estrutura depende da força aplicada sobre ela, do material utilizado e de como essa estrutura foi construída.

Capítulo 11

Trigonometria no triângulo retângulo

Essa situação será retomada no exercício complementar 2 da página 248. Se achar conveniente, pode-se realizar um trabalho interdisciplinar com Biologia e Geografia.

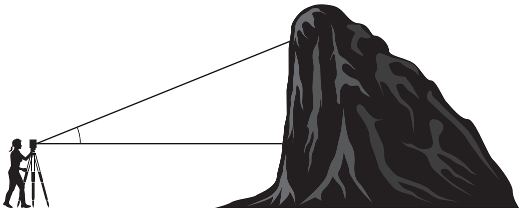
Na foto, de 2013, paredões rochosos na região do Raso da Catarina (BA). As araras utilizam as cavidades naturais desses paredões para fazer ninhos e se reproduzir.

JEKA84/SHUTTERSTOCK

JOÃO MARCOS ROSA/NITRO

JOÃO MARCOS ROSA/NITRO

JOÃO MARCOS ROSA/NITRO



ADILSON SECCO

Pesquisadores podem mapear esses ninhos usando um teodolito (para medir ângulos) e aplicando conceitos de Trigonometria (para determinar sua altura).

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

A arara-azul-de-lear (*Anodorhynchus leari*) é uma ave endêmica do nordeste da Bahia, isto é, só ocorre nessa região. Ela tem até 75 cm de comprimento e pesa cerca de 940 g, quando adulta. Atualmente, a espécie está ameaçada de extinção.

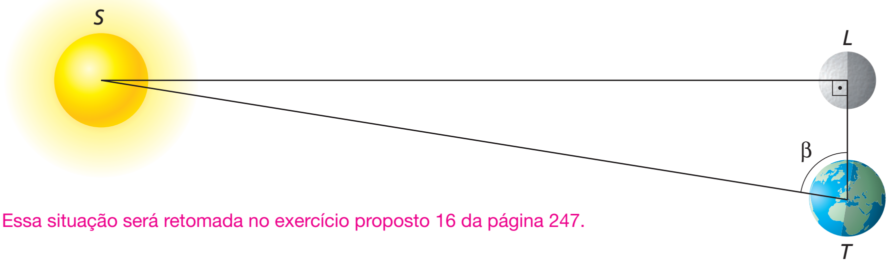
Objetivos do capítulo

- Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.
- Obter razões trigonométricas em uma tabela trigonométrica e na calculadora.

Resolver problemas de Astronomia, como descobrir a distância entre a Terra, o Sol e a Lua, sempre despertou o interesse do ser humano. Desse tipo de especulação nasceu a Trigonometria, parte da Matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

O grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da História, usou as ideias da Trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua.

Seus cálculos partiram da observação de que, quando a Lua está no quarto crescente – ocasião em que exatamente metade dela aparece iluminada pelo Sol –, o ângulo $\hat{L}$, do triângulo formado entre o Sol (S), a Terra (T) e a Lua (L), mede 90°, conforme esquema abaixo.



ADILSON SECCO

Essa situação será retomada no exercício proposto 16 da página 247.

Aplicando os conhecimentos da época, Aristarco observou que o ângulo β, formado entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua, media 87°. A partir disso, com base em conceitos trigonométricos, concluiu que a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua $\left(\frac{TS}{TL}\right)$ estaria entre 18 e 20, o que significa que a distância Terra-Sol era 18 a 20 vezes a distância Terra-Lua.

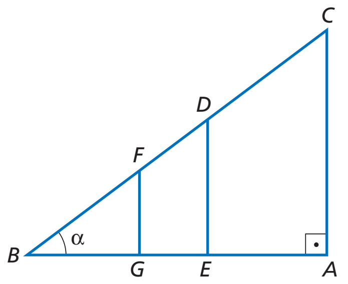
Hoje, sabemos que a distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes a distância Terra-Lua. A grande diferença entre esse valor e o encontrado por Aristarco está relacionada ao ângulo β, cuja medida correta é de aproximadamente 89,83°. Mesmo assim, o raciocínio de Aristarco foi perfeito.

Neste capítulo, estudaremos conceitos básicos da Trigonometria no triângulo retângulo e veremos que ela tem grande aplicação no cálculo de distâncias inacessíveis: na Astronomia, como fez Aristarco; na Topografia, para determinar a altura de morros, montanhas e colinas; na Engenharia, para estabelecer o comprimento de uma rampa etc.

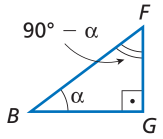
1 Razões trigonométricas

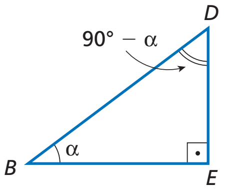
Com base no conceito de semelhança de triângulos, veremos que, dados dois ou mais triângulos retângulos semelhantes, as razões entre as medidas de seus lados são constantes. Algumas dessas constantes são chamadas de **razões trigonométricas**.

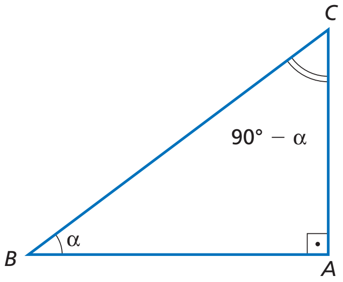
Considere o triângulo *ABC* abaixo, retângulo em *A*, e os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$, paralelos a $\overline{CA}$.



Os triângulos *BFG*, *BDE* e *BCA* são semelhantes, pois têm ângulos correspondentes congruentes, conforme mostram as figuras abaixo.







A semelhança dos triângulos *BFG*, *BDE* e *BCA* permite que escrevamos as seguintes proporções:

$$\frac{FG}{BF} = \frac{DE}{BD} = \frac{CA}{BC}$$

As razões entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa do triângulo são iguais a uma constante, que é chamada de **seno do ângulo α**.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Do mesmo modo, podemos dizer que: $\frac{BG}{BF} = \frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$

As razões entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo α e da hipotenusa do triângulo são chamadas de **cosseno do ângulo α**.

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

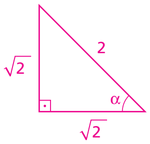
Igualmente, podemos escrever: $\frac{FG}{BG} = \frac{DE}{BE} = \frac{CA}{BA}$

As razões entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e do cateto adjacente ao mesmo ângulo são chamadas de **tangente do ângulo α**.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

As razões sen α, cos α e tg α são conhecidas como **razões trigonométricas**.

Sim, pois a medida de um dos lados pode ser irracional, por exemplo:



Nesse caso, sen α é o número irracional $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

◆ Reflita

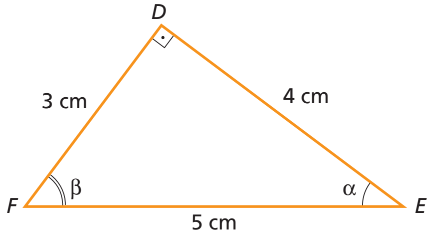
O seno, o cosseno e a tangente são razões, ou seja, divisões de duas medidas. Esses valores podem ser números irracionais? Justifique.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

ADILSON SECCO

Exemplo

No triângulo retângulo *DEF* representado abaixo, α e β são ângulos agudos, $\overline{DF}$ é o cateto oposto ao ângulo α e $\overline{DE}$ é o cateto adjacente ao ângulo α.



Considerando o ângulo α, aplicando as definições, podemos escrever:

- $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$
- $\cos \alpha = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Em relação ao ângulo agudo β, o cateto oposto é $\overline{DE}$ e o cateto adjacente é $\overline{DF}$. Aplicando as definições, obtemos:

- $\text{sen}\ \beta = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$
- $\cos \beta = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$
- $\text{tg}\ \beta = \dfrac{4}{3} \simeq 1{,}33$

As razões trigonométricas são úteis para descobrir medidas desconhecidas de um triângulo retângulo, como veremos nos exercícios resolvidos **R2** e **R3**.

É verdadeira, pois, como são razões entre medidas de lados de um triângulo, devem ser maiores que zero. E, como no denominador dessas razões está a medida da hipotenusa, que é o maior lado de um triângulo retângulo, o valor sempre será um número menor que 1.

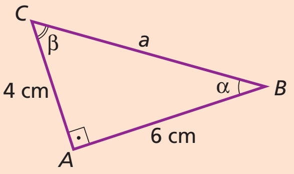
◆ Reflita

Considere a afirmação: o seno e o cosseno de um ângulo agudo é sempre um número maior que zero e menor que 1.

Ela é verdadeira? Explique.

Exercícios resolvidos

R1. Determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 4 cm.



▸ ***Resolução***

Para o cálculo do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos α e β, é necessário determinar a medida *a* da hipotenusa. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$a^2 = 36 + 16 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$

Agora, podemos calcular as razões:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \qquad \cos \beta = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{sen}\ \beta = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{6}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \qquad \text{tg}\ \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

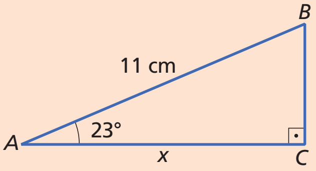
◆ Reflita

Quais relações podemos estabelecer entre os valores obtidos no exercício ao lado?

Espera-se que os alunos percebam as seguintes relações:
sen α = cos β
cos α = sen β
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\ \beta}$

O objetivo desta atividade é instigar os alunos a descobrir algumas relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares, que serão estudadas no próximo item.

R2. Determinar a medida do lado $\overline{AC}$ do triângulo retângulo representado ao lado. (*Considerar*: sen 23° = 0,39; cos 23° = 0,92; tg 23° = 0,42)



▸ ***Resolução***

Para facilitar os cálculos, os valores das razões foram aproximados.

Pela figura, temos a medida da hipotenusa e queremos encontrar a medida do cateto adjacente ao ângulo de 23°. A razão trigonométrica que relaciona essas duas medidas é o cosseno de 23°.

Como cos 23° = 0,92 e $\cos 23° = \dfrac{x}{11}$, temos:

$0{,}92 = \dfrac{x}{11} \Rightarrow x = 11 \cdot 0{,}92 \Rightarrow x = 10{,}12$

Portanto, o lado $\overline{AC}$ mede 10,12 cm.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

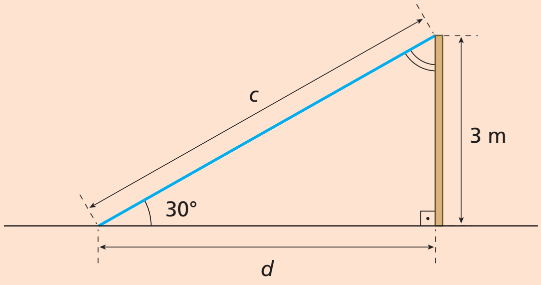
R3. Na dança folclórica de trança-fitas, usa-se um mastro com, geralmente, 3 metros de altura. Para certa passagem da dança, precisa-se que o ângulo formado entre a fita esticada (com a ponta no chão) e a horizontal tenha 30°. Sabendo que sen 30° = 0,5, determinar o comprimento da fita e a distância dessa ponta ao mastro.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Grupo de dança folclórica de trança-fitas, na festa do Divino de São Luiz do Paraitinga, SP, 2013.

▸ *Resolução*

No esquema a seguir, *c* representa o comprimento da fita, e *d*, a distância pedida.



Considerando as informações apresentadas, podemos escrever:

$\text{sen } 30° = \dfrac{3}{c}$

Substituindo sen 30° por 0,5, obtemos o valor de *c*:

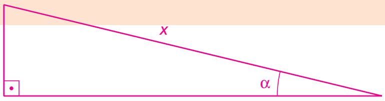
$\dfrac{3}{c} = 0{,}5 \Rightarrow c = 6$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow d^2 = 27 \Rightarrow d = 3\sqrt{3} \Rightarrow d \simeq 5{,}2$

Portanto, a fita tem 6 metros de comprimento e sua ponta está a 5,2 metros do mastro, aproximadamente.

5. a)



ADILSON SECCO

Exercícios propostos

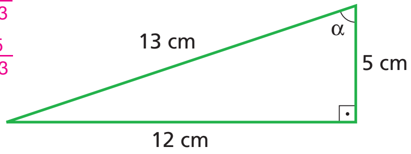
Registre as respostas em seu caderno

1. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α do triângulo retângulo representado abaixo.

$\text{sen } \alpha = \dfrac{12}{13}$

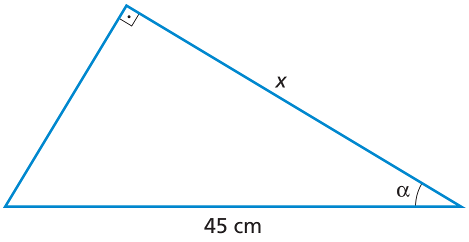
$\cos \alpha = \dfrac{5}{13}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{12}{5}$

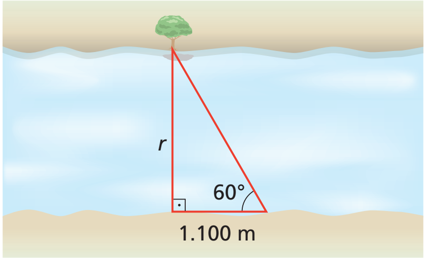


2. Em um triângulo *ABC*, retângulo em *C*, o cateto oposto ao vértice *A* mede 8 cm e a hipotenusa mede 12 cm. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo $\hat{A}$. $\text{sen } \hat{A} = \dfrac{2}{3}$; $\cos \hat{A} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\text{tg } \hat{A} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

3. No triângulo retângulo representado a seguir, considere sen α = 0,6, cos α = 0,8 e tg α = 0,75. Calcule *x*. 36 cm



4. Na região do município de Óbidos, no Pará, encontra-se a garganta mais estreita do rio Amazonas. De um ponto na margem esquerda avista-se, perpendicularmente, certa árvore na outra margem. Caminhando 1.100 m pela margem esquerda, avista-se a mesma árvore sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.



Sabendo que tg 60° ≃ 1,7321, calcule a largura aproximada do rio Amazonas nesse local. ≃ 1.905 m

5. Um avião levanta voo sob um ângulo α. Depois de percorrer uma distância *x*, em quilômetro, ele atinge 4 km de altura.

a) Faça um esquema dessa situação.

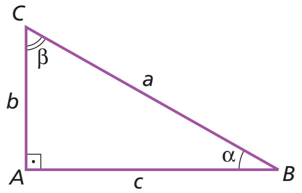
b) Calcule a distância *x*. (*Dados*: sen α = 0,1045; cos α = 0,9945; tg α = 0,1051) ≃ 38,3 km

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

1.1 Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Seno e cosseno de ângulos complementares

Considere o triângulo *ABC*, retângulo em *A*, e todas as razões trigonométricas que envolvem os ângulos agudos α e β.



- $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$
- $\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$
- $\cos \beta = \frac{b}{a}$
- $\cos \alpha = \frac{c}{a}$
- $\text{sen } \beta = \frac{c}{a}$
- $\text{tg } \beta = \frac{c}{b}$

Com base nas razões acima, vamos estabelecer algumas relações importantes.

Note que os ângulos agudos α e β são complementares; portanto, podemos escrever β em função de α, ou seja, $\beta = 90° - \alpha$.

Observe que $\frac{b}{a} = \text{sen } \alpha = \cos \beta$. Como $\beta = 90° - \alpha$, concluímos que:

$$\text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$$

Observe também que $\frac{c}{a} = \cos \alpha = \text{sen } \beta$.

Substituindo $\beta = 90° - \alpha$ nessa igualdade, concluímos que:

$$\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$$

Relação fundamental da Trigonometria

Sendo α um ângulo agudo, a equação abaixo, conhecida como **relação fundamental da Trigonometria**, é sempre válida:

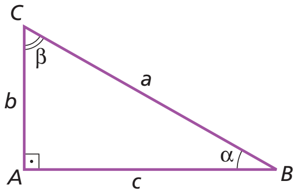
$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Demonstração

No triângulo *ABC*, representado ao lado, sabemos que $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos \alpha = \frac{c}{a}$. Assim:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \text{ (I)}$$



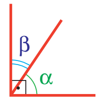
Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo *ABC* temos: $a^2 = b^2 + c^2$ (II)

De (I) e (II), podemos escrever: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Portanto, quaisquer que sejam as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, vale a igualdade: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Observação

Ângulos complementares são ângulos cuja soma de suas medidas resulta em 90°.

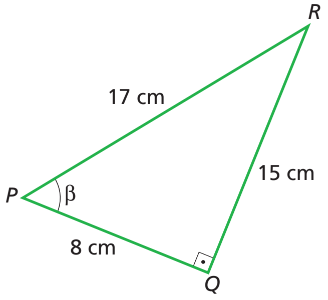


$\alpha + \beta = 90°$

Escrevendo β em função de α:
$\beta = 90° - \alpha$

Explore

Dado o triângulo abaixo, verifique que $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$.



$\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 =$

$= \frac{225}{289} + \frac{64}{289} = \frac{289}{289} = 1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

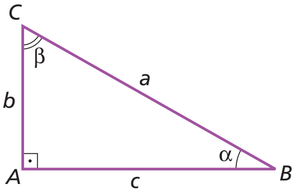
Relação entre o seno, o cosseno e a tangente

Agora, vamos demonstrar a equação abaixo, que relaciona o seno e o cosseno do ângulo agudo α com sua tangente.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

Demonstração

No triângulo *ABC*, sabemos que $\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{a}$, $\cos\ \alpha = \frac{c}{a}$ e $\text{tg}\ \alpha = \frac{b}{c}$.



Escrevendo *b* em função de sen α, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \text{sen}\ \alpha \ \text{(I)}$$

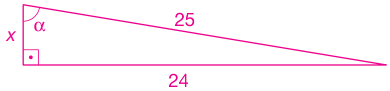
Também podemos escrever *c* em função de cos α:

$$\cos\ \alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos\ \alpha \ \text{(II)}$$

Substituindo (I) e (II) na razão que fornece a tangente de α, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{a \cdot \text{sen}\ \alpha}{a \cdot \cos\ \alpha} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

7. a)



$x^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Logo, $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ e $\text{tg}\ \alpha = \frac{24}{7}$.

6.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	0,3640
70°	0,9397	0,3420	2,7475
50°	0,7660	0,6428	1,1918
40°	0,6428	0,7660	0,8391

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

6. Copie a tabela abaixo em seu caderno, preenchendo as lacunas com as informações que faltam. (Você pode usar uma calculadora, mas não use as funções "sin", "cos" ou "tan" da calculadora.)

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	
70°			
50°			
40°	0,6428		0,8391

MODELO

7. Seja α a medida de um ângulo agudo. Sabendo que $\text{sen}\ \alpha = \frac{24}{25}$, vamos calcular o cosseno e a tangente desse ângulo de dois modos diferentes.

a) Siga os passos abaixo.
- Desenhe um triângulo retângulo, de modo que um de seus ângulos internos seja α.
- Depois, com base no valor de sen α, escreva as medidas da hipotenusa e de um dos catetos.
- Agora, calcule a medida do outro cateto.
- Finalmente, calcule cos α e tg α.

b) A partir da relação fundamental da Trigonometria ($\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$), calcule cos α. Depois, calcule tg α.

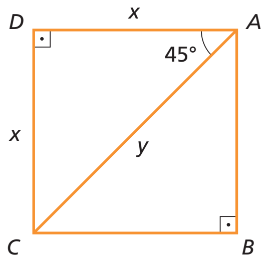
7. b) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{576}{625} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{49}{625} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{25}$

Temos: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

2 Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

Na Trigonometria, os ângulos de 30°, 45° e 60° são conhecidos como **ângulos notáveis**, pois facilmente obtemos os valores do seno, do cosseno e da tangente desses ângulos. Acompanhe a seguir.

Ângulo de 45°



Considere o triângulo retângulo *ACD* representado ao lado, obtido da divisão do quadrado *ABCD* por sua diagonal $\overline{AC}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos $y^2 = x^2 + x^2$, ou seja, $y = x\sqrt{2}$.

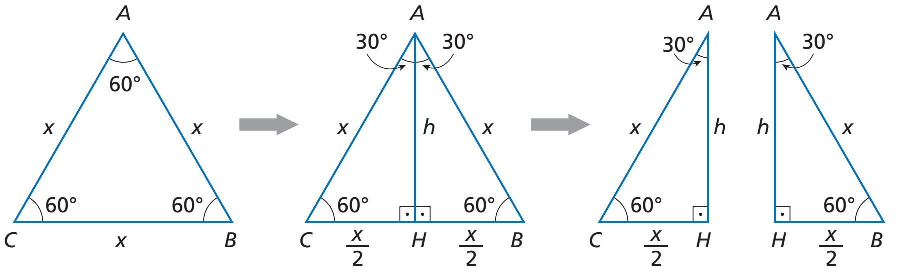
De acordo com as definições, temos:

- $\text{sen}\ 45° = \cos\ 45° = \frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg}\ 45° = \frac{x}{x} = 1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

◆ Ângulos de 30° e 60°

Agora, considere o triângulo equilátero *ABC* dividido pela sua altura $\overline{AH}$ em dois triângulos: *ACH* e *ABH*.



◆ Observação

A **altura** de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um dos lados desse triângulo, tendo uma das extremidades nesse lado e a outra no vértice oposto a esse lado.

Aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos obtidos, por exemplo no triângulo *ACH*, temos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Então, de acordo com as definições:

- $\text{sen } 60° = \dfrac{h}{x} = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 60° = \dfrac{h}{\frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$

- $\text{sen } 30° = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{h}{x} = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30° = \dfrac{\frac{x}{2}}{h} = \dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Os resultados obtidos, que são frequentemente usados em problemas de Trigonometria, podem ser organizados na seguinte tabela:

	30°	**45°**	**60°**
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Nos próximos exercícios, vamos usar esses valores.

◆ Explore

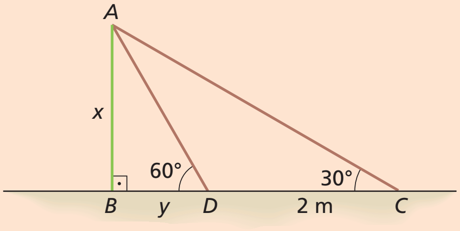
Considerando os valores da tabela e usando uma calculadora simples, obtenha uma aproximação, com três casas decimais, para:

- sen 45° 0,707
- cos 30° 0,866
- tg 30° 0,577

Com esta atividade, espera-se que os alunos se familiarizem a calcular aproximações das razões trigonométricas dos ângulos notáveis, as quais serão bastante usadas nos exercícios contextualizados.

Exercício resolvido

R4. Uma pequena árvore, cuja altura está representada por *x*, ao ser replantada, foi escorada por duas vigas de madeira, como mostra o esquema.



Determinar *x* e *y*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Resolução

Analisando o triângulo *ABC*, observamos que podemos usar a tangente de 30°, pois ela relaciona *x* (medida do cateto oposto ao ângulo de 30°) com $y + 2$ (medida do cateto adjacente ao ângulo de 30°):

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{y+2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y+2} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \quad \text{(I)}$$

Agora, analisando o triângulo *ABD*, observamos que podemos usar a tangente de 60°, pois ela relaciona *x* (medida do cateto oposto ao ângulo de 60°) com *y* (medida do cateto adjacente ao ângulo de 60°):

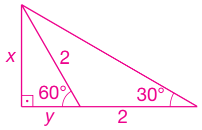
$$\text{tg } 60° = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{3} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos: $y\sqrt{3} = \dfrac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = 1$

Como $x = y\sqrt{3}$, temos $x = \sqrt{3}$.

Assim, $x = \sqrt{3}$ m e $y = 1$ m.

Como o triângulo *ADC* é isósceles, temos *AD* = *DC* = 2.



ADILSON SECCO

$\text{sen } 60° = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 1$

Aqui, é um bom momento para enfatizar que sempre convém examinar se há mais de uma maneira de resolver um dado exercício.

◆ Reflita

Considerando o fato de que o triângulo *ADC* é isósceles, resolva o exercício **R4** de uma maneira diferente da que foi apresentada.

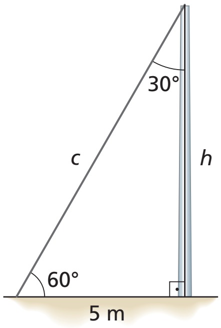
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

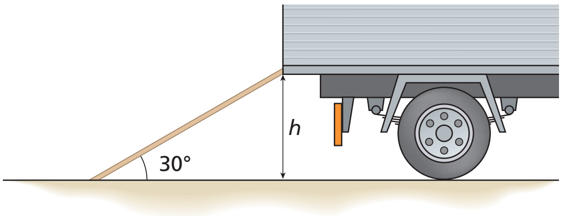
8. Uma das extremidades de um cabo de aço está presa ao topo de um poste, formando com este um ângulo de 30°, enquanto a outra extremidade está fixada no chão a 5 m do pé do poste. Considerando essas informações, determine:

a) o comprimento do cabo de aço. $c = 10$ m

b) a altura do poste. $h \simeq 8{,}7$ m

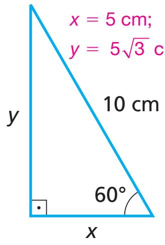


9. Um ajudante de pedreiro estava descarregando areia de um caminhão através de uma rampa de madeira apoiada à caçamba. Se a rampa tem 3 m de comprimento e forma com o solo um ângulo de 30°, qual é a altura entre a caçamba e o solo, representada por *h*? 1,5 m



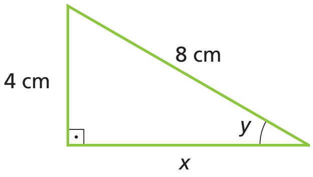
10. Determine *x* e *y* nos seguintes triângulos:

a)



$x = 5$ cm; $y = 5\sqrt{3}$ cm

b)

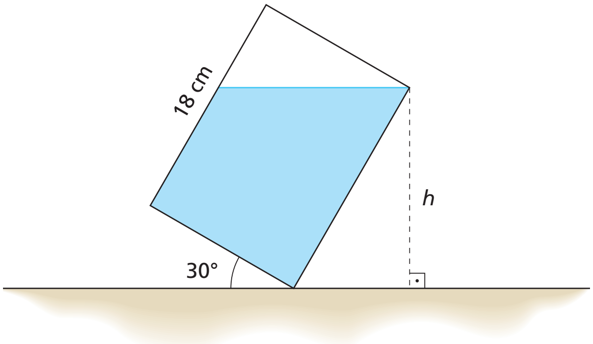


$x = 4\sqrt{3}$ cm; $y = 30°$

11. Um triângulo equilátero tem 18 cm de altura. Determine a medida aproximada de seus lados. ≃ 20,8 cm

12. Uma antena de 15 m de altura é presa ao chão por quatro cabos de aço. O ângulo que cada um deles forma com a ponta da antena mede 45°. Quantos metros de cabo de aço foram usados, aproximadamente, para prender essa antena? ≃ 85 m

13. Um recipiente com forma de bloco retangular, com 18 cm de altura, foi tombado, como mostra a figura.



Determine a altura aproximada *h* entre o solo e o nível da água contida no recipiente tombado. ≃ 15,6 cm

14. (Vunesp) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30°. Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45°. A altura aproximada da torre, em metro, é: alternativa c

a) 44,7
b) 48,8
c) 54,6
d) 60,0
e) 65,3

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

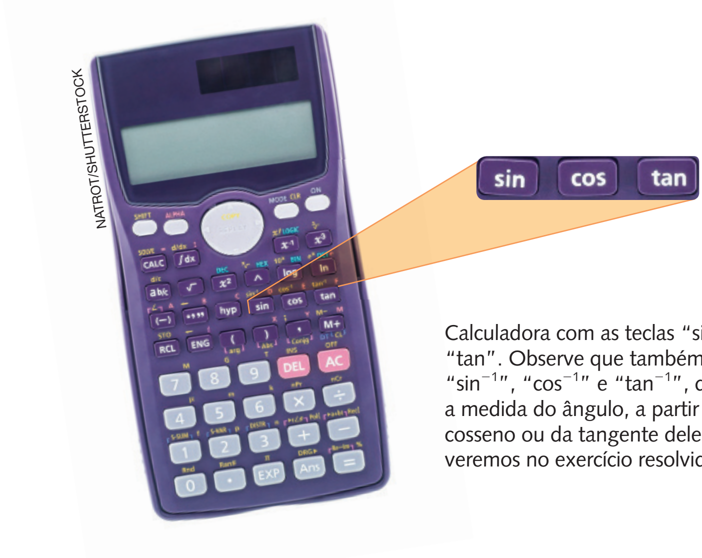
3 O uso da calculadora e da tabela trigonométrica

Vimos que as razões trigonométricas dos ângulos notáveis são valores conhecidos e que, para obter aproximações, basta usar uma calculadora simples.

Mas como obtemos as razões trigonométricas de outros ângulos agudos?

Esses valores podem ser encontrados em tabelas trigonométricas, que contêm as razões trigonométricas de diversos ângulos agudos (veja na próxima página). Elas foram desenvolvidas inicialmente por astrônomos da Antiguidade, devido à necessidade de usar esses valores em seus estudos. Hiparco de Niceia (190 a.C.-120 a.C.) é considerado o "pai da Trigonometria", por ter construído a primeira tabela trigonométrica que conhecemos, com base em conhecimentos babilônicos.

No entanto, após a invenção e a difusão de calculadoras, essas tabelas passaram a ser menos usadas. Atualmente, podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente de ângulos em calculadoras científicas, em computadores e até mesmo em alguns celulares.



NATROT/SHUTTERSTOCK

Calculadora com as teclas "sin", "cos" e "tan". Observe que também há as funções "$\sin^{-1}$", "$\cos^{-1}$" e "$\tan^{-1}$", que fornecem a medida do ângulo, a partir do seno, do cosseno ou da tangente dele, conforme veremos no exercício resolvido **R6**.

Exemplos

a) Vamos calcular sen 53° na calculadora.

Primeiro, verificamos se a opção "graus" está selecionada para a calculadora reconhecer 53 como 53°. Em geral, essa opção é indicada por $\boxed{\text{deg}}$, que significa "grau" (grau, em inglês, é *degree*).

Em seguida, digitamos: $\boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{sin}}\ \boxed{=}$

Aparecerá o valor 0,7986355, que é o valor aproximado de sen 53°.

b) Para calcular cos 12°, apertamos: $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{cos}}\ \boxed{=}$

E concluímos que: cos 12° $\simeq$ 0,9781476

c) Para calcular tg 73°, apertamos: $\boxed{7}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{tan}}\ \boxed{=}$

Assim: tg 73° $\simeq$ 3,2708526

◆ Explore

Usando uma calculadora científica, calcule cos α (escolha α, sendo $0° < \alpha < 90°$). Em seu caderno, anote o valor obtido com aproximação de quatro casas decimais. Em seguida, calcule sen α e divida-o por cos α. Verifique que o quociente obtido é uma aproximação de tg α. resposta pessoal

◆ Observações

1. Normalmente, as calculadoras oferecem três opções para as unidades de medida dos ângulos: $\boxed{\text{deg}}\ \boxed{\text{rad}}\ \boxed{\text{grad}}$
   Por isso, é importante verificar se a opção $\boxed{\text{deg}}$ está selecionada.
2. Em algumas calculadoras, dependendo do modelo, o procedimento pode ser outro: primeiro apertamos a tecla $\boxed{\text{sin}}$, em seguida digitamos 53 e por último apertamos $\boxed{=}$.
3. O número de casas decimais que aparecerá para sen 53° vai depender da capacidade máxima de dígitos do visor da calculadora, já que o valor é uma aproximação de um número irracional, com infinitas casas decimais não periódicas.

Tabela de razões trigonométricas

A tabela a seguir apresenta aproximações para as razões trigonométricas com quatro casas decimais.

Tabela de razões trigonométricas

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	4,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

Observação

Note que, para $0° < x < 90°$, um aumento na medida do ângulo x implica aumento do sen x, diminuição do cos x e aumento da tg x.

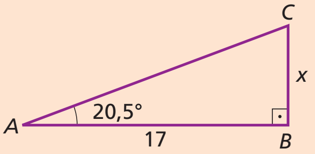
Reflita

Sendo x e y ângulos disponíveis na tabela, você percebe alguma relação entre x e y para que sen x = cos y?

Para que sen x = cos y, devemos ter $x + y = 90°$, isto é, x e y devem ser ângulos complementares.
Avaliar a conveniência de explorar mais a tabela pedindo aos alunos que, usando uma calculadora, verifiquem que tg x é o inverso de tg y, quando $x + y = 90°$.

Exercícios resolvidos

R5. Calcular x no triângulo ABC.



▶ Resolução

De acordo com a figura, temos:

$$\text{tg } 20{,}5° = \frac{x}{17}$$

Em uma calculadora, obtemos

$\text{tg } 20{,}5° \simeq 0{,}37$. Assim: $0{,}37 \simeq \frac{x}{17} \Rightarrow x \simeq 6{,}29$

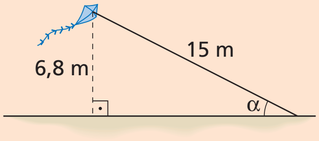
◆ Reflita

Como você usaria a tabela trigonométrica para obter tg 20,5°?

Na tabela trigonométrica, não há o ângulo de medida 20,5°. No entanto, espera-se que os alunos observem os valores:
- tg 20° = 0,3640
- tg 21° = 0,3839

E concluam que a tg 20,5° está entre esses valores, ou seja, é aproximadamente 0,37.

R6. Um fio de 15 m de comprimento, esticado, eleva uma pipa até a altura de 6,8 m. Determinar a medida do ângulo formado pelo fio com o solo.



▶ Resolução

Pelo enunciado: $\text{sen } \alpha = \frac{6{,}8}{15} \Rightarrow \text{sen } \alpha \simeq 0{,}4533$

Na calculadora científica, temos as teclas:

- sin, que, dada a medida do ângulo, calcula o valor de seu seno;
- sin^{-1}, que, dado o valor do seno, calcula a medida do ângulo agudo.

Então, para descobrir a medida α, digitamos 0,4533 e apertamos sin^{-1}, obtendo 26,955606.

Logo, o fio forma um ângulo de aproximadamente 27° com o solo.

◆ Explore

Resolva este exercício usando a tabela trigonométrica da página anterior.

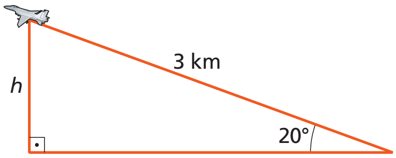
Espera-se que os alunos procurem na tabela trigonométrica, na coluna dos senos, o valor mais próximo de 0,4533. Eles encontrarão 0,4540, que é o seno de 27°.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

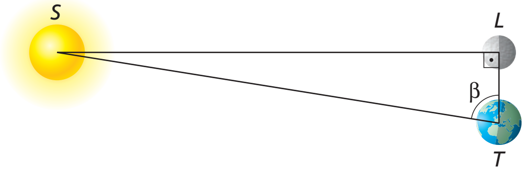
Nos exercícios a seguir, utilize uma calculadora ou a tabela trigonométrica da página anterior para obter os valores necessários para a resolução.

15. Ao levantar voo, um avião faz ângulo constante de 20° com a horizontal, conforme mostra a figura.



Calcule a altura em que ele estará após percorrer 3 km. ≃ 1,026 km

16. Vamos voltar à ideia de Aristarco, vista na página 237. Quando a Lua está no quarto crescente, um triângulo retângulo LTS é formado entre a Lua, a Terra e o Sol, conforme mostra a figura.



Sabendo que o ângulo β mede aproximadamente 89,83° e considerando que TL = 380.000 km, determine:

a) a medida TS. ≃ 131.034.482 km

b) a razão $\frac{TS}{TL}$. ≃ 345

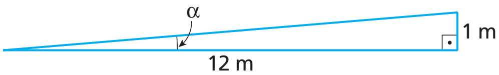
17. Na construção civil, existem diversas regras de acessibilidade para deficientes.

BRANDX/GETTY IMAGES

Uma delas é que a rampa de acesso tenha inclinação máxima de 8,33%. Isso significa que, a cada 1 m de altura, deve-se ter, no mínimo, 12 m de afastamento horizontal a partir do início da rampa. (Note que 1 : 12 ≃ 0,0833 = 8,33%.)

Considerando uma rampa com inclinação máxima, responda às questões a seguir.

a) Qual é a medida do ângulo formado entre a rampa e a horizontal? (Considere o número inteiro mais próximo.) ≃ 5°



b) Para um desnível de 3 m entre dois andares, quantos metros lineares de rampa devem ser construídos? ≃ 34,4 m

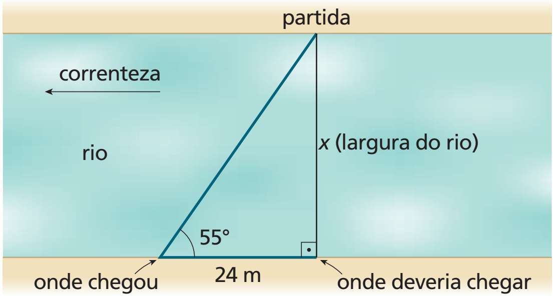
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Um barqueiro pretendia ir de uma margem à outra de um rio pela travessia mais curta possível. No entanto, a correnteza o arrastou 24 m, conforme mostra a figura.

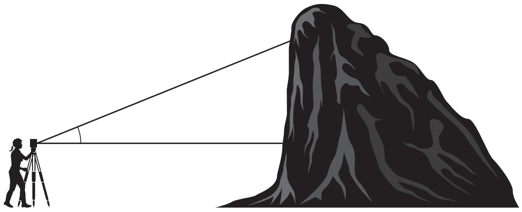


Calcule a largura do rio. (*Dados*: sen 55° $\simeq$ 0,8192; cos 55° $\simeq$ 0,5736; tg 55° $\simeq$ 1,4281) $\simeq$ 34,27 m

2. Lílian é bióloga e trabalha na Bahia, em um projeto de conservação da arara-azul-de-lear. Uma de suas tarefas é mapear os ninhos dessas araras.

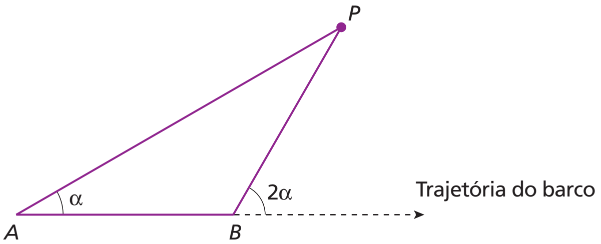
FABIO COLOMBINI

Lílian avistou um ninho e, com um teodolito, mediu o ângulo formado entre a linha de visão e a horizontal, obtendo 22°.



Sabendo que Lílian tem 1,6 m de altura e estava a 80 m do paredão, qual é a altura do ninho das araras? (*Dados*: sen 22° $\simeq$ 0,3746; cos 22° $\simeq$ 0,9272; tg 22° $\simeq$ 0,4040) $\simeq$ 33,92 m

3. (Enem) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto *A*, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo *P* da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto *B* de modo que fosse possível ver o mesmo ponto *P* da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação.

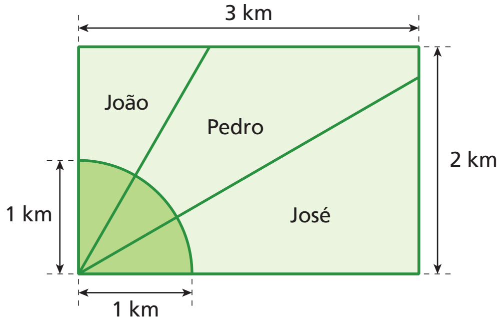


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto *B*, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2.000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo *P* será: alternativa b

a) 1.000 m
b) $1.000\sqrt{3}$ m
c) $2.000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m
d) 2.000 m
e) $2.000\sqrt{3}$ m

4. (Enem) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km × 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

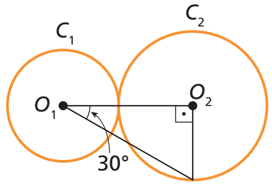


Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a: alternativa e

$\left(\text{considere } \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58\right)$

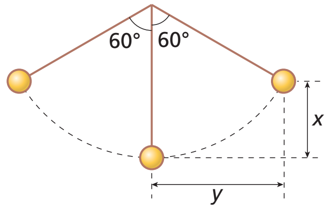
a) 50%
b) 43%
c) 37%
d) 33%
e) 19%

5. Duas circunferências, C_1 e C_2, são tangentes externas, e a distância entre seus centros é de 15 cm. Observe a figura ao lado e determine o raio aproximado de cada circunferência. $\simeq$ 6,34 cm; $\simeq$ 8,66 cm



Desafio

6. Um relógio possui um pêndulo de 80 cm de comprimento. Sua extremidade percorre, em seu movimento, um arco de 120°. Observe no esquema as distâncias *x* (vertical) e *y* (horizontal) que a extremidade desse pêndulo anda e calcule-as. $x = 40$ cm; $y = 40\sqrt{3}$ cm



Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

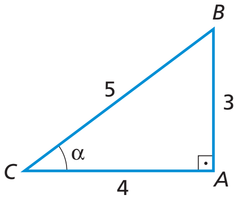
1. No triângulo retângulo *ABC* representado abaixo, os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo α são, respectivamente: alternativa c

a) $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{3}; \frac{5}{4}; \frac{4}{3}$



2. O ângulo agudo α de um triângulo retângulo é tal que sen α = 0,6. Podemos, então, afirmar que: cos α = ______ e tg α = ______. alternativa b

a) 0,6; 1

b) 0,8; 0,75

c) 0,75; 0,8

d) 1; 0,6

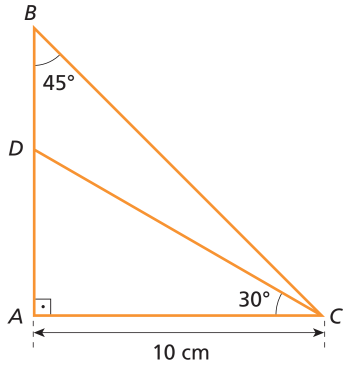
3. Um triângulo retângulo tem um ângulo medindo 30°. Se a hipotenusa desse triângulo mede 8 cm, então seus catetos medem ______ cm e aproximadamente ______ cm. alternativa a

a) 4; 6,93 **b)** 4; 5 **c)** 4,5; 5 **d)** 5; 6

4. Ao levantar voo, um avião faz ângulo constante de 20° com a horizontal. Determine a altitude, em metro, em que o avião estará quando passar sobre um prédio situado a 1,5 km do ponto de partida. (*Dados*: sen 20° ≃ 0,3420; cos 20° ≃ 0,9397; tg 20° ≃ 0,3640) ≃ 546 m

5. Uma turista está em uma das margens de um rio. Perpendicularmente a essa margem ela avista uma pedra na outra margem. Depois de percorrer 35 m pela beira do rio, ela avista a mesma pedra sob um ângulo de 55° em relação à sua trajetória. Qual é, nesse local, a largura aproximada do rio? ≃ 50 m

6. Considerando a figura abaixo, a medida do segmento $\overline{BD}$ é ______ cm. alternativa a



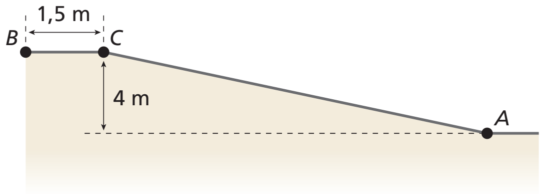
a) $\frac{10(3-\sqrt{3})}{3}$

b) $\frac{10\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

d) 1

7. Uma rampa para pedestre forma 6° com a horizontal e tem 4 m de altura. Logo, a distância (*d*) entre o início *A* da rampa e a porta *B* do prédio a que ela dá acesso é aproximadamente: alternativa d



a) 33,8 m

b) 40,9 m

c) 38,3 m

d) 39,8 m

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

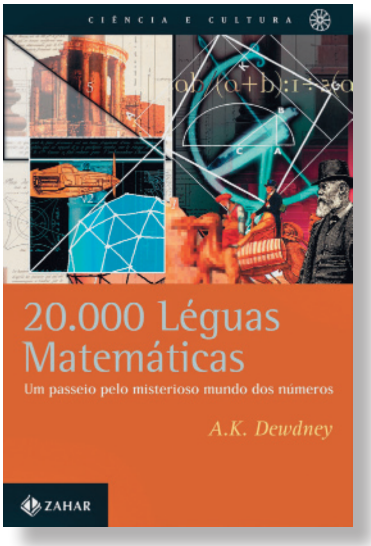
	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.	X	X					
Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.			X	X	X	X	X
Obter razões trigonométricas em uma tabela trigonométrica e na calculadora.					X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	238 e 239	241 e 242	238 a 244	238 a 242	245 a 247	241 a 244	245 a 247

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Sugestões de leitura

Os títulos indicados nesta seção abrangem a Matemática em sua forma mais geral e abstrata, como suporte do pensamento lógico que permeia tanto nossas ações cotidianas quanto as grandes teorias da ciência.

Os livros indicados podem ampliar o conhecimento dos alunos em relação ao assunto; devemos lembrar, porém, que, como toda obra literária, baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.


CIÊNCIA E CULTURA
20.000 Léguas Matemáticas
Um passeio pelo misterioso mundo dos números
A.K. Dewdney
ZAHAR

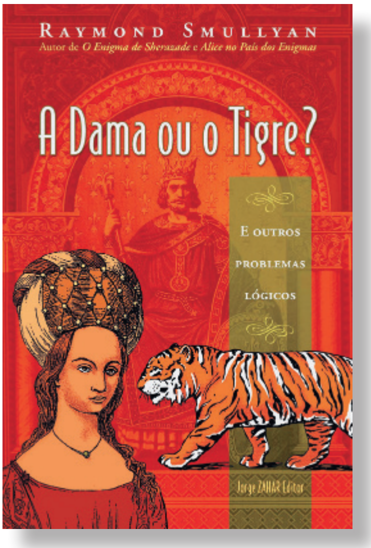
REPRODUÇÃO

20.000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números

A. K. Dewdney

Rio de Janeiro: Zahar, 2000.

Uma viagem à Grécia e a outros países traz ao leitor a discussão e a explicação de alguns dos grandes mistérios matemáticos. Além disso, garante diversão e conhecimentos gerais interessantes para os alunos de Ensino Médio. Com um texto bem-humorado, o autor conduz seus estudos sobre teoremas, átomos, equações, Trigonometria e outros assuntos, cativando, informando e, ao mesmo tempo, levando o leitor a ampliar a Matemática vista na escola e fora dela. Uma leitura que estimula o aprendizado tirando dúvidas e divertindo.


RAYMOND SMULLYAN
Autor de O Enigma de Sherazade e Alice no País dos Enigmas
A Dama ou o Tigre?
E OUTROS PROBLEMAS LÓGICOS
Jorge ZAHAR Editor

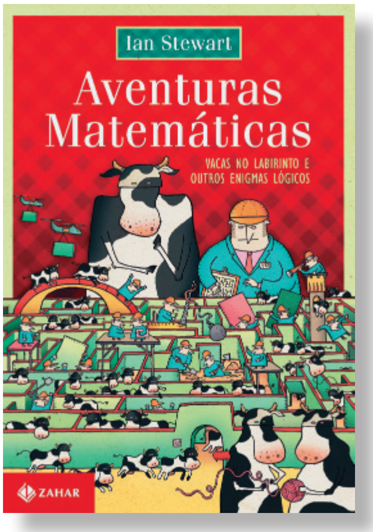
REPRODUÇÃO

A dama ou o tigre?: e outros problemas lógicos

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 2004.

Nesse livro, o autor nos convida a desvendar incríveis problemas e enigmas que envolvem raciocínio lógico-matemático. A leitura é conduzida por personagens diferentes e divertidos que povoam histórias que surpreendem pelos desafios propostos ao leitor e por suas resoluções.


Ian Stewart
Aventuras Matemáticas
VACAS NO LABIRINTO E OUTROS ENIGMAS LÓGICOS
ZAHAR

REPRODUÇÃO

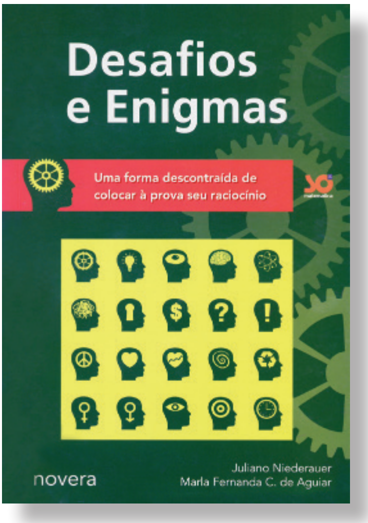
Aventuras matemáticas: vacas no labirinto e outros enigmas lógicos

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Com enigmas e jogos, o autor procura mostrar como até os raciocínios mais elaborados de Matemática podem ser entendidos por qualquer pessoa. Uma leitura curiosa e divertida para todos os leitores.

REPRODUÇÃO



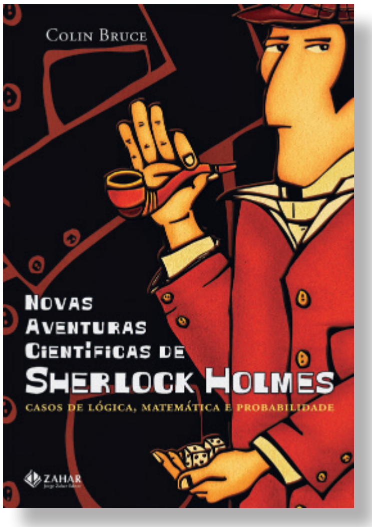
Desafios e enigmas: uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio

Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar

São Paulo: Novera, 2008.

Por meio de um texto bem-humorado, os autores exploram desafios e enigmas matemáticos que estimulam a criação de estratégias de resolução e também divertem. São situações que envolvem a aplicação de conteúdos como equações, sistemas de equação, teoria dos conjuntos, análise combinatória, probabilidade etc. Para aprender e se divertir.

REPRODUÇÃO



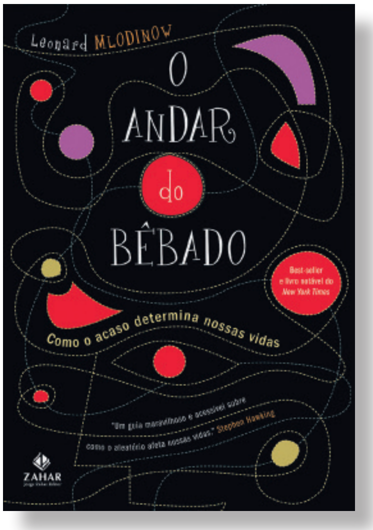
Novas aventuras científicas de Sherlock Holmes: casos de Lógica, Matemática e Probabilidade

Colin Bruce

Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

O livro traz interessantes enigmas, casos e problemas matemáticos resolvidos pelo famoso detetive inglês Sherlock Holmes. Mas não são simplesmente contos matemáticos; são, na verdade, histórias que envolvem mistérios, intrigas e crimes solucionados pelo mestre das aventuras policiais. Nessa obra envolvente, o autor mostra a importância da argumentação e da avaliação bem fundamentadas para entender os casos e tomar decisões que mudam o rumo e o desfecho das histórias. São lições que ultrapassam a aprendizagem matemática e divertem.

REPRODUÇÃO

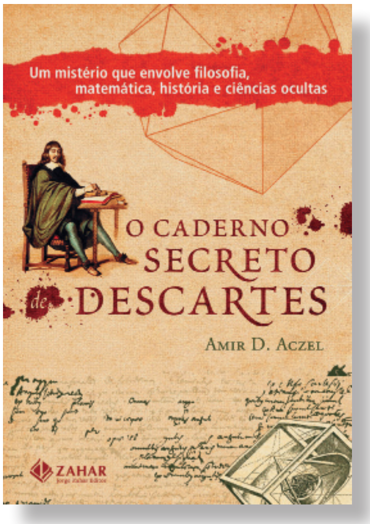


O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas

Leonard Mlodinow

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

O autor apresenta ferramentas para identificar os indícios do acaso, procurando ajudar o leitor a fazer escolhas mais acertadas e a conviver melhor com fatores que ele não pode controlar.



O caderno secreto de Descartes

Amir D. Aczel

Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

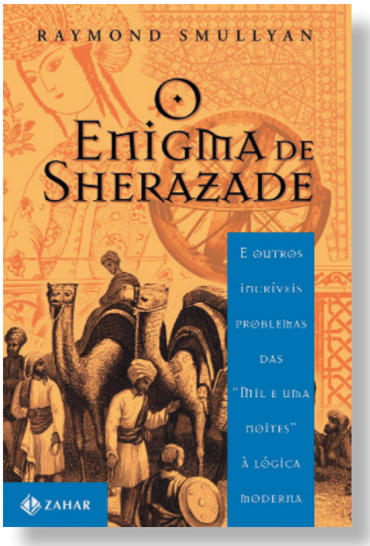
O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo **cartesiano** vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. Com um misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos do filósofo que não foram publicados e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

O diabo dos números: um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de Matemática

Hans Magnus Enzensberger

São Paulo: Cia. das Letras, 2000.

A Matemática se resume a uma montanha de números? E os cálculos, para que servem? O autor, um dos maiores poetas da língua alemã, escreveu esse livro pensando em quem tem medo de Matemática e não gosta de estudá-la. Assim, Robert, personagem que conduz a história, também pensava que os números eram monstruosos, absurdos e inúteis. Mas, um dia, ele começa a sonhar com Teplotaxl, um senhor do tamanho de um gafanhoto com aparência de diabo, que brinca com os números e surpreende com seus conhecimentos matemáticos. As situações sonhadas pelo menino apresentam vários assuntos vistos na escola, como a relação de Euler, a sequência de Fibonacci e outros, de maneira curiosa e divertida. A leitura amplia o universo de conhecimentos de todos os leitores.



O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

O autor põe Sherazade, famosa personagem que narra os contos das *Mil e uma noites*, no centro de narrativas que relatam enigmas, quebra-cabeças e problemas de lógica que envolvem o leitor. O livro propõe charadas matemáticas, adivinhações, enigmas e exercícios de verdade e de mentira cuja solução exige raciocínio lógico e estratégias que surpreendem o leitor desde a primeira página. Uma leitura original e cativante para todos os leitores.

REPRODUÇÃO
O ÚLTIMO
TEOREMA DE
FERMAT
A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos
SIMON SINGH

O último teorema de Fermat

Simon Singh

Rio de Janeiro: Record, 2008.

Pierre de Fermat, um matemático francês amador do século XVII, tinha o hábito de fazer anotações nos livros que lia; uma delas foi: "Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la". Assim nascia o problema que iria confundir e frustrar os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos: a busca da demonstração de que não existe solução para $x^n + y^n = z^n$, para n maior que 2. Ao narrar a dificuldade em chegar a uma solução, a obra relata a vida e a contribuição dos envolvidos nessa história.

REPRODUÇÃO
O UNIVERSO
E A XÍCARA DE CHÁ
K.C.COLE
A matemática da verdade e da beleza

O universo e a xícara de chá: a matemática da verdade e da beleza

K. C. Cole

Rio de Janeiro: Record, 2006.

Nesse livro, a autora, uma jornalista especializada em ciências, percorre uma vasta gama de áreas do conhecimento e de situações, científicas ou cotidianas, para mostrar como a ideia geral de que a Matemática é incompreensível à maioria dos mortais pode ser desmistificada quando nos propomos a examinar criticamente o significado da enxurrada de números com que convivemos no dia a dia. Com uma linguagem objetiva e simples e uma abordagem perspicaz e bem-humorada, ela consegue esclarecer fatos numéricos aparentemente obscuros ou muito complexos.

REPRODUÇÃO
RAZÃO
ÁUREA
A HISTÓRIA DE FI,
um número surpreendente
Φ
Mario Livio

Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente

Mario Livio

Rio de Janeiro: Record, 2007.

O que há em comum entre a disposição dos flóculos do girassol, a espiral que delineia a concha de um molusco, a conformação de uma galáxia, a estrutura molecular de cristais e a árvore genealógica de um zangão? Uma razão constante, que há muito intriga a mente humana: a chamada razão áurea. Com uma linguagem acessível e fartamente ilustrada, a obra de Mario Livio é fascinante, além de tratar o assunto de maneira confiável.

Respostas

Capítulo 1

1. 21 gotas

2. 18 alunos

3. sim: $\frac{x}{y} = \frac{1}{6}$

4. $x = 3$ e $y = 4$

5. R\$ 600,00; R\$ 1.000,00

6. **a)** R\$ 512,00; R\$ 320,00; R\$ 448,00
b) R\$ 320,00; R\$ 800,00; R\$ 160,00

7. $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 75°$

8. **a)** 1.215.000 m^3
b) 1.190.700 m^3

9. **a)** $\simeq$ 42 cm
b) $\simeq$ 455,56%

10. É considerada de "boa qualidade".

11. **a)** 125.000
b) 800
c) resposta pessoal

12. **a)** quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

13. **a)** Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.
b) Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistados todos os idosos.

14. **b)** Tanto no período da manhã como no da tarde e no dia, a cor que apresentou maior frequência foi a prata. E as cores que apresentaram a menor frequência no período da manhã foram a branca e a amarela e, no período da tarde e no dia, foi a amarela.

15. **b)** os meninos

16. resposta pessoal

17. **a)** Ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta.
b)
- Vendas das principais empresas estaduais.
- Vendas (bilhão de reais)
- Empresa; Ramo de atividade; 2016; 2017
- Agência Pesquisa Efetiva.

c) não
d) frequência percentual

19. **b)** resposta pessoal

20. **a)** sim
b) não
c) sim

22. **b)** 224 alunos

23. **b)** 69,44%; 30,56%
d) resposta pessoal

Exercícios complementares

1. alternativa e

2. **a)** 10 e 3, respectivamente
b) Não, pois os totais de alunos de cada turma são diferentes.

3. alternativa c

5. **a)** Pode-se observar que, de janeiro de 2007 a janeiro de 2015, o número de automóveis aumentou cerca de 20 milhões.
b) região Norte
c) região Sudeste, com crescimento de cerca de 10 milhões de automóveis.
d) 71,4%
e) resposta pessoal

6. **a)** sim
c) aproximadamente 294,35% e 43,63%
d) resposta pessoal
e) sim; resposta possível: São úteis tanto para a sociedade como para o governo, pois com essas informações é possível direcionar melhor as políticas públicas e tomar as providências necessárias para atender a nova realidade.

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa b

3. alternativa c

4. alternativa d

5. alternativa a

Capítulo 2

1. **a)** $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
b) $B = \{\text{A, E, I, O}\}$
c) $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. respostas possíveis:
a) D: x é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40.
b) E: fases da Lua.
c) F: x é um número ímpar maior que 3 e menor que 21.

3. **a)** falsa
b) verdadeira
c) verdadeira
d) falsa
e) verdadeira
f) verdadeira

4. **a)** Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3.
b) Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos.
c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

5. $A = C$

6. **a)** $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7. **a)** falsa
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) falsa
f) verdadeira
g) falsa
h) verdadeira
i) verdadeira

8. **a)** $J = \{2, 9\}$
b) $K = \{3, 9\}$
c) $L = \{8, 4\}$
d) $M = \{5, 7, 9\}$

9. $M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou
$M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Respostas possíveis:
$A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$;
$D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

11. O = {João, Rui} ou
O = {João, Rui, Jonas} ou
O = {João, Rui, Carlos} ou
O = {João, Rui, Carlos, Jonas}

12. **a)** $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\}$
b) $Y \cup Z = \{1, 3, 5\}$
c) $Z \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

13. 201.467.000 elementos

14. **a)** M
b) $\varnothing$
c) $\varnothing$
d) M

15. **a)** $X - Z = \varnothing$
b) $Y - X = \{5\}$
c) $Z - X = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

16. **a)** Resposta possível:
$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
b) Respostas possíveis:
$(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou
$(B \cap C) - A$

17. 8 voluntários; 34 voluntários

18. **a)** verdadeira
b) falsa
c) verdadeira
d) falsa
e) verdadeira
f) verdadeira

19. 25 pessoas

20. **a)** 46%
b) Os filmes *X* e *Z*, porque
$n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$.

21. (I). Verdadeira. Foram pesquisadas 100 pessoas, das quais 63 acharam o preço elevado.
(II). De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10); porém essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.
(III). Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento do modelo que criar vantagens na forma de pagamento.

22. **a)** $A^C = \{6, 8, 10\}$
b) $B^C = \{0, 2, 10\}$
c) $C^C = \{0, 2, 6, 8, 10\}$
d) $\complement_B^C = \{6, 8\}$

23. o próprio conjunto *C*

24. **a)** $n(A \cup B) = 15$
b) $n(A \cup B) = 27$
c) $n(A - B) = 0$
d) $n(A - B) = 5$

25. **a)** falsa
b) verdadeira
c) verdadeira
d) falsa
e) verdadeira
f) falsa

26. Resposta possível: divisão

27. **a)** $\mathbb{N}$
b) $\mathbb{Q}$
c) $\mathbb{Z}$
d) $\mathbb{Q}$

29. **a)** $-10{,}111... = -\dfrac{91}{9}$ e
$10{,}010101... = -\dfrac{991}{99}$
b) $1{,}333... = \dfrac{4}{3}$ e
$1{,}5333... = \dfrac{23}{15}$

31. **a)** verdadeira
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) verdadeira
f) falsa

32. ordem crescente:
$-2{,}5;\ \sqrt{2};\ -\dfrac{2}{5};\ \sqrt{2};\ \sqrt{5};\ \sqrt{25};$
$5{,}222...$
a) 2
b) 3
c) infinitos
d) infinitos

33. **a)** $-13 \notin \mathbb{N}$
b) $0 \notin \mathbb{Z}^*$
c) $-2{,}25 \notin \mathbb{Q}_+$
d) $\dfrac{6}{16} \in \mathbb{Q}$
e) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}^*$
f) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{R}_-$
g) $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$
h) $\mathbb{R}^* \not\subset \mathbb{R}_+$
i) $\mathbb{Q}_+ \not\subset \mathbb{R}_-$

34. **a)** verdadeira **c)** falsa
b) falsa **d)** falsa

35. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

36. **a)** $A \cup B = A$
$A \cap B = B$
$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2$ ou $5 \leqslant x < 7\}$
$B - A = \varnothing$
b) $A \cup B = [-1, +\infty[$
$A \cap B =]1, 6[$
$A - B = [-1, 1]$
$B - A = [6, +\infty[$
c) $A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$
$A \cap B = \varnothing$
$A - B = A$
$B - A = B$

37. alternativa d

38. alternativa a

Exercícios complementares

1. **a)** $A = \{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$
b) $B = \varnothing$
c) $C = \{0, 1, 2\}$

2. Respostas possíveis:
a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$
b) $B = \{x \mid x$ é natural e potência de $2\}$

3. **a)** $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $A - C = \{0, 1, 2\}$
c) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$
d) $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
e) $A - B = \{0\}$
f) $A \cap C = \{3, 4\}$
g) $B \cap C = \{3, 4, 5, 6\} = C$
h) $\varnothing$

4. **a)** região IV
b) $\varnothing$
c) $\varnothing$

5. $\complement_A^B = \{2, 5, 7\}$

6. três pessoas

7. **a)** 12 alunos
b) 23 alunos
c) 15 alunos

8. $M = \{3, 8, 10\}$; $n(M) = 3$

9. 36 e 27 pessoas

10. **a)** $A \cup B = A$
b) $A \cap B = B$
c) $A - B = \left[-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left]2, \dfrac{15}{7}\right]$
d) $B - A = \varnothing$
e) $\complement_A^B = \left[-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left]2, \dfrac{15}{7}\right]$

11. $x = 1$ e $y = 2$

12. **a)** $n(A - B) = x$
b) $n(B - A) = y$
c) $n(A \cup B) = x + y$
d) $n(A \cap B) = y$

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa c

3. alternativa d

4. alternativa b

5. alternativa a

6. alternativa c

7. alternativa a

8. alternativa b

9. alternativa b

Capítulo 3

1. **a)** não
b) R$ 72,50; R$ 154,20
c) 78 m^3

2. **a)** É função, pois cada elemento de *A* tem um único correspondente em *B*.
b) Não é função, pois existe um elemento em *A* (o elemento 3) que tem dois correspondentes em *B*.
c) Não é função, pois existe um elemento em *A* (o elemento 5) que não tem correspondente em *B*.
d) É função, pois cada elemento de *A* tem um único correspondente em *B*.

3. **b)** Não, pois existe um elemento de *A* (o elemento 4) que não tem correspondente em *B*.

4. **a)** medida do diâmetro da base; preço de custo
b) R$ 0,09
c) 5 mm
d) R$ 45,00
e) 100%

5. **a)** $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$
b) Não existe x tal que $f(x) = 4$.
c) 6

6. $s(\ell) = 2\ell^2$; $D(s) = \mathbb{R}^*_+$; $Im(s) = \mathbb{R}^*_+$

7. **a)** 17
b) -7
c) -47
d) 37

8. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$
b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$
c) $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$
d) $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$

9. **a)** $Im(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$
b) $Im(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$

10. **a)** $x = 4$
b) $x = 1$
c) Não há zero real.
d) Não há zero real.

11. 0 ou 2

12. -29

13. **a)** $a = 3$ e $b = 2$
b) $-\frac{2}{3}$

15. $A(0, 0)$, $B(1, 3)$, $C(-6, 0)$, $D(-1, -3)$, $E(2, -1)$, $F(-5, 3)$, $G(0, 2)$, $H(0, -2)$, $I(4, 0)$

16. -2

17. $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$

18. **a)** de 2005 a 2013
b) de 2009 a 2010

19. **a)** 1; -1; 3; 5
b)
- 0; 3
- $-0{,}5$
- 0,9; 2,5; 4
- 1,3; 2,4

c) $Im(f) = [-1, 5]$
d) nenhum; 3; 2; 1
e)
- não
- não

21. **a)** Não, pois $f(8) = 31 \neq -1$.
b) 2
c) Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. **a)** variável independente: tempo; variável dependente: número de litros
b) $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo (em hora).
c) O par ordenado (1,5; 12) indica que em 1 hora e meia a máquina produz 12 litros da substância.
d) 48 litros; 80 litros
e) 0,5 hora

24. **a)** $y = 3{,}10x$
b) R$ 4,65
c) 3 ℓ; 10 ℓ
d) 50 ℓ

25. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; zero da função: 2
b) $D(h) = [-2, 2]$; $Im(h) = [-3, 3]$; zeros da função: -2, 0 e 2

26. **a)** f é crescente para $x \in \mathbb{R}$; g é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$; h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.
b) Só g tem um valor mínimo, e esse valor é $y = 1$.

27. **a)** crescente para $x \in \mathbb{R}$
b) decrescente para $x \in \mathbb{R}$

28. **a)** 2
b) 4
c) Nesse intervalo, a função assume valores positivos.
d) não
e) $D(f) = [-3, 4]$
f) $Im(f) = [-2, 4]$
g) 4
h) -2

29. **a)** $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
4 é o valor máximo de f.
b) $Im(g) = \mathbb{R}$
g não tem valor máximo nem valor mínimo.
c) $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$
h não tem valor máximo nem valor mínimo.
d) $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
0 é o valor mínimo de i.
e) $Im(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$
-3 é o valor mínimo de j.
3 é o valor máximo de j.

32. **a)** verdadeira
b) Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.
c) Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.
d) verdadeira
e) verdadeira

33. **a)** -2 e 2
b) crescente: $[0, +\infty[$
decrescente: $]-\infty, 0]$
c) positiva: $x < -2$ ou $x > 2$
negativa: $-2 < x < 2$
d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$
e) -4; imagem de zero

34. **a)** julho de 2014 a janeiro de 2015, fevereiro a abril de 2015 e maio a junho de 2015.
b) janeiro a fevereiro de 2015 e abril a maio de 2015.
c) Arrecadação máxima: 5.421 milhões de reais em janeiro de 2015.
Arrecadação mínima: 3.487 milhões de reais em fevereiro de 2015.

35. Para os itens **a** e **d**, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos: $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$

36. $f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. a) $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$

b) para $x > 2$

c) Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.

d) positiva: $\left]-\sqrt{6}, +\infty\right[$

negativa: $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right[$

38. a)

$$f(x) = \begin{cases} 10{,}5x \text{ para } x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x \text{ para } x \in \mathbb{N} \mid 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x \text{ para } x \in \mathbb{N} \mid x > 100 \end{cases}$$

b) R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

39. a) 9

b) $\frac{19}{7}$

c) 2,26

d) 4

e) 2

f) $\frac{20}{7}$

40. a) $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$

c) $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$

e) $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

41. a) $f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$

b) $g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$

c) $h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$

d) $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e) $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

f) $p^{-1}(x) = \frac{x^5}{2}$

42. a) $[f^{-1}]^{-1}(x) = 4x + 9$

$[g^{-1}]^{-1}(x) = -2x + 3$

$[h^{-1}]^{-1}(x) = -7x - \frac{1}{2}$

$[m^{-1}]^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3}$

$[n^{-1}](x) = x^3 + 1$

$[p^{-1}]^{-1}(x) = \sqrt[5]{2x}$

As leis obtidas são iguais às dadas.

b) A inversa da função inversa de uma função bijetora é a própria função.

43. b) Respostas possíveis: os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa são retas paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares; os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

44. b) Respostas possíveis: os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa são retas que concorrem com a bissetriz dos quadrantes ímpares na origem do plano cartesiano; os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

45. a) $f^{-1}(x) = -x + 3$

b) $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

c) $h^{-1}(x) = 3x + 6$

d) $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

- Observe que o gráfico de uma função e o gráfico de sua respectiva inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

46. A função f é inversa da função g nos itens **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

Exercícios complementares

1. a) Resposta possível:

$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (domínio e contradomínio)

$f(x) = y = \pi x^2$ (lei da função)

b) x representa o raio do círculo e y representa a área do círculo de raio x.

c) y (área)

d) x (raio)

e) $4A$

2. O preço é igual nos dois postos.

3. a) sim **b)** não

4. a) 0

b) Resposta possível: 3,5

c) Respostas possíveis:

$-1{,}5$; $1{,}5$; $-2{,}5$; $2{,}5$

d) $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) -2 e 2

5. a) Resposta possível: 75 km

b) das 10 às 11 horas

c) Indica que, após 2 horas do início do movimento, ou seja, às 10 horas, Lucas havia percorrido 150 km.

d) 50 km

6. a) $f(x) > 0$ para $-1 < x < 3$

$f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 3$

$f(x) < 0$ para $x < -1$ ou $x > 3$

b) crescente: $]-\infty, 1]$

constante: $]1, 2[$

decrescente: $[2, +\infty[$

c) -1 e 3

7. a)

$$f(x) = \begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \text{ ou } 5 \leqslant x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leqslant x \leqslant 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leqslant 8 \end{cases}$$

b) 250 km

c) 3 horas

d) Resposta possível: não parar entre a 6ª e a 7ª hora de viagem e, nesse período, andar à velocidade de 75 km/h.

8. a) $]-\infty, 0]$

b) -2 e 1

c) $]-2, 2[$

9. a) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^* \mid f^{-1}(x) = \frac{2}{x + 1}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \mid f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

d) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to A \mid f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

10. a) Não, pois, para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais, é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.

b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.

c) Sim, pois, nos 10 primeiros anos de vida (do nascimento até 10 anos), a massa de Sandra aumentou cerca de 40 kg, aumento este superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

11. alternativa c

12. $C(b) = 16b^2 + \frac{18}{b}$; R$ 40,00

Autoavaliação

1. alternativa a

2. alternativa b

3. alternativa c

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa c

7. alternativa c

Capítulo 4

1. a) É função afim; $a = 2$ e $b = 4$.

b) Não é função afim.

c) É função afim; $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$.

- Porque não assumem a forma $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. a) 7

b) $\frac{1}{3}$

c) $-3\sqrt{2} + 1$

d) -6

- $f(x) > 0$ se $x < \frac{1}{3}$ e $f(x) < 0$ se $x > \frac{1}{3}$
- Sim, por meio de um gráfico.

3. $\frac{5}{2}$

4. $p = \sqrt{2}$ ou $p = -\sqrt{2}$; $q = 3$

5. a) R$ 34,50; R$ 50,50

b) 330 minutos

c) $f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \\ \text{se } x > 100 \end{cases}$

d) R$ 103,50

6. a) 3

b) 3

c) 3

d) 3

- $f(1) - f(0) = f(2) - f(1) = $
  $= f(3) - f(2) = f(4) - f(3) = 3$
  Acréscimos de uma unidade nos valores de x correspondem a acréscimos de três unidades nos valores de $f(x)$.
- $f(28) - f(27) = 3$
- $g(x) = -3x - 1$
  a) -3
  b) -3
  c) -3
  d) -3
- Os valores encontrados são iguais ao coeficiente a das respectivas funções, ou seja, para a função f, os valores são iguais a 3, e a de f é igual a 3; para a função g, os valores são iguais a -3, e a de g é igual a -3.
- Em ambos os casos, as diferenças calculadas são o valor do coeficiente a da função.

7. a) $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$

b) resposta pessoal

c) resposta pessoal

d) uma reta

8.
- Os gráficos das funções f e i são retas que representam funções crescentes.
- Os gráficos das funções g e h são retas que representam funções decrescentes.

9. $f(x) = x + 3$; $g(x) = -x + 1$; $P(-1, 2)$

10. funções dos itens **b** e **d**

11. $A(-2, 0)$, $B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$, $C(0, 3)$

12. O barril que tem 80 litros transbordará primeiro.

13. Se duas retas têm o mesmo coeficiente angular, então elas são paralelas.

14. a) decrescente

b) crescente

c) crescente

d) decrescente

15. a) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{4}$

$f(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{4}$

$f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{4}$

b) $g(x) = 0$ para $x = 2$

$g(x) > 0$ para $x < 2$

$g(x) < 0$ para $x > 2$

16. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

17. crescente se $m > \frac{1}{2}$

decrescente se $m < \frac{1}{2}$

18. decrescente

19. a) A função g, pois forma com o eixo x (sentido positivo) um ângulo maior.

b) g: 1; h: $\frac{1}{3}$

c) g: -1; h: 1

d) (3, 2)

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

20. a) $-\frac{4}{3}$

b) A função é decrescente, porque a taxa de variação é negativa.

c) $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$

21. a) R$ 1.160,00 e R$ 1.040,00

b) $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$

$s_B(x) = 0{,}08x$

c) loja A: R$ 35.000,00

loja B: R$ 20.000,00

d) A partir de valores acima de R$ 15.000,00.

22. a) prejuízo de R$ 1.125,00

b) $v(x) = 450x$; $g(x) = 2.250 + 75x$; $l(x) = 375x - 2.250$

c) 6 armários

d) 10 armários

e) R$ 3.375,00

f) Não, porque o domínio dessas funções não é $\mathbb{R}$.

23. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1$ ou $y = 2\}$

24. $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$

25. a) $s(t) = 10 + 80t$

b) $D(s) = \mathbb{R}_+$; $\text{Im}(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 10\}$

c) 330 quilômetros

d) 3 horas

26. a) R$ 13,00 e R$ 15,00

b) acima de 3 horas

27. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$

28. a) $x = -5$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

29. a) Pelo gráfico, podemos observar que $f(x) < g(x)$ para $x > 0$.

b) $-x + 1 < \frac{1}{2}x + 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Os intervalos encontrados pela análise do gráfico e pela resolução da inequação são iguais.

30. a)
- $x = 2$
- $x > 2$
- $x < 2$

b)
- $x = -3$
- $x > -3$
- $x < -3$

c)
- positiva
- negativa
- positiva

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

e) resposta pessoal

31. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 5\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant -\frac{3}{4}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

32. alternativa a

33. alternativa b

34. alternativa a

35. **a)** -1 e $-\frac{1}{3}$

b) f é crescente e g é decrescente.

c) inequação-quociente

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

e) Não, pois $3 \cdot (-1) + 3 = 0$.

f) Resposta possível: $\frac{x+1}{-3x-1} \leqslant 0$

36. **a)** $S = \varnothing$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leqslant x \leqslant 0\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

37. **a)** $140 + 50x$

b) $220 + 40x$

c) 8 consultas

d) Plano Laranja

e) Plano Azul

38. **a)** $V_s(x) = 2x - 10.000$

b) $V_f(x) = 3x - 12.000$

c) 2.000 quilogramas

d) $S = \varnothing$

e) cultura de feijão

f) 2.001 quilogramas

39. **a)** $D(j) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$

c) $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d) $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

e) $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

Exercícios complementares

1. **a)** É função afim; $a = 1$ e $b = 7$.

b) Não é função afim.

c) Não é função afim.

d) É função afim; $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{3}{4}$.

2. $-\frac{2}{3}$

3. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

4. alternativa e

5. **a)** reta oblíqua aos eixos x e y

b) decrescente

c) $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ e $(0, 3)$

d) $x = \frac{3}{5}$

e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

f) $P(1, -2)$

6. $y = 3x + \frac{13}{3}$

7. **a)** $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(6, 3)$

c) f é decrescente, g é crescente e h é constante.

8. **a)** $f(x) = 50x$

b) 100 pagantes

c) 400 frequentadores

d) R$ 4.000,00

9. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leqslant 7\}$

10. **a)** Os gráficos de y_1, y_2 e y_3 são retas paralelas.

b) Os gráficos de y_1, y_2 e y_3 interceptam-se no mesmo ponto, $P(0, 1)$.

c) Os gráficos de y_1, y_2 e y_3 interceptam-se no mesmo ponto, $P(-2, 0)$, que é também zero das funções.

11. $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

- sim, no ponto $P(6, 12)$

12. **a)** $v(m) = \frac{5}{4}m$

b) 24 g

13. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$

14. alternativa d

15. **a)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < \frac{3}{2}\right\}$

16. alternativa c

17. f é positiva para $x > 0$, se $p > -\frac{3}{2}$

f é positiva para $x < 0$, se $p < -\frac{3}{2}$

18. $P\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$

19. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa b

2. alternativa b

3. alternativa a

4. alternativa c

5. alternativa d

6. alternativa a

7. alternativa b

8. alternativa c

9. alternativa d

10. alternativa a

Capítulo 5

1. **a)** É função quadrática; $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.

b) É função quadrática; $a = 1$, $b = 0$ e $c = \sqrt{7}$.

c) Não é lei de uma função quadrática.

d) Não é lei de uma função quadrática.

2. **a)** 0

b) $4 + 5\sqrt{2}$

c) $\frac{34}{25}$

d) $x = -1$ ou $x = 6$

e) $\frac{5}{2}$

f) Não existe x real que satisfaça $f(x) = 20$.

- não
- Sim, com a construção de seu gráfico.

3. $\frac{64}{5}$

4. **a)** $p \neq \frac{3}{2}$

b) $p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

5. **a)** 2; 6; 12; 90

c) Sendo n o número de pessoas, o número de e-mails é $n \cdot (n - 1)$.

d) 12 integrantes

6. **a)** $A = 4x^2 + 64x$

b) $A = 228\ \text{m}^2$

7. 8 times

8. $d = \dfrac{n(n-1)}{2} - n$ ou

$d = \dfrac{n(n-3)}{2}$

10. a) concavidade voltada para cima

b) concavidade voltada para baixo

11. a) se $k > 0$: concavidade voltada para cima

se $k < 0$: concavidade voltada para baixo

b) se $k < -1$ ou $k > 5$: concavidade voltada para cima

se $-1 < k < 5$: concavidade voltada para baixo

12. a) Esses pontos não são suficientes.

b) Resposta possível:

(0, 2); (100, −98); (200, 2)

c) Resposta possível:

Os pontos (0, 2) e (200, 2) foram escolhidos, pois têm abscissas 0 e $-\dfrac{b}{a}$, cuja média aritmética é a abscissa do vértice.

O ponto (100, −98) é o vértice.

d) Se os zeros da função fossem conhecidos, bastaria saber onde é o vértice e o ponto $(0, c)$, no qual a parábola intercepta o eixo y.

13. a) $(0, -1)$

b) $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$

c) $(0, 0)$

- resposta pessoal

14. a) −2 e −1

b) Não existem zeros reais.

c) $\dfrac{1}{3}$

- resposta pessoal

15. a) $k > \dfrac{1}{100}$

b) $k > \dfrac{25}{8}$

16. a) $a = 1$ e $b = -4$

b) $a = 1$ e $b = 4$

17. a) $f(x) = x^2 + 8x + 15$

b) $g(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

18. 2

19. $b > \dfrac{53}{4}$

20. $m = 3$; $\left(\sqrt{6}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$

21. O ponto de intersecção da parábola com o eixo y tem não só ordenada igual ao coeficiente c, mas abscissa nula, ou seja, $f(0) = c$.

II. $x = 0$

III. $f(0) = c$

- resposta pessoal

22. a) Sabendo que não há zeros da função e que a parábola intercepta o eixo y no ponto (0, 5), concluímos que toda a parábola está acima do eixo x. Ou seja, para qualquer valor real de x, o $f(x)$ correspondente é positivo.

b) Sabendo que (−5, 0) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo x e que a concavidade da parábola é voltada para baixo, concluímos que toda a parábola, com exceção do ponto (−5, 0), está abaixo do eixo x. Ou seja, não há valor real de x para o qual o valor de $f(x)$ seja positivo.

c) Se (−3, 0) e (3, 0) são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x e (0, 3) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que qualquer x real que esteja no intervalo $]-3, 3[$ tem o valor de $f(x)$ correspondente positivo.

d) Se (−2, 0) e (−1, 0) são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x e (0, −2) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que $f(x)$ é positivo para $-2 < x < -1$.

e) A função cuja lei é $f(x) = x^2 - 6x + 13$ não tem zeros reais ($\Delta < 0$) e, como a parábola dessa função intercepta o eixo y no ponto (0, 13), concluímos que a concavidade é voltada para cima. Então, para qualquer x real, o valor de $f(x)$ correspondente é positivo.

23. a) $g(x) > 0$ para $\forall\ x \in \mathbb{R}$

b) $h(x) > 0$ para nenhum valor de x

$h(x) = 0$ para $x = 1$

$h(x) < 0$ para $x \neq 1$

c) $i(x) > 0$ para $-3 < x < 3$

$i(x) = 0$ para $x = -3$ ou $x = 3$

$i(x) < 0$ para $x < -3$ ou $x > 3$

24. a) $0 < x < 2$

b) $x \neq 1$

26. a) resposta pessoal

c) A função j tem dois zeros reais quando os coeficientes a e c possuem sinais distintos.

d) A função j não tem zeros quando os coeficientes a e c possuem sinais iguais.

e) resposta pessoal

27. a) (−1, 9)

b) (1, −9)

c) (−1, −4)

d) (2, 0)

28. a) h: maior imagem = 9

i, j e k: não existe valor máximo

b) h: não existe valor mínimo

i: menor imagem = −9

j: menor imagem = −4

k: menor imagem = 0

c) Para que a função tenha valor máximo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo ($a < 0$).

Para que a função tenha valor mínimo, o coeficiente de x^2 deve ser positivo ($a > 0$).

29. a) 0 e 8

b) $h(x) = -\dfrac{5}{16}x^2 + \dfrac{5}{2}x$

30. $m = \dfrac{3}{2}$ e $n = 3$

31. a) Nas duas funções tem-se $x_V = 0$ e $y_V = c$.

b) Temos: $h(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ e $b = 0$

Assim: $x_V = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow x_V = 0$, pois $b = 0$

Para encontrar y_V, basta calcular $f(x_V)$. Nesse caso:

$h(0) = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow h(0) = c$

Portanto, o vértice tem coordenadas $(0, c)$.

32. a) valor mínimo: $-\dfrac{81}{8}$

b) valor máximo: $\dfrac{5\sqrt{5} + 4}{4}$

c) valor mínimo: $\dfrac{7}{18}$

33. a) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\dfrac{21}{4}\right\}$

b) $\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \dfrac{65}{8}\right\}$

c) $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

34. a) valor máximo

b) para baixo

c) −4

d) (1, 16)

35. Não existe m real tal que $\frac{4}{3}$ seja valor mínimo de f.

36. 12 unidades de área

37. **a)** $h(t) = -5t^2 + 10t$

b) 0 m

d) Pelo gráfico, percebemos que o tempo de subida é igual ao de descida.

38. **a)** R$ 21,00

b) R$ 14,00

c) não

d) 500 toneladas

e) R$ 5,00

40. **a)** $60.000 - 400x$

b) $75 + x$

c) $y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

d) R$ 37,50

e) R$ 5.062.500,00

f) 45.000

41. subida: de 0 a 2,5 s

descida: de 2,5 a 5,37 s (aproximadamente)

42. O móvel A fica na frente do móvel B no intervalo]0, 10[.

43. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \{1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$

e) $S = \mathbb{R}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

44. Do gráfico: $f(x) > g(x)$ quando $x < 0$ ou $x > 2$, com $x \in \mathbb{R}$.

Inequação:

$2x^2 + 1 > x^2 + 2x + 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

Logo, as soluções pela análise do gráfico e pela resolução da inequação são iguais.

45. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leq x \leq 4\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7 \text{ ou } 0 \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

f) $S = \varnothing$

46. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

47. 2

48. **a)** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1;$

$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$

b) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$ e $(2, 0)$

c) $x \geq -1$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

49. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{0, 5\}$

50. **a)** $A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

b) $2 < x < 8$

51. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

d) $S = \varnothing$

52. **a)** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$

b) $D = \{7\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leq x < 0 \text{ ou } x \geq 4\}$

53. **a)** $\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$

c) $\mathbb{R} - \{0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

54. **a)** (I) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } -3 \leq x \leq 2\}$

(II) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Exercícios complementares

1. **a)** Não é função quadrática.

b) É função quadrática, pois tem a forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$ e $c = -7$.

c) É função quadrática, pois tem a forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$.

d) Não é função quadrática.

e) É função quadrática, pois tem a forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a = -3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{5}$.

f) É função quadrática, pois tem a forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = -3$ e $c = 0$.

2. **a)** R$ 475,00

b) 40 dias depois

3. **a)** A parábola não intercepta o eixo x, pois $\Delta = -11 < 0$.

b) A parábola intercepta o eixo x em dois pontos, pois $\Delta = 49 > 0$.

c) A parábola intercepta o eixo x em dois pontos, pois $\Delta = 5 > 0$.

d) A parábola intercepta o eixo x em um ponto, pois $\Delta = 0$.

4. **a)** $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

b) $(0, 5)$

5. **a)** $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{2}\right\}$

b) $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5\}$

6. $m = 1$ e $n = -\frac{7}{3}$

$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$

7. **a)** falsa

b) falsa

c) verdadeira

d) falsa

e) verdadeira

8. $y = 2x^2 + 6x + 4$

9. $k = -3;\ y_V = 14$

10. $t = 2;\ y_V = -4$

11. 144 cm^2

13. Observe que, quanto maior o valor absoluto de a, coeficiente de x^2, menor é a "abertura" da parábola; quando $a > 0$, a concavidade está voltada para cima e, quando $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo; para valores simétricos de a, as parábolas são simétricas em relação ao eixo x.

14. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ou } x = 2\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1 \text{ ou } x > 1\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$

15. **a)** $1 < x < 7$ (em milhares de unidades)

b) 4.000

c) R$ 9.000,00

16. a) ① 48.600 mm^2
② 32.400 mm^2
③ 97.200 mm^2

b) • lei da função:

$$A(x) = \frac{40.500 + 1.440x - x^2}{2}$$

• domínio da função:

$$D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 450\}$$

17. $p > 1$

18. a) falsa
b) falsa
c) falsa

19. $m = -8$ ou $m = 4$

20. a) O sinal de x_V (e, portanto, a posição do vértice) depende somente do sinal do coeficiente b, pois:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \cdot 1} = -\frac{b}{2}$$

b) Nesse caso, o sinal de x_V depende do sinal tanto do coeficiente a quanto do b, pois:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa b

3. alternativa c

4. alternativa d

5. alternativa c

6. alternativa b

7. alternativa d

8. alternativa a

9. alternativa a

10. alternativa b

Capítulo 6

1. a) 1 **c)** 16
b) 12 **d)** 16 e 16

2. a) 16 ou -16
b) 8
c) $\frac{49}{80}$ ou $-\frac{49}{80}$
d) Não existe x real.

3. a) $2x - 9$
b) 3
c) -2, para $x < 4$; $2x - 10$, para $4 \leqslant x < 6$; 2, para $x \geqslant 6$

4. a) 5; $x = 0$
b) 10; $x = 1$

5. $\frac{11}{28}$

6. a) $[-2, +\infty[$
b) $[0, +\infty[$
c) $[-2, +\infty[$

- O gráfico da função g corresponde ao gráfico de f transladado duas unidades para baixo.

  O gráfico da função h corresponde ao gráfico de f transladado duas unidades para a esquerda.

  O gráfico da função i corresponde ao gráfico de f transladado duas unidades para baixo e duas unidades para a esquerda.

7. a)
- g é decrescente para $]-\infty, 1]$
- g é constante para $[1, 3]$
- g é crescente para $]3, +\infty[$

b)
- q é decrescente para $]-\infty, -5]$ e $[-1, 2[$
- q é constante para $[2, +\infty[$
- q é crescente para $[-5, -1[$

c) p é crescente para $\mathbb{R}$

d)
- i é decrescente para $]-\infty, -1]$ e $[0, 1]$
- i é crescente para $[-1, 0]$ e $[1, +\infty[$

8. a) Os pontos de intersecção são: $(2, 2)$ e $(-2, 2)$.
b) Os pontos de intersecção são: $(-1, -3)$ e $(7, -3)$.

9. Área do triângulo do item **a**: 4 unidades de área; área do triângulo do item **b**: 16 unidades de área.

10. a) $(-2, 0)$, $(-1, 1)$ e $(1, 3)$
b) $-1 < x < 1$
c) $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$

11. a) $S = \left\{-\frac{1}{6}, \frac{7}{10}\right\}$

b) $S = \left\{-\frac{5}{16}, -\frac{7}{16}\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \left\{-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \left\{\frac{13}{2}, \frac{17}{4}\right\}$

12. a) Não existe x real.
b) 2 ou 3 ou $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ ou $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$

13. a) $D(f) = \mathbb{R}$; não possui zeros reais
b) $D(g) = \mathbb{R}^*$; não possui zeros reais
c) $D(h) = \mathbb{R} - \{1\}$; não possui zeros reais
d) $D(i) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; zeros da função: -10 e 10
e) $D(j) = \mathbb{R}$; zero da função: 0

14. $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

15. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < 3\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant \frac{3 + \sqrt{33}}{2}\right\}$

16. a) $D = \mathbb{R}^*$
b) $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
c) $D = \mathbb{R} - \{-4, -1, 4\}$

17. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

18. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -17 < x < -2 \text{ ou } 5 < x < 19\}$

19. 0

Exercícios complementares

1. a) $-8 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ **b)** $\pi - 2$

2. $-3 < x < 3$

3. 2; 4

4. $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, \text{ se } x < 1 \\ 2x - 2, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

5. a) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
b) $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
c) $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$

7. a) $f(x) = 0$ para $x = 1$ ou $x = 5$
$f(x) > 0$ para $x \neq 1$ e $x \neq 5$
b) A função é decrescente em $]-\infty, 1[\cup]3, 5[$; a função é crescente em $]1, 3] \cup [5, +\infty[$.

8. a) $(0, 0)$ e $(5, 0)$ **b)** $\left(-\frac{8}{\pi}, 0\right)$

9. 50 e 250

10. a) $S = \{3, -3\}$
b) $S = \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$
c) $S = \{-6, 0, 3\}$
d) $S = \{-4, 4\}$

11. 10 h e 11 h

12. **a)** $-868 < t_F < 932$

13. 1

14. $-2 + 2\sqrt{6}$ ou $-2 - 2\sqrt{6}$

15. alternativa e

Autoavaliação

1. **a)** falsa
b) verdadeira
c) verdadeira
d) falsa

2. **a)** -5
b) $2x - 1$
c) 5
d) $\begin{cases} -5, \text{ se } x < -2 \\ 2x - 1, \text{ se } -2 \leqslant x < 3 \\ 5, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$

4. $f(x) > 0$, para $x < -5$ ou $x > -1$
$f(x) = 0$, para $x = -5$ ou $x = -1$
$f(x) < 0$, para $-5 < x < -1$
f é crescente em $[-3, +\infty[$
f é decrescente em $]-\infty, -3]$

5. **a)** falsa
b) falsa
c) verdadeira
d) verdadeira

6. **a)** 12 ou 2
b) Não existe x real.
c) $-\dfrac{5}{4}$
d) Não existe x real.

7. **a)** $S = \{4\}$
b) $S = \left\{\dfrac{23}{5}, \dfrac{25}{7}\right\}$
c) $S = \{-2, 1\}$
d) $S = \{0\}$

8. **a)** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

9. Resposta possível: $-|x| + 2 > 1$

Capítulo 7

1. **a)** 16
b) $-\dfrac{1}{125}$
c) 0
d) $\dfrac{81}{64}$
e) 1
f) π

2. **a)** 100.000
b) 169
c) -125
d) $\dfrac{1}{8}$
e) 4.900
f) $-\dfrac{27}{125}$
g) 64
h) 1

3. alternativa b

4. **a)** 1,3
b) $-1{,}2$
c) 9
d) $2\sqrt[3]{2}$

5. **a)** 11
b) 0,027
c) $-3\sqrt[3]{-3}$
d) 4

6. **a)** $3\sqrt{2}$
b) $10\sqrt{5}$

7. **a)** $\dfrac{-\sqrt{3} - 3}{3}$ **b)** $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

8. entre 5 e 25

10. **a)** III
b) I
c) IV
d) II

11. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 4\}$

12. **a)** crescente
b) decrescente
c) crescente

13. $a = -1$ e $b = 1$

14. **a)** 5
b) 5
c) 5
d) 5

- Os resultados são todos iguais.
- **a)** $\dfrac{1}{4}$ **b)** $\dfrac{1}{4}$ **c)** $\dfrac{1}{4}$ **d)** $\dfrac{1}{4}$
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor da base a da função, pois os resultados são sempre iguais à base a.
- Podemos concluir que:
  $\dfrac{f(x)}{f(x-1)} = a$

15. **a)** Diminuindo, pois:
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
b) Não, porque a curva não corta o eixo x.
c) $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

16. R$ 28.098,56

17. **a)** 180 °C
b) $\simeq$ 28 °C

18. **a)** 5.000 bactérias
b) 15.000 bactérias
c) $a = \sqrt[6]{3}$ e $k = 5.000$
d) $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 6\}$;
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leqslant y \leqslant 15.000\}$
e) $\simeq$ 8.650 bactérias

19. **a)** $S = \{3\}$
b) $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$
c) $S = \{-1\}$
d) $S = \{1\}$

20. **a)** $S = \{6\}$
b) $S = \left\{\dfrac{2}{5}\right\}$
c) $S = \{14\}$
d) $S = \{-4, 4\}$
e) $S = \{-1, 0\}$
f) $S = \{0\}$

21. **a)** $3 < x < 4$
b) $3 < x < 4$
c) $1 < x < 2$
d) $7 < x < 8$

22. alternativa e

23. **a)** $S = \left\{\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)\right\}$
b) $S = \left\{\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)\right\}$

24. **a)** $k = 2.048$
b) 4 min

25. **a)** $a = 1.024$ e $b = \dfrac{1}{10}$
b) 30 anos

26. alternativa b

27. $\left(\dfrac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$

28. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$

29. **a)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$
b) $D(g) = \mathbb{R}$

30. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

31. **a)** $S = \{3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

32. **a)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; $g(x) = 3^x$
b) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$
d) $3^x \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

Exercícios complementares

1. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$
b) $D(g) = \mathbb{R}$
$Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

2. $\frac{1}{2}$

3. -3

4. **a)** R$ 66.550,00
b) R$ 88.578,05
c) $\simeq$ R$ 156.921,42

5. R$ 13.122,00

6. $\simeq 5{,}9\ m^3$

7. $\simeq$ 240.000 habitantes

8. $\frac{1}{3}$

9. 60 dias

10. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

11. 5

12. **a)** $\simeq$ 5 anos **b)** $\simeq$ R$ 21,18

13. alternativa e

14. $0 < m < 2$ e $m \neq 1$

15. $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

16. 2

17. 221 anos

Autoavaliação

1. alternativa a

2. alternativa c

3. alternativa c

4. alternativa c

5. alternativa d

6. alternativa d

7. alternativa b

8. alternativa b

9. alternativa b

10. alternativa a

Capítulo 8

1. **a)** 3
b) 0
c) 4
d) -4
e) 3
f) -2

2. **a)** entre 2 e 3
b) entre 0 e 1

3. **a)** 2
b) -1
c) -2
d) $\frac{7}{2}$
e) 4
f) 2

4. 6

5. **a)** 502,5
b) 9,01
c) 4
d) 10

6. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

7. **a)** 1
b) 0
c) 7
d) 2
e) 16
f) 2

8. **a)** $b = 7$
b) $x = \frac{2}{3}$
c) $n = 2$
d) $x = 3$ ou -3
e) $y = -2$
f) $k = \frac{1}{3}$

9. **a)** 1
b) 1
c) 1
d) -4
e) 0
f) 4

10. ácida

11. 10^{-9}

12. **a)** $6 + \log_2 13$
b) $2 + \log_{\sqrt{2}} 3$
c) $\log_3 13 + 1$
d) 18
e) -19
f) $\log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

13. **a)** 1
b) 2

14. **a)** $\log_a b + \log_a c + \log_a d$
b) $\log_a 2 + \log_a k - \log_a d$
c) $-n$
d) $-\log_a y$

15. **a)** $\simeq -0{,}116$
b) $\simeq 0{,}721$

16. **a)** 1,176
b) 1,653
c) 0,222
d) $-0{,}222$
e) 4,322
f) 4,644

17. $\simeq 4{,}42$

18. $\simeq 7{,}197$

19. **a)** $\simeq 1{,}5051$
b) $\simeq 2{,}0587$

20. $\log 2 = 0{,}30$; $\log 3 = 0{,}48$
a) 0,78
b) 1,48
c) 0,625
d) 0,70
e) 2,16
f) 0,4933...

21. **a)** $\frac{1}{\log 3}$
b) $\frac{1}{\log_5 2}$
c) $\frac{1}{\log_3 10}$
d) $\frac{1}{\log_{11} 7}$
e) $\frac{1}{\log_{26} 13}$

22. **a)** $\frac{1}{\log_b a}$
b) O logaritmo de b na base a é igual ao inverso do logaritmo de a na base b.
c) O resultado será 1.

23. 6

24. $A = 1$ e $B = 2$

25. 1

26. **a)** 1
b) 0
c) 4

27. $\frac{1}{n} \cdot \log_a b$

28. **a)** $\simeq$ R\$ 1.558,91
  b) 46 meses

29. **a)** R\$ 1.800,00 e R\$ 2.160,00, respectivamente.
  b) $d = 1.500 \cdot (1,2)^n$
  c) 1 ano
  d) $n = \log_{1,2}\left(\frac{d}{1.500}\right)$

30. **a)** 3
  b) 0
  c) -1
  d) $\frac{1}{2}$

31. **a)** 31
  b) $\sqrt{3} + 4$

32. **a)** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$
  b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$
  c) $D(g) = \mathbb{R}$

33. alternativa b

34. **a)** crescente
  b) decrescente

35. **a)** decrescente
  b) crescente

36. **a)** $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$
  b) $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$

37. **a)** $f(x) = \log_3 x$
  b) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

39. alternativa a

40. **a)** No caso de g, temos uma translação do gráfico de f em duas unidades no sentido negativo do eixo x.
  No caso de h, temos uma translação do gráfico de f em duas unidades no sentido positivo do eixo y.

42. **a)** $S = \{8\}$
  b) $S = \{15\}$
  c) $S = \{0, 2\}$
  d) $S = \{1\}$
  e) $S = \{4\}$
  f) $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$

43. $S = \{(8, 2)\}$

44. 25 horas

45. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
  b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
  c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$
  d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$
  e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$
  f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$

46. **a)** $f(x) \geqslant g(x)$ para $x \geqslant 4$
  b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$
  c) resposta pessoal

Exercícios complementares

1. **a)** 5
  b) $\frac{3}{8}$

2. alternativa b

3. alternativa e

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa e

7. 20 decibéis

8. alternativa d

9. **a)** $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
  b) $\simeq 70$

10. $\simeq$ 35 anos

11. alternativa d

12. alternativa a

13. alternativa d

14. alternativa e

15. **a)** $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$
  b) Resposta possível:
  $-\log x \geqslant \log x + 1$

16. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$

17. $S = \{1\}$

18. -3

Autoavaliação

1. alternativa a

2. alternativa c

3. alternativa c

4. alternativa b

5. alternativa b

6. alternativa a

7. alternativa d

8. alternativa c

9. alternativa b

10. alternativa d

11. alternativa d

Capítulo 9

1. **a)** -4, 0, 4, 8 e 12
  b) -3, -3, -3, -3 e -3
  c) $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$

2. **a)** 4, 40, 600 e 12.000
  b) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$
  c) -2, $\frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$

3. Respostas possíveis:
  a) $a_n = 2(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$ ou $a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$
  b) $a_n = 17$, com $n \in \mathbb{N}^*$
  c) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
  d) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
  e) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

4. $(-4, 12, -36, 108, ...)$ ou
$(3, 12, 48, 192, ...)$

5. **a)** 2, 6, 12, 20. Para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.
  b) $T_n = \frac{n(n + 1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
  c) 91
  d) não; sim

6. **a)** 4; 4; 4; 4; 4 e 4
  b) 4
  c) 23
  d) resposta pessoal

7. **a)** Cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores.
  b) $a_8 = 21$; $a_9 = 34$ e $a_{10} = 55$
  c) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$
  d) resposta pessoal

8. alternativas a, d

9. a) 12, 19, 26, 33 e 40
b) 12, 5, -2, -9 e -16
c) $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ e 0
d) 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11

10. a) decrescente, $r = -3$;
$a_n = 1 - 3n$, com $1 \leqslant n \leqslant 5$ e $n \in \mathbb{N}^*$
b) constante; $r = 0$;
$a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) crescente; $r = 10$;
$a_n = -20 + 10n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) crescente; $r = \frac{1}{1.000}$;
$a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

11. 45 bolinhas

12. 22

13. a) $-0{,}08$
b) R$ 70,00
c) R$ 44,80

14. 10,4 km

15. a) -103
b) 10

16. a) -15
b) -3

17. $a_1 = \frac{85}{4}$ e $r = -\frac{15}{4}$

18. $p = 1$ ou $p = 4$

19. 66 unidades de comprimento

20. $(-12, 0, 12, 24, 36, 48)$

21. 725

22. 482

23. 28

24. a) R$ 330,00; R$ 360,00
b) R$ 990,00; R$ 990,00
c) R$ 9.440,00

25. $(-15, -4, 7)$ ou $(7, -4, -15)$

27. alternativa d

28. $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$

29. a) 6.912
b) 568
c) 168
d) 57

30. R$ 137.880,00

31. a) R$ 84,00
b) R$ 1.152,00
c) R$ 96,00

32. 8 termos

33. $\frac{8}{3}$

34. 30.870

35. a) $S = \{60\}$

36. 16

37. alternativa e

38. $r = \frac{50}{3}$ e $S = -\frac{70}{3}$ ou
$r = \frac{2}{3}$ e $S = -\frac{190}{3}$

39. a) PG
b) PA
c) PG
d) PA

40. a) crescente
b) oscilante
c) decrescente
d) constante

41. a) $q = \frac{4}{5}$; $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b) $q = \sqrt{3}$; $a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $q = \frac{2}{\pi}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) $q = -2$; $f(n) = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

- $a_n = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
  $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
- Para representar graficamente essas progressões, para cada n marcamos o valor a_n correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.

42. a) 4, 24, 144, 864 e 5.184
b) $x^2, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^4}, \frac{y^3}{x^7}, \frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$

43. R$ 27.216,00

44. 512 bactérias

45. $\frac{729}{125}$

46. $\frac{1}{7}$

47. 6 termos

48. 26.400 m

49. 4

50. $\frac{6}{5}$

51. (6, 12, 24, 48, 96, 192)

52. 15, 30, 60

53. $\sqrt{2}$; 2; 8

54. a) $C_2 = C_0(1 + i)^2$ e $C_3 = C_0(1 + i)^3$
b) $q = (1 + i)$
c) $C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

56. a) $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$
b) $\frac{1}{4^9}$
c) não

57. 28.086

58. 8

59. 2

60. $\simeq$ 3.949.147 passageiros

61. $\simeq$ 725.042

62. 9.840 pessoas

63. a) 1,875 ou $\frac{15}{8}$
b) $\simeq 1{,}998$; $\simeq 1{,}999$
c) Sim, aproxima-se do número 2.

64. a) 45
b) -2π

65. a) $\frac{4}{3}$
b) 9

66. a) $\frac{7}{9}$
b) $\frac{2}{33}$
c) $\frac{11}{90}$
d) $\frac{111}{900}$

67. 40 km

68. 300 m

69. $2a^2$

70. $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$

71. $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$,
$q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

72. alternativa e

73. 20, 30, 40

74. 8

75. **a)** $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $d_1 = 3$, $d_2 = 9$, $d_3 = 27$
b) $S_{10} = 180$
c) $S_5 = 363$

Exercícios complementares

1. $a_n = \frac{3n}{3+n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

2. alternativa d

3. três vezes

4. sim

5. 10

6. $2\sqrt{2}$

7. $S = \{6\}$

8. 9 ou 42

9. $x = -3$

10. $a = 6$

11. alternativa e

12. $1{,}5x$ m

13. 1, 3 ou 9

14. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa b

2. alternativa c

3. alternativa d

4. alternativa a

5. alternativa c

6. alternativa b

7. alternativa b

8. alternativa c

9. alternativa d

10. alternativa a

11. alternativa d

12. alternativa b

Capítulo 10

1. **a)** 18
b) 5
c) 15
d) 2

2. $x = 35{,}2$ m e $y \simeq 24{,}5$ m

3. 1,4 m

4. 16,25 cm

5. **a)** Não, pois triângulos retângulos podem ter formas diferentes. Por exemplo: dois triângulos retângulos, sendo um deles com catetos que medem a e a e outro com catetos que medem a e $2a$, não são semelhantes.
b) Sim, pois todos os ângulos internos dos dois triângulos medem 60° (são congruentes) e os lados são proporcionais, já que a razão entre as medidas dos lados correspondentes é sempre a mesma (os lados de cada um são congruentes entre si).

6. São semelhantes e a razão de semelhança é $\sqrt{3}$.

7. **a)** 9 cm
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{9}$

8. **a)** 5,8 cm; 4.350 km
b) 5,7 cm; 4.275 km

9. **a)** $\frac{4}{25}$; 16%
b) 230,4 m^2

10. alternativa a

11. **a)** $x = 7{,}5$; $y = 9$
b) $x = 2$

12. 5,9 m

13. $x = 14$; $y = 6$

14. alternativa b

15. demonstração

16. **a)** demonstração
b) demonstração
c) demonstração
d) Resposta possível: A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo e é paralela a um dos outros lados intercepta o terceiro lado no ponto médio.

17. **a)** $8\sqrt{2}$ dm
b) 20 cm

18. 180 cm

19. **a)** $5\sqrt{2}$ cm; $5\sqrt{3}$ cm
b) $d_{\text{cubo}} = a\sqrt{3}$, em que a representa a medida da aresta do cubo.

20. $b = 6$ cm e $a = 8$ cm

21. $\simeq 2{,}33$ m

22. **a)** Resposta possível: 6, 8, 10 e 5, 12, 13
b) triângulo retângulo
c) Sim, por exemplo, 1, 1 e $\sqrt{2}$ formam um triângulo retângulo, mas não é um triângulo pitagórico, já que $\sqrt{2}$ não é um número natural.

23. **a)** $PI = 8$ cm
b) $h \simeq 7{,}1$ cm
c) $m \simeq 3{,}8$ cm e $n \simeq 13{,}2$ cm

Exercícios complementares

1. alternativa c

2. alternativa d

3. 24 m, 21 m, 18 m, 15 m e 12 m

4. 100 cm

5. alternativa b

6. 8 cm

7. alternativa e

8. 4

9. alternativa c

10. **a)** Representa a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.
b) demonstração

11. 24 cm

12. $12\sqrt{3}$ cm

13. alternativa c

14. $\simeq 44$ m

15. alternativa a

16. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa a

3. alternativa c

4. alternativa c

5. alternativa d

6. alternativa a

7. alternativa d

8. alternativa d

Capítulo 11

1. sen α = $\frac{12}{13}$

cos α = $\frac{5}{13}$

tg α = $\frac{12}{5}$

2. sen $\hat{A}$ = $\frac{2}{3}$

cos $\hat{A}$ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$

tg $\hat{A}$ = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 36 cm

4. ≃ 1.905 cm

5. **b)** ≃ 38,3 km

7. **a)**
- 25; 24
- 7
- cos α = $\frac{7}{25}$ e tg α = $\frac{24}{7}$

b) tg α = $\frac{24}{7}$

8. **a)** c = 10 m

b) $h \simeq 8{,}7$

9. 1,5 m

10. **a)** x = 5 cm e $y = 5\sqrt{3}$ cm

b) $x = 4\sqrt{3}$ cm e y = 30°

11. ≃ 20,8 cm

12. ≃ 85 m

13. ≃ 15,6 cm

14. alternativa c

15. ≃ 1,026 km

16. **a)** ≃ 131.034.482 km

b) ≃ 345

17. **a)** ≃ 5°

b) ≃ 34,4 m

Exercícios complementares

1. ≃ 34,27 m

2. ≃ 33,92 m

3. alternativa b

4. alternativa e

5. ≃ 6,34 cm; ≃ 8,66 cm

6. x = 40 cm; $y = 40\sqrt{3}$ cm

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa b

3. alternativa a

4. ≃ 546 m

5. ≃ 50 m

6. alternativa a

7. alternativa d

Lista de siglas

Cesgranrio-RJ – Fundação Cesgranrio

Enem – Exame Nacional do Ensino Médio

ESPM-SP – Escola Superior de Propaganda e Marketing

FEI-SP – Faculdade de Engenharia Industrial

FGV – Fundação Getulio Vargas

Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular

Insper-SP – Instituto de Ensino e Pesquisa

Mackenzie-SP – Universidade Presbiteriana Mackenzie

PUC – Pontifícia Universidade Católica

Uerj – Universidade Estadual do Rio de Janeiro

UFBA – Universidade Federal da Bahia

UFC-CE – Universidade Federal do Ceará

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFS-SE – Universidade Federal de Sergipe

UFSCar-SP – Universidade Federal de São Carlos

UFV-MG – Universidade Federal de Viçosa

Unicamp-SP – Universidade Estadual de Campinas

Unifesp – Universidade Federal de São Paulo

Vunesp – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

Bibliografia

ANGEL, Allen R. *Intermediate algebra for college students*. New Jersey: Prentice Hall, 2004.

ÁVILA, Geraldo. *Introdução às funções e à derivada*. São Paulo: Atual, 1997.

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

BUSSAB, Wilton O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística básica*. São Paulo: Atual, 1997.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria*, *números complexos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Introdução à geometria espacial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

COMO FUNCIONA: *Enciclopédia de ciência e técnica*. 2. ed. São Paulo: Abril, 1979.

CRESPO, Antonio Arnot. *Estatística fácil*. São Paulo: Saraiva, 1994.

DEVANEY, Robert L. *Chaos, fractals, and dynamics*: computer experiments in Mathematics. Menlo Park: Addison-Wesley, 1990.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios.)

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos (tomo 1)*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

______. *História universal dos algarismos (tomo 2)*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000. v. 2.

LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. v. 1.

______. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática.)

______. *A Matemática do Ensino Médio*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999. v. 3. (Coleção do Professor de Matemática.)

______. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção do Professor de Matemática.)

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

MOISE, Edwin E.; DOWNS JR., Floyd L. *Geometria moderna*. São Paulo: Edgard Blücher, 1971. Partes I e II.

MONTEIRO, L. H. Jacy. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.

ROSA NETO, Ernesto. *Números complexos*. 2. ed. São Paulo: Paed, 1981.

SMITH, David Eugene. *History of Mathematics*. Nova York: Dover, 1958. 2 v.

SPIEGEL, Murray R. *Estatística*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1984.

TINOCO, Lucia A. A. *Geometria euclidiana por meio da resolução de problemas*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1999. (Projeto Fundão.)

Guia do professor

Parte geral

1. **Pressupostos teóricos e objetivos da coleção** 274
2. **Organização e estrutura da obra** 274
   - Organização dos capítulos 275
3. **A importância do livro didático** 275
   - Alguns aspectos de um livro didático 275
4. **Interdisciplinaridade** 276
5. **Avaliação** 277
6. **Formação e desenvolvimento profissional do professor** 278
7. **Sugestões de consulta para o professor** 278
   - Livros e artigos 278
   - Publicações oficiais 281
   - *Sites* e artigos para *download* 281
   - Revistas e periódicos 281
8. **Sugestões de leitura para o aluno** 282
   - Obras sugeridas 282
   - Temas transversais 283
9. **Textos para reflexão sobre a educação** 284
   - Proposta de projetos 284
   - *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem 284
   - Meu Professor de Matemática e outras histórias 286

Parte específica

I. Atividades extras

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados 287
Capítulo 2 Conjuntos 289
Capítulo 3 Funções 290
Capítulo 4 Função afim 292
Capítulo 5 Função quadrática 294
Capítulo 6 Função modular 296
Capítulo 7 Função exponencial 297
Capítulo 8 Função logarítmica 299
Capítulo 9 Sequências 301
Capítulo 10 A semelhança e os triângulos 303
Capítulo 11 Trigonometria no triângulo retângulo 305

II. Resoluções e comentários

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados 307
Capítulo 2 Conjuntos 316
Capítulo 3 Funções 322
Capítulo 4 Função afim 334
Capítulo 5 Função quadrática 347
Capítulo 6 Função modular 369
Capítulo 7 Função exponencial 378
Capítulo 8 Função logarítmica 387
Capítulo 9 Sequências 395
Capítulo 10 A semelhança e os triângulos 408
Capítulo 11 Trigonometria no triângulo retângulo 414

Parte geral

1. Pressupostos teóricos e objetivos da coleção

Esta coleção foi elaborada tomando como base reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças curriculares previstas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) nº 9.394/96, promulgada em 20 de dezembro de 1996.

Para isso, tentamos refletir sobre alguns pontos de relevância de nossa realidade.

Em primeiro lugar, as consideráveis mudanças que afetaram o Ensino Médio brasileiro nos últimos anos. Além da rápida expansão da "clientela" com acesso a esse segmento educacional, os próprios objetivos dessa etapa já estão distantes daqueles de algum tempo atrás. Talvez pela inerente condição de fase intermediária entre o fundamental e o Superior, o Ensino Médio sempre tenha oscilado entre duas direções: a profissionalizante, com características terminativas, e a propedêutica, voltada ao prosseguimento dos estudos. Tal dualidade reforçava a divisão social entre os frequentadores de ambos os tipos de curso: de um lado, formava-se a mão de obra das futuras classes trabalhadoras, educadas para as bases de produção; de outro, forneciam-se os conhecimentos preparatórios a uma elite intelectual, que, após a conclusão dos estudos superiores, estaria pronta para assumir o comando dos diversos segmentos produtivos. Com as profundas transformações que a sociedade vem presenciando diante de um mundo crescentemente globalizado e informatizado, ganhou força a urgência de uma nova visão de ensino, que ofereça aos jovens algo além de um corpo teórico de conhecimentos, em direção a um desempenho prático real, capaz de conciliar as múltiplas demandas culturais e socioeconômicas, contemporâneas e futuras. Dentro dessa tendência geral, uma das principais orientações da citada Lei de Diretrizes e Bases é a flexibilização dos mecanismos de acesso ao Ensino Superior, promovendo a desvinculação do Ensino Médio em relação ao vestibular tradicional, como meta de ensino.

Em segundo lugar, tentamos dar suporte ao professor de Matemática para enfrentar os questionamentos que surgem com essas novas realidades. Em um universo fortemente permeado por uma visão pragmática, um dos maiores problemas é justificar a presença, no currículo do Ensino Médio, daqueles conteúdos que não têm utilidade prática imediata e responder à questão: "Por que aprender Matemática?".

O professor pode argumentar com o fato de os conhecimentos matemáticos serem ferramentas para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem de imediato, por exemplo, nos campos da Estatística, da Matemática financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Essa seria, contudo, uma resposta incompleta. Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla — e, ao mesmo tempo, elementar — dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o aluno compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e das orientações fornecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio de Matemática, esta coleção delineou como objetivo colaborar para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos — escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados — com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como os diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente — por via oral, escrita e gráfica — situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

2. Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto.

Os conteúdos assim selecionados, à luz de reflexões iniciais da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem, da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes.

O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao aluno tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência, com a preocupação do uso das formas contemporâneas de linguagem.

Assim, no decorrer da coleção, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em três **volumes**, cada qual composto de **capítulos**. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de:

- exercícios resolvidos, para professor e alunos explorarem os tópicos principais em sala de aula;
- exercícios propostos, para os alunos resolverem;
- exercícios complementares;
- questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por seções que apresentam:

- textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o aluno a desenvolver a competência leitora;
- atividades em grupo que incentivam o aluno a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos.

No final de cada volume, são apresentadas sugestões de leitura para a ampliação do conhecimento dos alunos a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

◆ Organização dos capítulos

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os **objetivos do capítulo** são apresentados logo no início, para auxiliar o aluno a formar um panorama dos conteúdos ali tratados. Como, nessa faixa etária, o aluno já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por ***Exemplos*** e ***Exercícios resolvidos***, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento. Na seção ***Exercícios propostos***, o aluno encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes laterais que dialogam com o aluno, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há ***Exercícios complementares*** temáticos que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção ***Autoavaliação*** apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o aluno precise retomá-lo.

A seção ***Compreensão de texto*** traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do aluno.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção ***Pesquisa e ação*** devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, exigem organização, análise e interpretação de dados e informações, com o objetivo de desenvolver a argumentação, a relação entre informações e conhecimentos adquiridos pelos alunos e a apresentação adequada dos resultados, por meio de cartazes, vídeos, jornais e outros recursos.

As seções e atividades de cada capítulo procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos alunos desenvolver as capacidades de:

- ler e interpretar textos matemáticos;
- ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.);
- transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa;
- exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática;
- usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os alunos a desenvolver as capacidades de:

- identificar dados significativos de um problema;
- procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- formular hipóteses e prever resultados;
- selecionar estratégias de resolução de problemas;
- interpretar e criticar resultados em uma situação concreta;
- discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os alunos a desenvolver as capacidades de:

- usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano;
- aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

3. A importância do livro didático

No campo da Matemática em particular, a maior parte do professorado concorda que a importância do livro didático no processo educacional é inegável. Por um lado, ele costuma ser um suporte confiável e amplificador em sala de aula. Por outro, representa uma referência histórica indispensável para os estudos na área da didática geral e das didáticas específicas — no caso, as pesquisas da Educação matemática, que mapeiam, analisam e inter-relacionam os múltiplos elementos do ensinar e do aprender nessa área do conhecimento. Verificamos, no decorrer das últimas décadas, o surgimento de uma multiplicidade de pesquisas didático-pedagógicas voltadas para o ensino matemático e podemos afirmar que grande parte dessas investigações é de alta qualidade e valia para a educação brasileira. Devemos ter em mente, contudo, o dinamismo que tais estudos requerem quando se deseja o constante aprimoramento das práticas de ensino, de modo que correspondam às reais necessidades da aprendizagem.

Nessa perspectiva, apresentamos a seguir uma rápida análise das diretrizes didático-pedagógicas que o livro deve adotar para atender às expectativas da educação em nosso país.

◆ Alguns aspectos de um livro didático

Em seu papel de apoio ao trabalho do professor, o livro didático deve:

- Orientar-se pelas propostas de ensino que favorecem o aprimoramento dos processos reflexivos. Para isso, os conteúdos escolares devem ser entendidos como instrumentos do desenvolvimento de competências e do estabelecimento de uma base confiável para o conhecimento do mundo.

Abordar os conteúdos de modo que os alunos tenham oportunidade de expor o que sabem sobre o assunto, de elaborar soluções próprias para os problemas e de refletir adequadamente sobre as decisões a tomar implica tratar esses conteúdos de diferentes maneiras, de ângulos variados. Tratar um mesmo conteúdo de diferentes pontos de vista favorece a construção do corpo de conhecimentos, sobretudo pela exposição de maneiras diversas de pensar e pelo incentivo à busca de novas soluções, além de promover maior comunicação entre professor e alunos e entre colegas.

- Manter a maior proximidade possível entre os conteúdos tratados e os fatos e fenômenos da realidade.

  Os conteúdos devem estar em consonância com as questões que afetam a sociedade de seu tempo, e seu aprendizado deve favorecer a inserção positiva do aluno nessa sociedade. A abordagem de conteúdos socialmente significativos contribui para a construção de instrumentos de compreensão da realidade e de participação em relações políticas e culturais diversificadas. A seleção e o tratamento dos conteúdos devem ter como perspectiva a construção da cidadania, da pertinência a um país pluricultural e a um mundo globalizado. O tratamento dos conteúdos deve possibilitar ao aluno assumir postura crítica e colaborativa na sociedade da qual é integrante.

- Garantir que os conteúdos propostos respeitem a natureza do objeto de conhecimento.

  Por identificarem a complexidade conceitual e as implicações do ato de ensinar e de aprender, as pesquisas em didática geral e específica têm muito a colaborar na proposição de conteúdos. As didáticas específicas explicitam as aproximações e os distanciamentos em relação ao objeto de conhecimento comumente proposto em sala de aula, o que possibilita ao professor analisar sua prática e, ao mesmo tempo, antecipar aos alunos questões que vão ao encontro de suas hipóteses sobre determinados conteúdos, favorecendo a aprendizagem significativa.

- Oferecer recursos para a diversidade de propostas.

  A diversidade de atividades em torno de um mesmo conteúdo é essencial à construção de um saber significativo. Ao perceber que um mesmo conteúdo é aplicável a diferentes situações ou que uma mesma situação pode ser abordada de diferentes ângulos, o aluno consegue generalizar e contextualizar produtivamente o conhecimento adquirido, desenvolvendo flexibilidade na resolução de problemas.

- Estruturar-se em conformidade com um movimento de “uso-conceituação-uso”.

  Os primeiros contatos do aluno com um novo objeto de conhecimento devem ser acompanhados de situações de uso que permitam a compreensão da natureza desse objeto. À medida que cresce sua familiarização com o novo objeto, é possível solicitar reflexões mais abstratas para a formalização do conhecimento, de tal maneira que o aluno consiga transformar suas conclusões iniciais em saber de caráter universal, aplicável a diferentes situações. Assim, o movimento de “uso-conceituação-uso” favorece a assimilação gradativa e segura dos novos conhecimentos. Cabe ao livro didático estruturar unidades que permitam e facilitem tal fluxo, buscando equilíbrio entre suas etapas e oferecendo situações-problema e atividades providas de significado e abrangentes o suficiente para possibilitar generalizações e transferências.

Cabe destacar que, embora o livro didático não seja, e não deva ser, o único material de apoio ao desenvolvimento do trabalho em sala de aula, é interessante que se estabeleça um paralelismo entre as horas de aula e as unidades didáticas, sugerindo, assim, um cronograma para a aprendizagem dos alunos.

4. Interdisciplinaridade

A organização do currículo escolar tradicional, estruturada em disciplinas que se justapõem, sem se inter-relacionarem, é apontada como responsável por uma formação compartimentada. Por outro lado, a abordagem interdisciplinar no ensino assinala a possibilidade de enriquecimento por meio da combinação de diferentes perspectivas, incentivando a busca de caminhos alternativos àqueles oferecidos pelos saberes já adquiridos, instituídos e institucionalizados.

A interdisciplinaridade é definida pelos educadores como a interação entre duas ou mais disciplinas, o que se traduz desde a simples comunicação de ideias específicas das disciplinas até a integração orgânica de conceitos, terminologias, metodologias, procedimentos, dados, linguagens ou representações particulares. Alguns especialistas estendem o conceito de interdisciplinaridade à atitude que pressupõe uma postura uniformemente estruturada diante dos fatos a serem analisados.

Pesquisas educacionais destacam as seguintes vantagens da abordagem interdisciplinar:

- possibilita uma visão global dos conteúdos do mundo atual, permitindo visão crítica e compreensão das múltiplas informações cotidianas, o que só ocorre com a superação das fronteiras entre disciplinas;
- colabora para a formação de uma base mais ampla e segura para o futuro desempenho profissional, considerando a crescente necessidade de integrarem-se informações de diferentes domínios de atuação;
- estimula o exercício contínuo da educação, tanto no âmbito geral quanto no profissional.

Com a interdisciplinaridade, espera-se o estabelecimento de uma intercomunicação efetiva entre as disciplinas por meio da fixação de um objeto comum diante dos objetos particulares.

Cabe destacar que muitas disciplinas, ao longo de sua história, desenvolveram métodos e procedimentos semelhantes, critérios de verificação coerentes entre si, linguagens e conceitos comuns. Tal aproximação permite a atribuição de um maior número de significados aos conceitos, favorecendo o trabalho interdisciplinar na busca de um aprendizado mais expressivo. Isso não significa que as disciplinas percam suas especificidades, mas sim que o diálogo entre elas (e com as disciplinas de outras áreas) seja pedagogicamente rico.

O trabalho interdisciplinar organiza e otimiza o tempo escolar, o aprendizado do aluno, o trabalho pedagógico e evita repetições; não se restringe a desenvolver temas comuns ou projetos interdisciplinares; pode ser feito por meio de atividades desenvolvidas por uma disciplina, mas planejadas pelos professores de várias disciplinas ligadas à área.

E como articular, por exemplo, a Biologia, a Física, a Matemática e a Química em um trabalho interdisciplinar?

A alternativa mais usual é a abordagem por temas comuns. No entanto, também são possíveis as abordagens por linguagens, gêneros do discurso ou procedimentos comuns. Como linguagens comuns, podemos citar, a título de exemplo, os gráficos, os mapas conceituais, as tabelas, os símbolos e os códigos. Como gêneros do discurso, os relatórios, artigos científicos, artigos de opinião, debates, enunciados de problemas e protocolos de pesquisa. E, como procedimentos, a resolução de problemas, a observação de regularidades, as investigações, o levantamento de hipóteses, as inferências, a dedução, a análise, a síntese e a generalização.

5. Avaliação

Avaliar o desempenho dos alunos é uma das tarefas mais problemáticas para o professor em qualquer nível de ensino. Apesar de ultimamente muitos educadores matemáticos se debruçarem sobre o tema, o conceito e as práticas de avaliação em Matemática não têm evoluído de modo satisfatório, o que mantém a atualidade da reflexão sobre a concepção de avaliação em seus diferentes aspectos.

Em primeiro lugar, é preciso ter claro que a avaliação não é um fim em si, mas parte integrante do processo de ensino e aprendizagem. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos alunos ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, a avaliação na educação diz respeito tanto aos atores da ação educativa (alunos e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos.

A avaliação, nessa concepção, deixa de ser instrumento de julgamento para integrar-se ativamente ao processo de tomada de decisões e, nesse sentido, servir de alimento e reorientação nos processos de mudança.

Uma das primeiras preocupações dos professores de Ensino Médio deve ser o diagnóstico do perfil dos alunos ingressantes, equivocadamente idealizados como capacitados em todos os conteúdos do Ensino Fundamental. Diante da constatação de uma série de defasagens em relação aos conhecimentos básicos, as pesquisas na área de Educação matemática apontam para a necessidade de avaliações diagnósticas que, ao determinar as lacunas no domínio e na compreensão desses conteúdos, subsidiem o professor na seleção e organização dos tópicos próprios do Ensino Médio. Em outras palavras, diagnósticos que forneçam ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos dos alunos.

Evidentemente, a preocupação em identificar as falhas nos conhecimentos prévios não deve ser motivação para "rebaixamento da qualidade" do ensino subsequente, mas, ao contrário, uma forma de superar problemas de formação e, então, construir um curso mais consistente, de maior significado para os alunos. Ao mesmo tempo, esse tipo de avaliação possibilita sondar as concepções e habilidades dos estudantes e fazê-los conscientes de suas limitações e possibilidades. Essa contribuição das avaliações diagnósticas muito provavelmente se manifestará na redução da evasão, problema hoje tão comum no segmento intermediário.

O diagnóstico pode ser estabelecido pela aplicação conjunta de alguns instrumentos, por exemplo:

- questionários ou entrevistas para obtenção de informações pessoais;
- testes fechados de múltipla escolha, com questões específicas de Matemática;
- questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Quanto mais o professor souber a respeito da formação anterior e dos hábitos e modos de vida dos alunos, mais perto estará de um perfil confiável de sua "clientela". Assim, a avaliação diagnóstica pode contemplar aspectos como: se estudaram em curso regular ou supletivo; com quais conteúdos do Ensino Fundamental tiveram contato e em que profundidade; quais são seus hábitos de leitura; o que cultivam nas horas de lazer; se trabalham ou têm participação nas atividades domésticas etc.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os alunos dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam o aluno a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

Voltando às reflexões sobre os processos gerais de avaliação, é importante lembrar o papel historicamente punitivo que foi atribuído à Matemática, tomando-a como instrumento de seleção e rotulação dos indivíduos. Por certo, um dos pontos para a superação dessa visão equivocada é a adoção de um novo conceito de avaliação. Trabalhando com a ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os alunos. Assim, os "erros" — tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado — devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Cabe salientar que, em todos os graus de ensino, os currículos disciplinares têm evoluído no sentido de incluir, entre os objetivos da aprendizagem, as capacidades e as atitudes que o aluno desenvolve ao longo do processo, como a criatividade e a independência na resolução de problemas, a comunicação adequada das ideias e a participação positiva nos trabalhos em grupo. É, portanto, preciso adequar os instrumentos de avaliação a essa nova perspectiva, na tentativa de valorizar não apenas os conhecimentos procedimentais, mas os conceitos e as atitudes dos alunos.

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades acumuladas em períodos maiores, atestando as competências através da construção de um produto. Além desse recurso, podemos fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao formador uma ideia sintetizada das competências construídas pelos alunos.

Oferecendo a possibilidade de escolhas e da avaliação contínua do desempenho, o portfólio permite ao aluno a participação na tomada de decisões. O foco da avaliação passa a ser o trabalho, considerando tanto o processo de desenvolvimento como o produto. Nesse caso, avaliam-se todo o processo e o desempenho dos atores envolvidos, e não apenas os registros numéricos. O compartilhamento de informações conduz à compreensão das propostas em vigor ao mesmo tempo que abre espaço para o replanejamento do trabalho do professor, de modo que se obtenham melhores resultados.

Apresentamos no quadro abaixo uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e autoavaliação dos alunos.

Descritores	Avaliação pelo aluno	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Além dos portfólios, outros recursos podem ser aplicados. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o aluno se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do aluno em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema.

É importante ter em mente que qualquer tipo de avaliação escrita revela a orientação fornecida aos alunos. Por isso, os parâmetros de avaliação devem ser discutidos com eles. Em relatórios escritos, por exemplo, a avaliação tende a ser mais qualitativa, inserida na perspectiva de uma apreciação global. Nesse caso, não fazem sentido os critérios estritos de "certo e errado", que pontos sejam descontados de acordo com os erros cometidos. Se isso não for observado, os relatórios tendem ao empobrecimento, pois, na maioria das vezes, as melhores produções, aquelas que apresentam as melhores argumentações, explicitações de raciocínio e descobertas, costumam conter mais erros que os relatórios simples, com menos escrita.

As apresentações orais permitem ao aluno preparar-se previamente, organizar sua exposição e estar pronto para responder a questões dos colegas, desenvolvendo, assim, as capacidades de argumentação e de comunicação.

Outra sugestão para a avaliação do desempenho oral é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Nesse tipo de discussão, podem ser avaliadas a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, a aptidão para interpretar e discutir situações em que tais ideias estejam presentes e mesmo as atitudes gerais em relação à Matemática.

É por meio de observações contínuas da participação dos alunos nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução de seus alunos em relação aos objetivos propostos no curso. Embora seja um juízo subjetivo, o professor não deve desvalorizar esse tipo de informação. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada aluno.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos alunos nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

6. Formação e desenvolvimento profissional do professor

A maioria dos autores que hoje discutem a formação de professores chama atenção para a importância de o desenvolvimento profissional ser contemplado ao longo de toda a carreira, com suporte na educação "formal" inicial. A partir dessa etapa, o aprimoramento de cada professor é de responsabilidade própria.

É oportuno lembrar algumas das diferenças entre a formação inicial e o desenvolvimento profissional de professores apontadas pelo educador português João Pedro da Ponte.

Na formação inicial, o futuro professor é obrigado a assimilar os conhecimentos que lhe são transmitidos, geralmente de modo compartimentado, por assuntos ou disciplinas, e com nítido predomínio da especulação teórica. Pode-se dizer que essa etapa transcorre em um movimento do exterior para o interior, no qual o profissional é, antes de tudo, um receptor.

Na continuidade da formação a que estamos denominando desenvolvimento profissional, admitem-se cursos e atividades mais direcionados para a práxis, como projetos em grupo e trocas de experiências, leituras e reflexões compartilhadas. O movimento é, então, do interior para o exterior, cabendo ao professor considerar teoria e prática de modo interligado, na busca de uma formação integral em seus aspectos cognitivos, afetivos e relacionais. Através da combinação entre processos formais e informais, a formação continuada tem por finalidade tornar o professor mais capacitado para conduzir o ensino de sua disciplina. O professor deixa de ser objeto para ser sujeito de sua formação.

O desenvolvimento profissional envolve diferentes domínios, como o conhecimento específico da disciplina ministrada e do currículo em vigência, a reflexão sobre a relação com o aluno, a permanente análise crítica dos processos de aprendizagem e de avaliação, a expansão da própria instrução, a conscientização sobre o contexto de trabalho, o autoconhecimento e, sobretudo, a capacidade de resolver problemas da prática educativa.

As leituras sugeridas nesta obra foram selecionadas com o propósito de auxiliar o docente de Matemática em sua trajetória para um ininterrupto desenvolvimento profissional.

7. Sugestões de consulta para o professor

◆ Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. *Educação matemática*: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. In: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (Orgs.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.
  Artigo relacionado à experiência em Educação matemática.
- ______. (Org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.
  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.
- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.
  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive através do *software* Cabri-Géomètri.

- CARAÇA, Bento de J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998. (Coleção Ciência Aberta).
  Essa obra encontra-se dividida em três partes: Números, Funções e Continuidade. O autor faz uma abordagem de aspectos da Ciência e dá ênfase a alguns conceitos da Matemática relacionados aos números e às funções.
- D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação e Matemática. 5. ed. São Paulo: Summus, 1986.
  Essa obra dá enfoque conceitual à Educação matemática, de forma crítica, abordando aspectos (relacionados à Matemática, à História e à Educação) que atingem todos os níveis de escolaridade.
- _______. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).
  O autor traz nessa obra algumas de suas experiências relacionadas a uma disciplina ministrada no curso de Mestrado em Educação matemática da Unesp de Rio Claro. Expõe sua interpretação sobre Matemática e Educação, de forma que as apresenta como estratégias contextualizadas e totalmente interdependentes.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2011. p. 11-33.
  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios alunos.
- KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. São Paulo: Atual, 2003.
  Esse livro traz vinte e dois artigos de alguns dos mais eminentes especialistas da área, que buscam rever a metodologia do ensino de Matemática.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).
  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor, porém não são adequados para que o professor os utilize com alunos do Ensino Médio. Esse livro serve de apoio ao professor no esmero de seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.
- LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Orgs.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 2003.
  Esse livro é o primeiro anuário do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) dos Estados Unidos, publicado pela editora Atual, contendo vinte artigos de alguns dos mais eminentes especialistas da área.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.
  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra configuram e complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.
- LOPES, C. E.; CURI, E. (Orgs.). *Pesquisas em Educação matemática*: um encontro entre a teoria e a prática. São Carlos, SP: Pedro e João Editores, 2008.
  Essa obra decorre de um processo reflexivo sobre metodologias de pesquisa em Educação matemática, que tem o foco central na análise sobre a relação teoria-prática. Os textos discutem temáticas diversas, relacionadas à Educação matemática em todos os níveis de ensino da Educação básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos. As temáticas abordadas permitem refletir sobre processos de ensino e aprendizagem, mudanças curriculares e inovações, bem como análise da prática docente.
- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).
  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? O que entendemos por cotidiano? Que concepções de ciência, verdade e educação fundamentam essa proposta? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.
  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática e interessante, que deixa de lado as questões teóricas mais difíceis. O autor selecionou um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como: o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.
- PIRES, C. M. C.; CAMPOS, T. M. M. (Orgs.). *Utilizando resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de números e funções*. São Paulo: Proem, 2006.
  Material formatado para um curso de especialização em Educação matemática da PUC/SP, apresenta o tema números e funções através de situações-problema que suscitam discussões e reflexões.
- _______ (Org.). *Utilizando resultados de pesquisas sobre análise de dados*. São Paulo: Proem, 2006.
  Material formatado para um curso de especialização em Educação matemática da PUC/SP, apresenta o tema análise de dados através de situações-problema que suscitam discussões e reflexões.
- _______ (Org.). *Matemática e suas interfaces com outras disciplinas*. São Paulo: Proem, 2006.
  Material formatado para um curso de especialização em Educação matemática da PUC/SP, apresenta o tema da interdisciplinaridade através de situações-problema que suscitam discussões e reflexões.
- PONTE, J. P. et al. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  O livro traz trabalhos de autores portugueses e mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula. Esses trabalhos ilustram as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.
- UDINA i ABELLÓ, F. *Aritmética y calculadoras*. Madri: Síntesis, 1999. (Coleção Matemáticas: cultura y aprendizaje).
  Aborda a utilização de calculadora como uma metodologia de ensino, o que indica que nem sempre um ensino centrado no método "lápis e papel" pode ser entendido como o mais eficiente.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BARUFFI, M. C. B.; LAURO, M. M. *Funções elementares, equações e inequações*: uma abordagem utilizando microcomputador. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2002.
  Apresenta uma abordagem por meio da qual se utiliza o computador como ferramenta para o ensino de funções elementares, equações e inequações.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  Abordagem sobre a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.
- COLL, C.; MONEREO, C. *Psicologia da educação virtual*: ensinar e aprender com as tecnologias da informação e da comunicação. Porto Alegre: Artmed, 2010.
  Apresenta uma análise do impacto das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) sobre os processos de ensino e aprendizagem.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.
  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Nessa edição de 2012, apresenta ainda uma cobertura atualizada de tópicos como o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 1995.
  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.
- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.
  Essa obra apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e apresenta personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.
- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo*. São Paulo: Ática, 1999.
  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.
- PIRES, C. M. C. *Matemática e sua inserção curricular*. Curso de especialização em Educação matemática, mod. 1, versão preliminar. São Paulo: Proem, 2006.
  Material formatado para um curso de especialização em Educação matemática da PUC/SP, apresenta uma síntese das principais reformas educacionais no cenário brasileiro, indicando a trajetória dos documentos curriculares oficiais.
- ______. *Currículos de Matemática*: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.
  Essa obra analisa as organizações curriculares (mais recentes para o ensino da Matemática) formuladas em diferentes países e, em particular, no Brasil. Aponta novos e possíveis caminhos para as discussões sobre a proposta educacional da escola, sobre planejamento, avaliação e para a organização dos currículos de Matemática.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2000.
  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.
- PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.
  Traz artigos de alguns autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática e enfocam diversas situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.
  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.
- PERRENOUD, P.; THURLER, M. G. et al. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Trad. Cláudia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.
  Essa obra apresenta uma reflexão sobre os procedimentos de avaliação e a forma como é vista por professores e pelo próprio sistema educacional, além de uma discussão de como de fato deveria ocorrer o processo de avaliação, bem como seus objetivos. Todas essas reflexões são abordadas em torno da questão da formação de professores.
- SHULMAN, L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 9, 2 (2005). Disponível em: <www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2016.
  Nesse artigo, são abordadas as três vertentes necessárias ao conhecimento do professor quanto ao conteúdo da disciplina a ensinar: o conhecimento didático da disciplina, o conhecimento do conteúdo e o conhecimento curricular. O autor salienta que não basta o professor dominar o conteúdo de sua disciplina.

Avaliação

- PISA 2006. *Estrutura da avaliação*: conhecimentos e habilidades em Ciências, Leitura e Matemática. São Paulo: Moderna, 2007.
  Apresenta a estrutura do Programa Internacional para Avaliação de Alunos com relação aos conteúdos de Ciências, Leitura e Matemática, bem como sua organização e as diretrizes do desenvolvimento da avaliação.

◆ Publicações oficiais

- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias). Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 3.
  Esse volume apresenta orientações para a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Tais orientações foram elaboradas para auxiliar professores em sua metodologia em sala de aula frente a determinados temas presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais.
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. *Explorando o ensino da Matemática*: artigos. Brasília: MEC/SEB, 2004. v. 3.
  Esse documento apresenta artigos divididos nos seguintes eixos: Números, Geometria, História, Álgebra e Ensino. Tem por objetivo levar professores a aprofundar seus conhecimentos, que podem ser utilizados em sala de aula, na elaboração de atividades ou, ainda, servir de incentivo para a reflexão sobre os temas abordados.
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília, 2002.
  Os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam orientações e sugestões ao trabalho docente, que implicam o trabalho com a interdisciplinaridade e os temas transversais. Tratando também a diversidade da sala de aula e o trabalho com recursos de tecnologia, os conteúdos são organizados em eixos estruturadores. Esse documento pode ser encontrado em formato eletrônico no *site* do Ministério da Educação e Cultura (MEC).
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+*: Ensino Médio, orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002.
  Nesse documento, o professor pode encontrar referências e orientações de conteúdos a serem trabalhados por ano, bem como sugestões de trabalho para a sala de aula.
- SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*: Matemática. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, 2008.
  Esse documento foi elaborado levando em conta as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais, porém apresenta no caderno do professor atividades com orientações para o trabalho em sala de aula que constam no caderno do aluno. Sua versão eletrônica está disponível no *site* da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

◆ *Sites* e artigos para *download*

- <https://linhamestra24.wordpress.com/sobre/>
  O Comitê Científico do 19º COLE e a ALB (Associação de Leitura do Brasil) disponibilizam os anais das últimas realizações do Congresso de Leitura do Brasil (Cole), que possui um eixo específico de Educação matemática. Assim, o professor pode encontrar artigos de seu interesse para aprofundar seus conhecimentos.
- <www.cempem.fae.unicamp.br>
  Site do Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática, dá acesso aos resumos e aos índices dos volumes da revista *Zetetiké*.
- <www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=3>
  Portal educacional do estado do Paraná, disponibiliza artigos, dissertações e teses em todas as áreas da educação, além de outros recursos para auxiliar o professor.
- <www.furb.br/cremm/portugues/index.php>
  Site do Centro de referência de modelagem matemática no ensino, disponibiliza informações sobre livros, trabalhos acadêmicos, artigos e revistas eletrônicas.
- <www.gilmaths.mat.br/home_0.html>
  Esse *site* disponibiliza materiais de apoio para o Ensino Médio apresentados por tema, jogos, testes *on-line* e *softwares*.
- <www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexem.html>
  Nesse *site* é possível acessar documentos de interesse para o ensino da Matemática em todos os níveis.
- <www.periodicos.capes.gov.br>
  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza a consulta a periódicos de diversos assuntos.
- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>
  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.
- <www.edumatec.mat.ufrgs.br>
  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.
- <www.ime.usp.br/lem/>
  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, traz *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.
- <rived.mec.gov.br>
  Site da Rede Interativa Virtual de Educação, oferece objetos de aprendizagem de diferentes temas de apoio ao desenvolvimento de atividades pelo professor em sala de aula.
- <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>
  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.
- <www.scielo.br/scielo.php?script=sci_home&lng=pt&nrm=iso>
  Disponibiliza artigos em diversos periódicos nas mais variadas áreas de interesse.

◆ Revistas e periódicos

- BOLEMA. Rio Claro: Departamento de Matemática da Unesp.
  O BOLEMA (Boletim de Educação Matemática) é um dos mais antigos e importantes periódicos da área de Educação matemática do Brasil. Dissemina a produção científica em Educação matemática e áreas afins, publica artigos, ensaios, resenhas e resumos de dissertações e teses com destaque ao ensino e à aprendizagem de Matemática e/ou ao papel da Matemática e da Educação matemática na sociedade.
- Boletim GEPEM. Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.
  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- Cadernos do CEM. São Paulo: Centro de Educação Matemática (CEM).
  Publicação do Centro de Educação Matemática, tem por objetivo veicular trabalhos na área de Educação matemática.
- Cálculo. São Paulo: Segmento.
  A revista apresenta, em linguagem simples e acessível, entrevistas, histórias, desafios, frases e até piadas relacionadas à Matemática.
- Educação Matemática em Revista.
  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.
- Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática.
  Publicação do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação matemática da PUC/SP, divulga pesquisas científicas da área. Os trabalhos relacionam-se aos temas: A Matemática na estrutura curricular e Formação de professores; História, Epistemologia e Didática da Matemática, além de Tecnologias da Informação e Didática da Matemática.
- Revista do Professor de Matemática.
  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática.
- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação matemática.
  Publicação do Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática, divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

8. Sugestões de leitura para o aluno

Obras sugeridas

Além das obras indicadas na parte final do livro do aluno, apresentamos as sugestões a seguir.

- *Desafios e enigmas* — uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio, de Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar. São Paulo: Novera, 2008.
  Por meio de um texto bem-humorado, os autores exploram desafios e enigmas matemáticos que estimulam a criação de estratégias de resolução e também divertem. São situações que envolvem mais que conhecimentos matemáticos, mas propiciam a aplicação de conteúdos como equações, sistemas de equação, teoria dos conjuntos, análise combinatória, probabilidade e outros. Para aprender e se divertir.
- *Iniciação à lógica matemática*, de Edgard de Alencar Filho. São Paulo: Nobel, 2009.
  O autor utiliza um texto didático e objetivo para introduzir o aluno de Ensino Médio no universo da Lógica. A obra traz explicações básicas, bem elaboradas e funcionais para aplicação em sala de aula. As situações são organizadas por grau de dificuldade, possibilitando vencer um desafio antes de enfrentar o próximo, o que facilita a compreensão das estratégias empregadas para solucionar cada situação. Traz atividades e respostas.
- *Matemágica*: história, aplicações e jogos matemáticos, de Fausto Arnaud Sampaio. Campinas, SP: Papirus, 2009. v. I.
  O autor explora as relações entre a Matemática e suas aplicações em diversas áreas, como Biologia, Física e Arte. Aborda também alguns fatos da história da Matemática e propõe jogos e curiosidades divertidos e interessantes. A linguagem é clara, didática e objetiva, favorecendo o enriquecimento de vários conteúdos vistos em sala de aula. Das antigas escritas secretas à moderna teoria do caos, o livro informa sobre o pensamento e as técnicas desenvolvidas por gregos, egípcios, árabes e maias, entre outros povos. Uma leitura indicados para todos os alunos e professores.
- *Matemática divertida e curiosa*, de Malba Tahan. Rio de Janeiro: Record, 2009.
  Nessa obra, o autor relata casos curiosos sobre fatos e descobertas matemáticas. Traz ainda enigmas, problemas e figuras que surpreendem pela ilusão de óptica. O livro é um clássico do Prof. Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido pelo pseudônimo Malba Tahan. Uma leitura que amplia o universo de conhecimentos e, ao mesmo tempo, diverte.
- *Matemática e gregos*, de Hélio Cyrino. Campinas, SP: Átomo, 2006.
  O tema principal do livro é a história da Matemática na Grécia antiga. É uma leitura interessante para o aluno, pois traz uma abordagem panorâmica simplificada da história da Grécia, favorecendo inclusive um trabalho interdisciplinar com a área de História. Alguns conteúdos específicos de Matemática explorados pelo autor são: teorema de Tales, razão áurea, sistemas de numeração e números amigos, estudos da escola pitagórica e teorema de Pitágoras, Álgebra, Lógica e outros. Uma leitura interessante e pertinente para o aluno de Ensino Médio.
- *Matemática lúdica*, de Leon Battista Alberti. Rio de Janeiro: Zahar, 2006.
  O autor viveu durante o Renascimento italiano (1404-1472). Nessa obra, descreve e explica de maneira prática como fazer medições com os recursos disponíveis naquela época; por exemplo, como medir “com a vista” a altura de uma torre; a largura de um rio; uma grande profundidade de água; como pesar cargas muito pesadas; como avaliar grandes distâncias. Explica ainda o caso de Arquimedes e a coroa de Hieron. O texto é bem traduzido e traz comentários sobre os casos. Vale como curiosidade e ampliação de conhecimento. Favorece atividades interdisciplinares com História.
- *Medidas desesperadas*: comprimento, área e volume, de Kjartan Poskitt. São Paulo: Melhoramentos, 2006. (Coleção Saber horrível).
  O autor utiliza uma linguagem bem-humorada para abordar os conteúdos matemáticos, explorando-os do ponto de vista atual e de outras épocas. Assim, tem-se uma proposta criativa e instigante que facilita a aprendizagem de assuntos vistos na escola e também fora dela. Com esse jeito especial de explorar as ideias matemáticas, o autor apresenta medidas antigas e atuais, área, perímetro, volume, ângulos e figuras geométricas.
- *Newton e a gravitação*, de Steve Parker. São Paulo: Scipione, 2007.
  O livro aborda a história da Matemática, trazendo dados biográficos sobre Isaac Newton, a construção das suas teorias e alguns experimentos e invenções realizados pelo estudioso.

É uma leitura informativa interessante sobre as ideias de um dos mais importantes cientistas. Aborda ainda as séries binomiais de maneira objetiva e de fácil compreensão.

- *Origami*: dobras, contas e encantos, de Carlos Genova. São Paulo: Escrituras, 2008.
  Origami é a arte de dobrar papel (*ori* = dobrar e *gami* = = papel, em japonês). Mas, além de melhorar os movimentos das mãos e exercitar o cérebro, a arte do *origami* abre portas para a expressão artística. O livro explora esse universo, relacionando-o à importância das figuras geométricas na composição de interessantes e criativas dobraduras. A obra proporciona uma maneira divertida e interessante de trabalhar com Geometria.

◆ Temas transversais

- *Aprendendo valores éticos*, de Márcia Botelho Fagundes. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
  O livro discute valores como amizade, cooperação, diálogo, responsabilidade, respeito, solidariedade, construção da paz, cidadania, entre outros. A autora oferece uma ferramenta modificadora para reflexão sobre o que é ser cidadão. A obra busca contribuir para a formação humana dos alunos, papel fundamental das escolas e dos educadores. Há ainda sugestões de leituras e atividades em grupo e individuais sobre cada um dos valores apresentados.
- *Cidadania em preto e branco*, de Maria Aparecida S. Bento. São Paulo: Ática, 2006.
  A autora parte de situações do cotidiano, comuns no nosso dia a dia, para abordar a formação da cidadania e das relações raciais. Explica como surgiram as teorias sobre racismo, a resistência e a luta contra as práticas racistas e como os preconceitos e estereótipos são transmitidos dentro da família. Além disso, o livro põe em discussão o conceito de raça, revisto nas últimas décadas por meio dos estudos que decifraram parte dos códigos do DNA humano.
- *Clima e meio ambiente*, de José Bueno Conti. São Paulo: Atual, 2011. (Série Meio ambiente).
  Qual é a diferença entre tempo e clima? Como o clima influencia a preservação da vida — inclusive a da humana — no planeta Terra? Por que ocorrem enchentes devastadoras e secas arrasadoras em regiões, muitas vezes, bastante próximas? Essas e outras questões, que nos interessam especialmente na época que estamos vivendo, são discutidas nesse livro. Outro ponto positivo da obra é o texto bem organizado e objetivo e as atividades propostas, que auxiliam a fundamentar e a compreender os assuntos abordados.
- *De cara com a violência*, de Ivan Jaf e Regina Célia Pedroso. São Paulo: Ática, 2007. (Coleção Jovem cidadão).
  A obra aborda um assunto que preocupa todas as pessoas que vivem em grandes cidades: a violência. Por meio de uma história fictícia, os autores refletem sobre situações violentas que atingem especialmente os jovens de 16 a 24 anos. Um livro indispensável que questiona e faz pensar sobre as condições de vida e as oportunidades de estudo e trabalho que as sociedades reservam aos jovens.
- *Do nicho ao lixo*, de Francisco Capuano Scarlato e Joel Arnaldo Pontin. São Paulo: Atual, 2009. (Série Meio ambiente).
  O livro aborda assuntos relevantes para a época atual, desde as fontes poluidoras, como os combustíveis fósseis, até os problemas gerados pelo acúmulo de lixo e o que fazer com ele. Além disso, os autores discutem outras questões essenciais na atualidade, como o gerenciamento do processo técnico, econômico e social que gera os impactos ambientais. Assim, ampliam-se os conhecimentos sobre chuva ácida, desmatamentos, inversão térmica, buraco na camada de ozônio e outros. A obra oferece ainda a possibilidade de realização de atividades interdisciplinares com Química.
- *Drogas*: mitos e verdades — uma história diferente, de Beatriz Carlini Marlatt. São Paulo: Ática, 2010. (Coleção De olho na ciência).
  A autora emprega um texto ficcional, sensível e adequado ao jovem leitor, para abordar o uso de drogas legais e ilegais e alguns dos comportamentos de risco praticados pelos jovens, como o desejo de experimentar emoções diferentes e desafiar a morte. O livro levanta questões importantes para a época atual e pode auxiliar professores, pais e, especialmente, os alunos do Ensino Médio.
- *Ética, cidadania e trabalho*, de Júlia Falivene Alves. São Paulo: Copidart, 2002.
  Nesse livro, a autora propõe a discussão de relevantes questões para a época atual, que favorecem o trabalho com o tema transversal Cidadania. O texto foi criado para servir de ponto de partida para a abordagem dos temas em sala de aula, sem a intenção de esgotá-los, mas, antes, de estimular questionamentos que auxiliem na formação de cidadãos tolerantes e conscientes de seus direitos e deveres. A apresentação dos temas é didática e objetiva, possibilitando um trabalho panorâmico sobre respeito, comportamento no trânsito, Estatuto da Criança e do Adolescente, ética profissional e outros assuntos.
- *Lixo e sustentabilidade*, de Sônia M. Muhringer, Rosana Rios e Michelle M. Shayer. São Paulo: Ática, 2013.
  Por meio de um texto ficcional, as autoras abordam os problemas decorrentes do acúmulo de lixo gerado pelas sociedades urbanas, o destino dado a esses resíduos e caminhos possíveis para a reciclagem, a conservação ambiental e a sustentabilidade. Tratam ainda da armazenagem do lixo radioativo, que traz sérios riscos ambientais. Há também informações sobre a quantidade de lixo gerada em várias cidades do mundo, diferentes tipos de lixo, possibilidades de destino e fontes geradoras de lixo. Essas informações são documentadas em tabelas, gráficos e infográficos, que oferecem oportunidade de trabalho com vários conteúdos matemáticos. O livro apresenta também atividades.
- *O massacre da natureza*, de Júlio José Chiavenato. São Paulo: Moderna, 2007.
  O livro faz uma abordagem panorâmica da exploração incontrolável da natureza pelo ser humano, especialmente pelas sociedades capitalistas, abrindo um espaço de questionamento e reflexão na sala de aula. Alguns dos temas abordados são: progresso *versus* devastação da natureza, uso de agrotóxicos e danos à saúde, energia atômica, a lucratividade da indústria de guerra, doenças causadas pela poluição, contaminação da água e outros assuntos relevantes à época atual. Possibilita o trabalho com pesquisa e conteúdos matemáticos. Traz também sugestões de atividades.
- *Redes de abuso*, de Tânia Alexandre Martinelli. São Paulo: Scipione, 2007.
  O livro trata de um tema extremamente atual: as redes de abuso infantojuvenil operadas pela internet. A autora introduz o assunto por meio de um texto ficcional que faz um alerta aos jovens, pais e professores para um tipo de crime cada vez mais comum e que pode ocorrer sem que percebamos, pois os *blogs*, salas de bate-papo e redes sociais são facilmente acessados pelos jovens. Uma leitura fundamental para todos.

9. Textos para reflexão sobre a educação

Apresentamos a seguir o *link* em que é possível acessar a proposta de projetos da coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, assim como alguns textos que certamente contribuirão para o aprimoramento do trabalho pedagógico e da prática educativa a ser desenvolvida em sala de aula e na escola.

◆ Proposta de projetos

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Água hoje e sempre*: consumo sustentável. São Paulo, 2004. Disponível em: <cenp.edunet.sp.gov.br/Agua/metodologia.asp>. Acesso em: 1º mar. 2016.

◆ *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem

Yves Chevallard, Mariana Bosch e Josep Gascón.
Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 200-206.

O caráter aberto da relação didática

Ao se formar uma comunidade de estudo em torno de um determinado tipo de problema, estabelece-se uma *relação didática* entre os estudantes e o coordenador de estudo. Essa relação torna-se "aberta", ao mesmo tempo, para os alunos e para o professor. Por um lado, os alunos, geralmente, não poderão conhecer de antemão o caminho que devem percorrer ao longo do estudo, nem entender as razões pelas quais o professor os leva para esse ou aquele tipo de problema, abordando-os com essa ou aquela técnica de resolução. Por outro lado, o professor também não será capaz de prever todas as dificuldades que poderão surgir ao longo do processo de estudo nem as reações dos alunos diante delas.

Essa dupla abertura é uma característica essencial da relação entre o professor de Matemática e seus alunos. Dentre as coisas que um professor ensina a seus alunos, existem algumas que ele conhece e outras que ignora — e talvez nunca poderá saber. O professor não pode prever com exatidão o que o aluno fará, nem tampouco o que aprenderá. De fato, toda tentativa de "fechar" a relação didática pode chegar a bloquear ou enfraquecer o processo de estudo, com o consequente empobrecimento e até mesmo a paralisação da aprendizagem.

Dentre os fenômenos relacionados com a tendência de fechar a relação didática, podemos destacar: a pouca consideração dada ao trabalho matemático do aluno (que não costuma ser considerado como um "verdadeiro" trabalho matemático); a concentração na aula das atividades matemáticas do aluno e sua grande dependência do professor; o papel excessivo que se atribui ao professor dentro do processo didático e, em última instância, o que denominamos de "irresponsabilidade matemática" dos alunos.

O ensino, como meio do processo didático, não deve pretender controlar de maneira absoluta o desenvolvimento desse processo. A relação didática é uma relação "aberta". À medida que o ensino de Matemática se organiza para tentar "fechar" essa relação, provoca um empobrecimento da aprendizagem matemática dos alunos.

O professor como coordenador de estudo

Vimos que o estudo da Matemática é uma atividade comunitária e que a relação didática que se estabelece no interior da comunidade de estudo é uma relação aberta.

Ao considerar o estudo como objetivo principal do processo didático, é possível vencer a excessiva dependência dos protagonistas com a instituição escolar. Nessa perspectiva, o ensino deixa de ser o objetivo último e começa a ter um papel de instrumento de apoio para o estudo, o que produz uma mudança fundamental na visão dos papéis de "professor" e de "aluno". O professor de Matemática já não é mais considerado *somente* como aquele que ensina, nem os alunos como meros sujeitos de um processo de aprendizagem.

Essa mudança de perspectiva é importante em vários sentidos. Em primeiro lugar, a atividade matemática a ser desenvolvida ganha um destaque especial: já não aparece (nem para os alunos, nem para o professor) como dependente, a todo momento, da vontade do professor, e seu desenvolvimento adquire condições próprias, com alguma independência dos protagonistas.

Em segundo lugar, a visão estanque do professor como "aquele que ensina" e do aluno como "aquele que aprende o que lhe é ensinado" pode evoluir para uma visão na qual os papéis de professor e de aluno são definidos de maneira menos rígida. Embora continue existindo uma assimetria entre ambos, aparecem novos pontos de contato, visto que agora a questão é realizar de maneira conjunta uma tarefa matemática.

Em terceiro lugar, é produzida uma importante mudança no equilíbrio das responsabilidades atribuídas tradicionalmente tanto para o professor como para o aluno. O professor já não tem como decidir a cada instante qual será a atividade pontual dos alunos e deixa de ser considerado o único (e principal) responsável pela atitude, motivação e tarefa deles. A crescente responsabilidade do aluno permite também, por exemplo, dar sentido e legitimidade a uma avaliação *externa* de seu trabalho (isto é, uma avaliação não elaborada e controlada pelo professor), na medida em que o estudo de uma obra matemática se torna mais objetivo e independente do critério do professor.

[...]

Em contrapartida, as responsabilidades do professor como matemático fiador do controle e guia de uma atividade genuinamente matemática tornam-se mais visíveis, o que contribui para diminuir o risco da "didatite". Em particular, o professor deverá conhecer aquelas questões que definem a "razão de ser" das obras a serem estudadas, assim como as possíveis maneiras concretas de gerar, sob determinadas condições, as principais organizações matemáticas (tipos de problemas, técnicas, tecnologias e teorias) que constituem a obra estudada. Essa "reconstrução artificial" dos conhecimentos matemáticos foi desenvolvida pela *teoria das situações didáticas*.

Do mesmo modo, o aluno, na qualidade de estudante, pode se considerar menos dependente do professor ao ter um referente externo na atividade matemática que realiza. Isso lhe proporciona maior liberdade para administrar seu próprio estudo e utilizar meios de estudo complementares ao ensino, como são, por exemplo, os livros de consulta, as pesquisas pessoais, os intercâmbios com os colegas etc.

Quando se considera o estudo como o objetivo principal do processo didático, torna-se muito mais fácil transferir para o aluno uma parte da responsabilidade matemática atribuída, hoje em dia, exclusivamente ao professor. Essa nova divisão de responsabilidades atribui ao professor o papel de "coordenador de estudo", possibilita que os alunos reconheçam o professor como "matemático" e diminui o risco da "didatite".

Contrato didático, contrato pedagógico e contrato escolar

As mudanças descritas no item anterior são mudanças da relação didática, isto é, da relação que se estabelece dentro de um sistema didático entre os estudantes e o coordenador de estudo em relação às questões estudadas. Trata-se, portanto, de mudanças nas cláusulas que regem o *contrato didático*.

Mas o contrato didático não rege todos os aspectos da relação estabelecida entre os alunos e o professor. Existe, primeiro, um contrato mais geral e visível, o contrato *pedagógico*, que regula as interações entre alunos e professores, as quais não dependem do conteúdo do estudo. Ao mesmo tempo, o contrato pedagógico aparece como uma parte específica de um contrato mais amplo, o contrato *escolar*, que governa essas instituições sociais particulares, que chamamos de *escolas*.

Para situar esses diferentes contratos, é necessário partir da noção genérica de escola. A palavra escola vem, por intermédio do latim *schola*, da palavra grega *skholé*, que significa, na Grécia antiga, ócio, mas que muito rapidamente passou a designar todo aquele tempo livre que, fora do trabalho, era dedicado ao estudo. A noção de escola remete, então, à ideia de uma instituição na qual, ao se distanciar de suas atividades normais — em particular do trabalho — uma pessoa podia se instruir mediante o estudo. A expressão *escolaridade obrigatória* significa, em princípio, a obrigação de interromper suas atividades habituais para dedicar esse tempo livre para se instruir.

Trabalho, ócio e obrigação escolar

Quando se estabeleceu a obrigatoriedade da instrução, o objetivo era impor um tempo de escolaridade — de "ócio estudioso" — àquelas crianças que trabalhavam o dia todo no campo ou na fábrica.

Hoje em dia, a instrução obrigatória (entendida de um ponto de vista mais profissional ou ético do que legal) também envolve os adultos, que devem cada vez mais interromper seu trabalho durante um curto período de tempo para renovar seus conhecimentos profissionais, acompanhando cursos de formação. Para a maioria dos profissionais, a obrigação de "ir à escola" ou de "voltar à escola" parece que tende a se estender para toda a vida ativa da pessoa.

É o *contrato escolar* aquele que, ao definir a escola, define também a posição genérica do aluno: nesse sentido, o aluno é toda aquela pessoa que, interrompendo suas atividades "normais", vai a uma escola para se instruir; uma pessoa se transforma em aluno ao entrar na escola. Na realidade, pelo fato de ser aluno, pode fazer muitas coisas que não poderiam ser feitas em situação normal. A escola proporciona aos alunos um salvo-conduto para ter acesso de maneira legítima a certas obras da sociedade que normalmente não lhes são acessíveis. Por exemplo, um cidadão qualquer não pode, sem mais nem menos, entrevistar um lojista do bairro sobre sua atividade comercial. Mas um grupo de alunos do Ensino Fundamental, que tem de fazer um trabalho sobre os problemas dos comerciantes na gestão do I.V.A [imposto sobre o valor acrescentado — em Portugal], fica automaticamente legitimado para realizar essa entrevista. Do mesmo modo, sem a mediação da escola, muitas crianças não poderiam nunca ter acesso à obra musical de Mozart, porque se interessar por essa obra poderia parecer algo ilegítimo em seu meio social. A posição de aluno proporciona, talvez, mais liberdade que nenhuma outra posição em relação às normas sociais e culturais de seu meio: paradoxalmente, a *obrigação* escolar é produtora de *liberdade*.

Então, para ter acesso a essas obras, a escola proporciona a seus alunos alguns "guias" — os professores — para que desempenhem o papel de "pedagogos". A palavra "pedagogo" originalmente designava, na Grécia antiga, o escravo que conduzia o jovem aluno para a escola e lhe servia de preceptor. Nós a utilizamos aqui para designar o professor como a pessoa encarregada de *conduzir o aluno às obras* que ele deve estudar. O *contrato pedagógico* regula, então, os aspectos gerais que afetam o ambiente de estudo, isto é, os aspectos não específicos da obra a ser estudada. O contrato pedagógico se parece com o sistema operacional de um computador — que seria a escola —, no sentido de que possibilita o funcionamento de diferentes programas — os contratos didáticos — que permitem a realização de tarefas específicas de estudo. Assim, por exemplo, o contrato pedagógico exige do aluno uma confiança total no professor, nas decisões que ele toma, e um respeito à sua autoridade. Ao mesmo tempo, também exige do professor uma atenção e responsabilidade especiais em relação ao aluno e às suas condições de trabalho.

O escolar, o pedagógico, o didático

O professor para de escrever no quadro e se vira para os alunos, irritado, porque eles não param de falar. A origem do burburinho pode ser encontrada em cada um dos três níveis indicados.

Pode ser que sejam alunos relativamente indiferentes à instituição escolar, isto é, alunos "não civilizados" em relação com essa instituição e que rejeitam o contrato escolar.

Também pode ser que os alunos rejeitem o "estilo" pedagógico do professor, porque parece menosprezá-los ou porque não tem suficiente autoridade etc.

Mas, talvez, o burburinho seja resposta a uma ruptura do contrato didático por parte do professor: talvez esteja resolvendo o problema com uma técnica que os alunos não conhecem; ou ainda que não mostra claramente o que os alunos deverão fazer por si mesmos em relação a isso; ou, talvez, aja como se os alunos tivessem certas informações que eles próprios desconhecem etc. A observação de aulas mostra que esta é a origem mais frequente dos burburinhos espontâneos, que costumam surgir em sala de aula.

O contrato didático é acionado quando, sob a coordenação do professor, o aluno entra, verdadeiramente, em contato com uma obra concreta para estudá-la e a apreende. A passagem do *contrato pedagógico* para o *contrato didático* acontece quando a relação entre dois (professor e aluno) se transforma realmente em uma relação entre três: o aluno, a obra a ser estudada e o professor como coordenador de estudo. Se retomarmos a metáfora anterior, o contrato didático seria o programa de computador que, em um sistema operacional adequado, permite realizar tarefas concretas (embora não *qualquer* tipo de tarefa).

Vemos, então, que o contrato didático somente pode existir quando existe um contrato pedagógico e, mais do que isso, quando existe um contrato escolar. Na realidade, o contrato escolar e o contrato pedagógico, mediante seu conteúdo e a maneira como são interpretados, afetam em grande parte os *tipos de contratos didáticos possíveis*, embora estes sejam principalmente determinados pela obra a ser estudada.

Pode acontecer, por exemplo, que o aluno não aceite bem o contrato escolar, porque não entende bem as razões de ser da escola. Mas, mesmo assim, pode ser também que aceite, ao mesmo tempo, o contrato pedagógico que o aproxima desse ou daquele professor: o aluno gosta de estar com seu professor ou professora, mas não gosta do que fazem na escola. Também pode acontecer que o aluno se envolva com prazer no contrato escolar, mas não aceite bem o contrato pedagógico, que faz com que ele dependa de sua relação com o professor para ter acesso às obras a serem estudadas.

Muitos "movimentos inovadores" tentam, sobretudo, modificar o contrato pedagógico ou o contrato escolar, com o objetivo de tornar viáveis determinados contratos didáticos. Mas sabemos que dispor de um computador mais potente ou com um sistema operacional melhor ainda deixa em aberto o problema da construção de programas eficazes para a realização de determinados tipos de tarefas. Sem esquecer a interdependência, entre os três níveis (o escolar, o pedagógico e o didático), cabe lembrar que o contrato didático é a pedra de toque de toda a organização escolar.

◆ Meu Professor de Matemática e outras histórias

Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira
de Matemática, 1991. p. 4-6.

Meu Professor de Matemática

[...]

A Matemática ensinada por Benedito de Morais* não era apenas um conjunto de regras e receitas válidas por decreto (o que ele chamava de método “ou crê ou morre”) nem tampouco um sistema dedutivo formal, vazio de significado. Era qualquer coisa bem próxima da realidade e das aplicações, porém organizada com definições, exemplos e demonstrações. Algumas dessas definições apelavam abertamente para a experiência intuitiva e certas de suas demonstrações também lançavam mão de argumentos não contidos nos axiomas. Isto escandalizaria um purista lógico, mas tinha o grande mérito de assentar a Matemática em bases concretas, próximas da realidade. Devo deixar claro que suas eventuais transgressões ao rigor não continham nada fundamentalmente errado: nunca subtraiu desigualdades do mesmo sentido, nunca dividiu por zero e jamais considerou raiz quadrada real de um número negativo. Simplesmente não fazia cavalo de batalha em torno de certos fatos óbvios e verdadeiros que qualquer aluno de ginásio estaria disposto a aceitar sem discutir. Por exemplo: se o ponto *A* está no interior e o ponto *B* está no exterior de uma circunferência, então ele concluía que o segmento *AB* tem exatamente um ponto em comum com essa circunferência, sem tecer maiores considerações a respeito da continuidade da reta, nem sobre a convexidade do círculo.

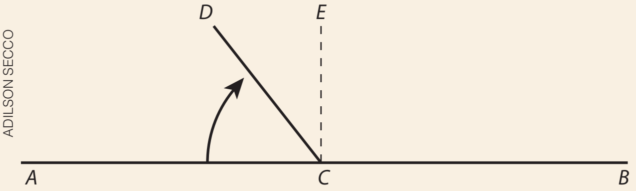
Para maior clareza, vejamos um exemplo de definição e outro de demonstração, tirados de suas aulas, segundo as recordo.

Números: “Número inteiro é o resultado de uma contagem de objetos. Números ocorrem, mais geralmente, como resultados de medidas. Medir uma grandeza é compará-la com outra de mesma espécie chamada *unidade*. Se uma grandeza *A* está contida exatamente, numa grandeza *B*, um número inteiro de vezes, diz-se que *B* é um *múltiplo* de *A* e *A* é um *submúltiplo* de *B*. Se algum submúltiplo de *A* é também submúltiplo de *B*, então as grandezas *A* e *B* dizem-se *comensuráveis*. Caso contrário, *A* e *B* dizem-se *incomensuráveis*. Um número racional é a medida de uma grandeza comensurável com a unidade. Quando uma grandeza é incomensurável com a unidade, sua medida é um número irracional. Exemplos: o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis; o diâmetro e a circunferência também são incomensuráveis. Para algumas grandezas, há também uma noção de sentido, positivo ou negativo. (Exemplos: temperatura, saldo bancário, corrente elétrica, altitude etc.) A medida dessas grandezas é um número relativo, isto é, provido de um sinal $+$ ou $-$”.

Naturalmente, essas noções não eram apresentadas assim, de enxurrada, mas intercaladas com exemplos e explicações. O importante é notar nas definições acima uma conexão entre a Matemática e a realidade, uma explicação concreta da noção de número irracional e uma atitude honesta, direta e desmitificadora. Essas qualidades objetivas, presentes nos bons compêndios franceses de Matemática do começo do século 20 e sensatamente copiadas em nossos melhores da época, parecem ter sido erradamente varridas junto com o entulho que aqueles compêndios também continham. Foram substituídas pelo formalismo pedante e inócuo da “Matemática moderna” que hoje, em declínio acentuado, deu lugar a uma penosa indefinição de personalidade existente na maioria dos textos atuais.

A propósito, Benedito de Morais nunca adotou nenhum dos textos existentes. Recomendava-os, mas não os seguia. Em primeiro lugar, porque fazia tudo de modo mais simples e claro. E depois, mesmo que quisesse adotar um deles, isto seria incompatível com seu hábito de dar todo o programa, principalmente no chamado “curso colegial”.

Um teorema: *Por um ponto dado numa reta passa uma e somente uma perpendicular a essa reta.*



ADILSON SECCO

Demonstração: Pelo ponto *C* da reta $\overleftrightarrow{AB}$, tracemos uma semirreta $\overrightarrow{CD}$ de modo que o ângulo $D\hat{C}A$ seja menor do que o ângulo $D\hat{C}B$. Fazendo girar a semirreta $\overrightarrow{CD}$ em torno do ponto *C*, na direção da seta, vemos que o ângulo $D\hat{C}A$ aumenta enquanto $D\hat{C}B$ diminui até ficar menor do que $D\hat{C}A$. Logo, deve haver uma posição $\overleftrightarrow{CE}$ na qual os dois ângulos, $A\hat{C}E$ e $E\hat{C}B$, são iguais. Então, por definição, $\overleftrightarrow{CE}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Em qualquer outra posição $\overleftrightarrow{CD}$, ou teremos $D\hat{C}A < E\hat{C}A < D\hat{C}B$, ou então $D\hat{C}B < E\hat{C}B < D\hat{C}A$. Em qualquer caso, os dois ângulos, $D\hat{C}A$ e $D\hat{C}B$, são diferentes; logo $\overleftrightarrow{CD}$ não é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

Como aluno do terceiro ano ginasial, esta demonstração me satisfez plenamente. Mais do que isso: além de sua elegância, nela eu via um novo tipo de raciocínio (que hoje reconheço como o teorema do valor intermediário), tão marcante que ainda me lembro dos seus detalhes.

Mais tarde, ao prosseguir os estudos, me disseram que esta demonstração estava errada porque se baseava na ideia de movimento e na hipótese de continuidade da grandeza ângulo, coisas que não constavam dos axiomas, postulados e noções fundamentais que se admitiram no início da teoria, coisas que não tinham sido cuidadosamente discutidas antes, logo não poderiam ser utilizadas em demonstrações.

A crítica acima seria válida se considerássemos a Geometria como um sistema lógico-dedutivo, onde é feita uma lista completa dos axiomas e dos conceitos básicos não definidos, a partir da qual se dão todas as definições e se provam todas as afirmações, segundo os padrões impecáveis da lógica formal. Como nos “Fundamentos da Geometria”, de Hilbert. Acontece, porém, que uma tal atitude não tem o menor cabimento no âmbito da Escola Secundária. A demonstração ali tem a finalidade de convencer o aluno por meio de argumentos precisos e claros, os quais poderão eventualmente valer-se de fatos aceitáveis (ainda que não explicitamente discutidos) que pertençam à experiência intuitiva e que possam ser provados rigorosamente em cursos mais avançados. Imperdoável seria utilizar-se de sofismas, raciocínios logicamente incorretos ou fatos matematicamente absurdos. Estou afirmando aqui que considero plenamente admissível, numa demonstração, lançar mão de resultados verdadeiros, intuitivamente óbvios, que são considerados evidentes pelos alunos, mesmo que não tenham sido esmiuçados logicamente. De resto, é assim que fazem os matemáticos profissionais em seus trabalhos de pesquisa.

No exemplo em questão, o argumento usado para demonstrar o teorema é absolutamente correto e fácil de justificar com todo o rigor se utilizarmos coordenadas cartesianas ou se interpretarmos os pontos do plano como números complexos.

Assim, a demonstração acima para mim estava certa, depois estava errada e, afinal de contas, está certa. (Como aquela história do motorista, que pediu ao amigo: “Ponha a cabeça fora da janela e veja se a luz do pisca-pisca está acendendo”. Resposta: “Está, não está, está, não está...”)

[...]

(*) Benedito de Morais: ex-professor de Matemática do autor, lecionou em Maceió.

Parte específica

I. Atividades extras

Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados

Exercícios

1. Para preparar um refresco, devem ser adicionadas 5 partes de água para cada 2 partes de suco concentrado.

a) Escreva a razão entre a quantidade de partes de água e a quantidade de partes de suco concentrado que devem ser utilizadas no preparo desse refresco.

b) Sabendo que para fazer certa quantidade desse refresco foi usado 1 litro de água, responda: quantos litros de suco concentrado foram utilizados?

c) Quantos copos de água serão necessários para preparar esse refresco usando 3 copos de suco concentrado?

d) Se em uma jarra cabem 3,5 litros de refresco, quanto de água e de suco concentrado serão usados para preparar essa quantidade de refresco?

2. Uma agência publicitária realizou uma pesquisa com adolescentes com idade entre 13 e 16 anos. Para realizar essa pesquisa, 500 adolescentes de cada uma das 27 unidades federativas brasileiras forneceram informações pessoais, como: sexo, idade e preferências em relação a gênero musical, esportes, filmes e programas de televisão.

a) Qual é a população da pesquisa?

b) Qual é o tamanho da amostra considerada?

c) Identifique as variáveis dessa pesquisa e classifique-as em qualitativa ou quantitativa.

3. A tabela abaixo representa o resultado de uma pesquisa feita por Carlos com os alunos de sua classe.

Tempo médio de permanência em *sites* de relacionamento

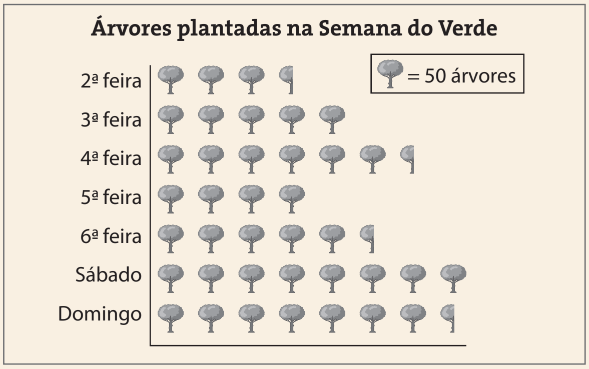
Intervalo (horas)	Número de alunos	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
Até 1				7,5%
Mais de 1, até 2	𝍸 IIII	9	0,225	22,5%
Mais de 2, até 3	𝍸 𝍸 𝍸			
Mais de 3, até 4	𝍸 III			
Mais de 4		5		
Total				

Dados obtidos por Carlos.

a) Complete a tabela com os dados que faltam, sabendo que foram entrevistados 40 alunos.

b) Faça um gráfico de colunas relacionando o número de alunos com o tempo de permanência, em hora, nesses *sites*.

4. O pictograma abaixo mostra o número de árvores plantadas em uma cidade, durante a Semana do Verde, pelos participantes da campanha "Plante uma árvore".



ADILSON SECCO

Fonte: Campanha "Plante uma árvore".

Em grupo, façam o que se pede.

a) Em que dia foram plantadas mais árvores? Quantas? E em que dia foram plantadas menos árvores? Quantas?

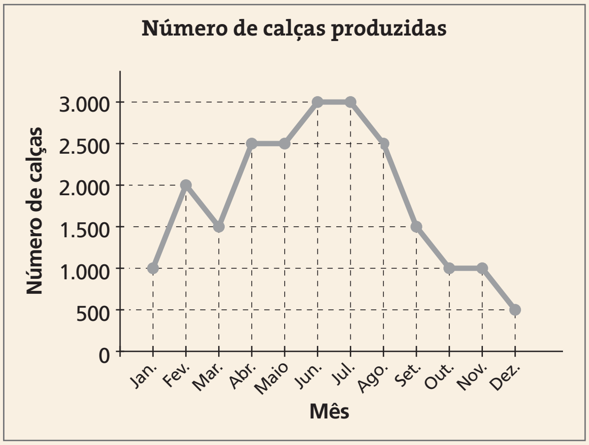
b) Quantas árvores foram plantadas no fim de semana?

c) Quantas árvores foram plantadas na Semana do Verde?

d) Construam uma tabela de frequência de árvores plantadas, em cada dia da semana, com as frequências absoluta, relativa e percentual.

e) Construam um gráfico de linhas utilizando as informações dadas no pictograma.

5. O gráfico apresenta o número de calças produzidas pela confecção "A elegante" durante um ano.



ADILSON SECCO

Fonte: Confecções "A elegante".

a) Em que mês a produção foi maior? E menor?

b) Entre quais meses ocorreu o maior crescimento na produção? De quanto? E o maior decrescimento? De quanto?

c) Quantas calças foram produzidas durante esse ano?

d) Se o custo de cada calça é R$ 55,00, por quanto deve ser vendida cada uma para que o lucro desse ano seja R$ 594.000,00?

◆ Resoluções

1. a) $\dfrac{\text{quantidade de partes de água}}{\text{quantidade de partes de suco concentrado}} = \dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow 5 \cdot x = 2 \Rightarrow x = 0{,}4$

Foi utilizado 0,4 ℓ de suco concentrado.

c) $\dfrac{5}{2} = \dfrac{x}{3} \Rightarrow 2 \cdot x = 15 \Rightarrow x = 7{,}5$

Serão necessários 7,5 copos de água.

d) • quantidade de água:

$\dfrac{5}{7} \cdot 3{,}5 = \dfrac{17{,}5}{7} = 2{,}5$

• quantidade de suco concentrado:

$\dfrac{2}{7} \cdot 3{,}5 = \dfrac{7}{7} = 1$

Serão usados 2,5 ℓ de água e 1 ℓ de suco concentrado.

2. a) A população da pesquisa são os adolescentes entre 13 e 16 anos de idade de todos os estados brasileiros e do Distrito Federal.

b) $500 \cdot 27 = 13.500$

A amostra considerada tem 13.500 adolescentes.

c) Sexo, gênero musical, esportes, filmes e programas de televisão: variável qualitativa; idade: variável quantitativa.

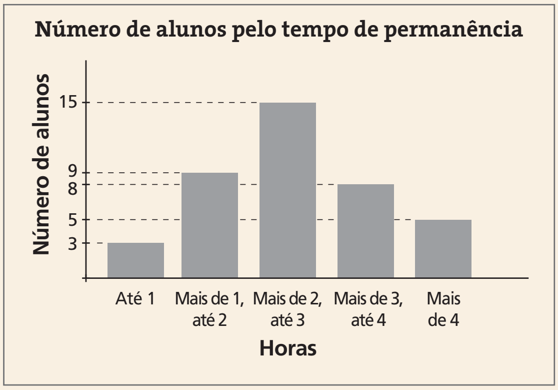
3. a)

Tempo médio de permanência em *sites* de relacionamento

Intervalo (horas)	Número de alunos	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
Até 1	III	3	0,075	7,5%
Mais de 1, até 2	𝍸 IIII	9	0,225	22,5%
Mais de 2, até 3	𝍸 𝍸 𝍸	15	0,375	37,5%
Mais de 3, até 4	𝍸 III	8	0,200	20%
Mais de 4	𝍸	5	0,125	12,5%
Total		40	1,000	100%

Dados obtidos por Carlos.

b)



ADILSON SECCO

Dados obtidos por Carlos.

4. a) Sábado; $8 \cdot 50 = 400$

Segunda-feira; $3{,}5 \cdot 50 = 175$

Foram plantadas mais árvores no sábado (400 árvores) e menos árvores na segunda-feira (175 árvores).

b) $8 \cdot 50 + 7{,}5 \cdot 50 = 400 + 375 = 775$

No fim de semana foram plantadas 775 árvores.

c) $175 + 250 + 325 + 200 + 275 + 400 + 375 = 2.000$

Na Semana do Verde foram plantadas 2.000 árvores.

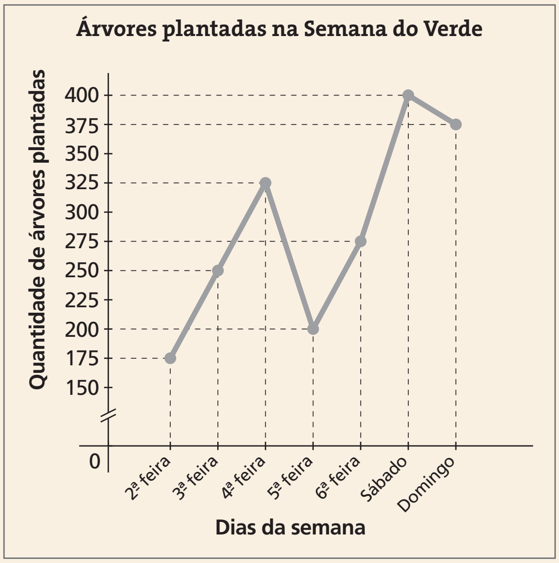
d)

Árvores plantadas na Semana do Verde

Dias da semana	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
2ª feira	175	0,0875	8,75%
3ª feira	250	0,1250	12,50%
4ª feira	325	0,1625	16,25%
5ª feira	200	0,1000	10,00%
6ª feira	275	0,1375	13,75%
Sábado	400	0,2000	20,00%
Domingo	375	0,1875	18,75%
Total	2.000	1,0000	100,00%

Fonte: Campanha “Plante uma árvore”.

e)



ADILSON SECCO

Fonte: Campanha “Plante uma árvore”.

Comentário: Observe que, no gráfico, foi usado o recurso da interrupção no eixo vertical.

5. a) A produção foi maior nos meses de junho e julho; foi menor no mês de dezembro.

b) O maior crescimento na produção ocorreu de janeiro a fevereiro e de março a abril: 1.000 peças a mais em cada período.

O maior decrescimento na produção ocorreu de agosto a setembro: 1.000 calças.

c) $1.000 + 2.000 + 1.500 + 2.500 + 2.500 + 3.000 +$
$+ 3.000 + 2.500 + 1.500 + 1.000 + 1.000 + 500 =$
$= 22.000$

Foram produzidas 22.000 calças durante esse ano.

d) $22.000 \cdot 55 = 1.210.000$

$1.210.000 + 594.000 = 1.804.000$

$1.804.000 : 22.000 = 82$

Cada calça deve ser vendida por R$ 82,00.

◆ Capítulo 2 – Conjuntos

Exercícios

1. Considere o conjunto A formado pelos nomes dos países da América do Sul.

a) Enumere todos os elementos de A.

b) Escreva o conjunto B, formado por todos os elementos de A que se iniciam pela letra B.

2. Considere os seguintes conjuntos:

- $U = \{x \mid x$ é um número primo$\}$
- $A = \{x \mid x \in U$ e x é par$\}$
- $B = \{x \mid x \in U$ e x é múltiplo de 2 e de 3$\}$

Qual deles é vazio e qual é unitário?

3. Chama-se número palíndromo aquele que tem a mesma leitura da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda (por exemplo, o número 4.114). Sabendo disso, considere o conjunto A, formado por todos os números palíndromos que contêm três algarismos.

a) Escreva o subconjunto B, formado pelos elementos de A menores que 200.

b) Quantos são os elementos de B?

c) Quantos são os elementos de A?

4. Considere os conjuntos:

- $A = \{x \mid x$ é número natural par$\}$
- $B = \{x \mid x$ é primo$\}$
- $C = \{x \mid x$ é número natural múltiplo de 3$\}$

a) Quantos elementos tem a intersecção de A e B?

b) Quantos elementos tem a intersecção de B e C?

5. Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$, determine:

a) $A \cup B$ **c)** $A - B$

b) $A \cap B$ **d)** $(A \cup B) - (A \cap B)$

6. Uma empresa produziu dois novos sabores de refrigerante, A e B, mas pretende lançar apenas um deles no mercado. Para decidir qual deles será lançado, foi realizada uma pesquisa de satisfação em supermercados de todo o país. Após os refrigerantes serem experimentados por 3.000 consumidores, verificou-se o seguinte resultado para a pesquisa:

- 55% dos clientes aprovaram o sabor A;
- 60% dos clientes aprovaram o sabor B;
- alguns consumidores gostaram igualmente dos dois sabores.

Agora, responda:

a) Quantos clientes disseram ter gostado igualmente dos sabores A e B?

b) Quantos aprovaram somente o sabor A?

7. Sejam a e b dois números reais quaisquer. Verifique em que condições os números abaixo são reais.

a) $a - b$ **c)** $\sqrt{b}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{5 - a}}{b}$

b) $\dfrac{a}{b}$ **d)** $a^2 + b^2$ **f)** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{-3 - b}}$

8. Dados os intervalos $A =]-\infty, 3]$, $B = [-2, 1[$ e $C = [0, +\infty[$, determine:

a) $A \cup B$ **c)** $C - A$

b) $B \cap C$ **d)** $(B \cap C) \cap A$

◆ Resoluções

1. a) A = {Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Guiana, Paraguai, Peru, Suriname, Uruguai, Venezuela}

b) B = {Brasil, Bolívia}

2. O conjunto A é unitário, pois $A = \{2\}$. O conjunto B é vazio, pois nenhum número primo é múltiplo de 2 e de 3 simultaneamente.

3. a) $B = \{101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191\}$

b) 10 elementos

c) Há 10 elementos menores que 200; entre 200 e 300, também há 10; e assim por diante. Total: 90 elementos.

4. a) $A \cap B = \{2\}$; logo, tem um elemento.

b) $B \cap C = \{3\}$; logo, também tem um elemento.

5. a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$

b) $A \cap B = \{a, e\}$

c) $A - B = \{i, o, u\}$

d) $(A \cup B) - (A \cap B) = \{b, c, d, i, o, u\}$

6. a) Sabe-se que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Nesse caso, temos:

- $n(A \cup B) = 3.000 \rightarrow$ número total de clientes que experimentaram os dois sabores (A e B)
- $n(A)$ é igual a 55% do total de clientes; então:

$$n(A) = \frac{55}{100} \cdot 3.000 \Rightarrow n(A) = 1.650$$

- $n(B)$ é igual a 60% do total de clientes; então:

$$n(B) = \frac{60}{100} \cdot 3.000 \Rightarrow n(B) = 1.800$$

Logo:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$3.000 = 1.650 + 1.800 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 450$

Portanto, 450 clientes gostaram dos dois sabores.

b) O número de clientes procurado é igual à diferença entre os que aprovaram o sabor A e aqueles que aprovaram os dois sabores, ou seja, 1.650 − 450. Portanto, 1.200 clientes aprovaram apenas o sabor A.

7. a) $a - b$ é real para quaisquer a e b reais.

b) $\dfrac{a}{b}$ é real para quaisquer a e b, com $b \neq 0$.

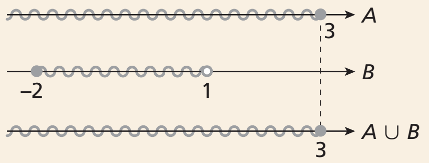
c) O número $\sqrt{b}$ é real para qualquer $b \geqslant 0$.

d) O número $a^2 + b^2$ é real para quaisquer a e b reais.

e) Nesse caso, $a \leqslant 5$ e $b \neq 0$.

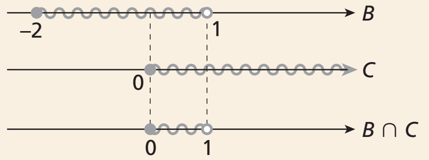
f) Nesse caso, $a \geqslant 0$ e $b \neq -3$.

8. a)



$A \cup B =]-\infty, 3]$

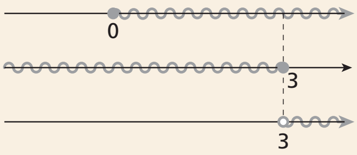
b)



$B \cap C = [0, 1[$

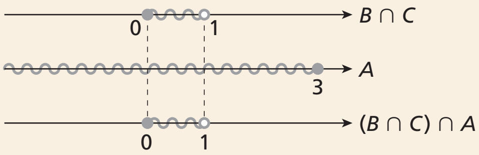
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

c)



$C - A =]3, +\infty[$

d)



$(B \cap C) \cap A = [0, 1[$

◆ Capítulo 3 – Funções

Exercícios

1. Cada unidade de determinado sorvete de palito custa R$ 3,50. Como o sorvete costuma ser muito procurado, o sorveteiro resolveu fazer uma tabela com o valor a pagar dependendo da quantidade vendida.

Quantidade de sorvetes	Valor a pagar (R$)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
4	14,00
5	17,50
6	21,00

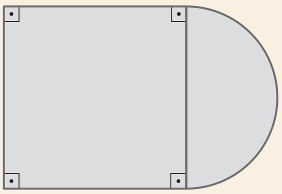
Dados obtidos pelo sorveteiro.

a) Quanto alguém pagará se comprar 10 desses sorvetes?

b) Um senhor comprou sorvetes para ele e para seus netos. Se ele pagou R$ 45,50, quantos sorvetes comprou?

c) Qual é o valor a pagar por uma compra de *n* sorvetes?

2. Considere uma figura geométrica que pode ter sua área decomposta em um quadrado e um semicírculo, como a indicada a seguir.



a) Qual é a área da figura, se o lado do quadrado mede 5 cm?

b) E se o lado do quadrado medir 3 cm?

c) Considerando o lado do quadrado com uma medida *x* qualquer, escreva uma fórmula que determine a área dessa figura em função de *x*.

$\left(\textit{Dica}: A_{\text{semicírculo}} = \dfrac{\pi r^2}{2}, \text{ em que } r \text{ é o raio do semicírculo.}\right)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3. Considere a função *f*, cuja lei de formação é dada por:

$f(x) = \dfrac{3x + 1}{2}$

a) Escreva o domínio e o contradomínio dessa função.

b) Determine a imagem de *x* para:

- $x = -2$
- $x = 0$
- $x = 1$

4. Determine, quando possível, os zeros reais de cada uma das funções abaixo.

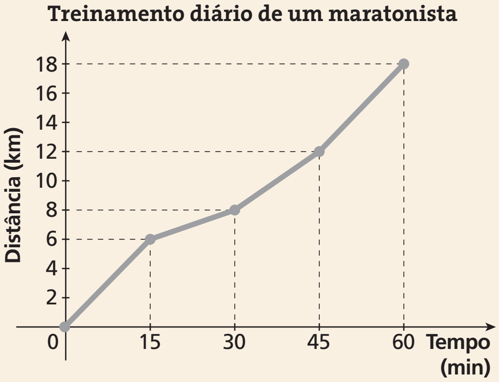
a) $f(x) = 2x^2 + x - 6$

b) $g(x) = x^2 + 4$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $i(x) = 3x + 4$

5. O gráfico a seguir apresenta a distância, em quilômetro, percorrida por um maratonista ao longo dos 60 minutos de seu treinamento diário.


Treinamento diário de um maratonista

a) Quantos quilômetros o maratonista já havia percorrido após 45 minutos de treino?

b) Indique quantos quilômetros o maratonista percorreu em cada um dos seguintes intervalos de treinamento:

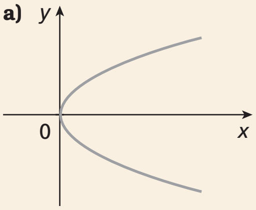
- primeiros 15 minutos;
- de 15 min a 30 min;
- de 30 min a 45 min;
- de 45 min a 60 min.

c) Considerando que a velocidade média desse atleta, durante esse treinamento, pode ser calculada dividindo-se a distância total percorrida pelo tempo de duração do treino, calcule-a.

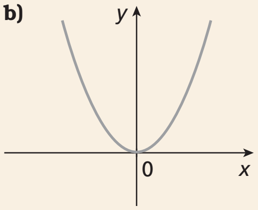
6. Construa o gráfico da função $f: A \rightarrow B$ dada pela lei $f(x) = -x + 4$, em que $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

7. Considerando $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$, em quais itens o gráfico representa uma função?

a)

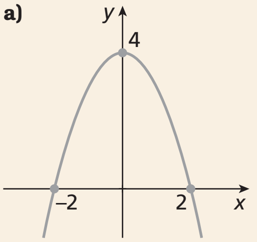


b)

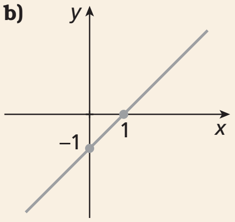


8. Considerando o gráfico das funções a seguir, identifique os intervalos de crescimento e decrescimento em cada caso.

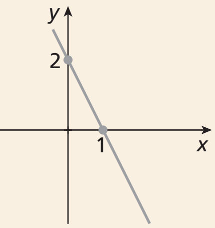
a)



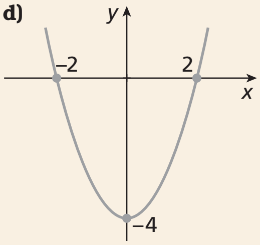
b)



c)

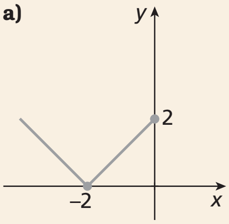


d)

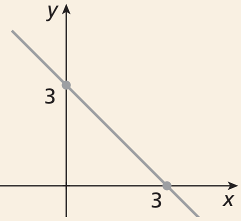


9. Determine, quando possível, o valor máximo ou mínimo das funções, definidas de ℝ em ℝ, representadas pelos seguintes gráficos:

a)

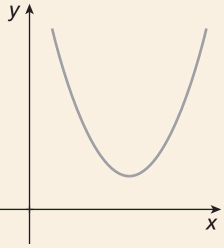


b)

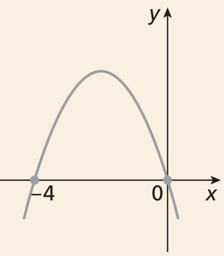


10. Faça o estudo do sinal das funções, definidas de ℝ em ℝ, representadas nos gráficos a seguir.

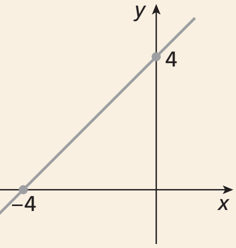
a)



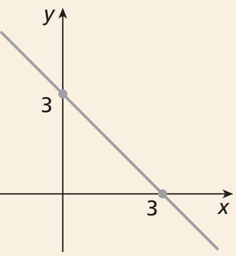
b)



c)



d)



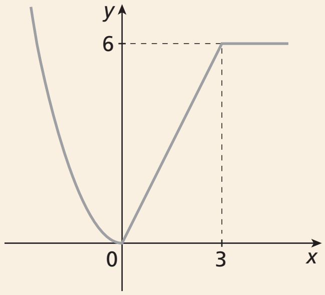
11. Considerando a função polinomial g tal que $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$, responda:

a) Qual é o grau do polinômio que expressa a função g?

b) Quais são os coeficientes dessa função?

12. Observe a lei de formação e o gráfico da função f de ℝ em ℝ para responder às questões.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leqslant 0 \\ 2x, \text{ se } 0 < x \leqslant 3 \\ 6, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$



a) Qual é o conjunto imagem de f?

b) Para quais valores de x a função é constante?

c) Em quais intervalos do domínio a função f é decrescente?

d) Quantos zeros reais tem a função f?

13. Considere a função $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dada pela lei $f(x) = 2x$.

a) A função f é bijetora?

b) Existe a função inversa de f? Justifique.

14. Considere a função g, dada pela lei $g(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$.

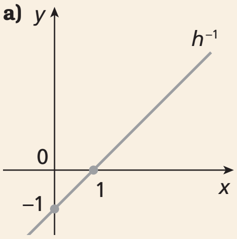
a) Obtenha a lei da função g^{-1}.

b) Escreva o conjunto domínio de g e de g^{-1}.

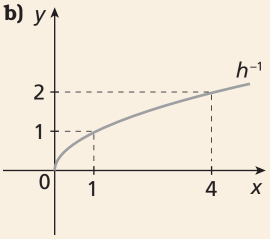
c) Escreva o conjunto imagem de g e de g^{-1}.

15. Para cada item, faça o esboço do gráfico da função h baseando-se no gráfico da inversa h^{-1} dado.

a)



b)



◆ Resoluções

1. **a)** $10 \cdot 3{,}50 = 35$

Logo, a pessoa pagará R$ 35,00 por 10 sorvetes.

b) $45{,}50 : 3{,}50 = 13$

O senhor comprou 13 sorvetes.

c) Representando o valor pago por v e a quantidade de sorvetes por n, temos $v = 3{,}5n$.

2. **a)** Como a figura é decomposta em um quadrado e em um semicírculo, temos:

$$A_{\text{figura}} = A_{\text{quadrado}} + A_{\text{semicírculo}} = 5^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}$$

$$A_{\text{figura}} = 25 + \frac{25\pi}{8} = \frac{200 + 25\pi}{8}$$

b) $$A_{\text{figura}} = 3^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} = 9 + \frac{9\pi}{8} = \frac{72 + 9\pi}{8}$$

c) $$A_{\text{figura}} = x^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{8x^2 + \pi x^2}{8}$$

3. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$; $CD(f) = \mathbb{R}$

b)
- $f(-2) = \dfrac{3 \cdot (-2) + 1}{2} = \dfrac{-5}{2}$
- $f(0) = \dfrac{3 \cdot 0 + 1}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $f(1) = \dfrac{3 \cdot 1 + 1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

4. **a)** $2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = -2$

Logo, os zeros reais da função f são $\dfrac{3}{2}$ e -2.

b) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

Não existe x real que satisfaça essa igualdade. Logo, a função g não tem zeros reais.

c) $\dfrac{1}{x^2} = 0$

Não existe x real que satisfaça essa igualdade. Logo, a função h não tem zeros reais.

d) $3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{4}{3}$

Logo, o zero real da função i é $-\dfrac{4}{3}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5. **a)** 12 quilômetros

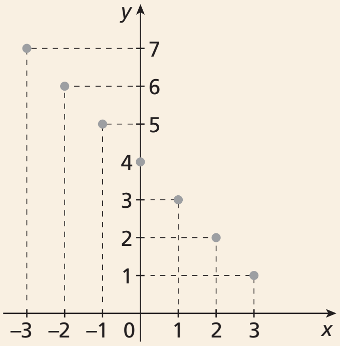
b)
- 6 quilômetros
- 2 quilômetros
- 4 quilômetros
- 6 quilômetros

c) $V_{\text{média}} = \frac{18}{60} = 0{,}30$

Portanto, a velocidade média do atleta durante esse treino foi 0,30 km/min.

6.

x	*f*(*x*)
−3	7
−2	6
−1	5
0	4
1	3
2	2
3	1



7. O gráfico do item **b** representa função.

8. **a)** Crescimento: $x < 0$; decrescimento: $x > 0$

b) Crescimento: $x \in \mathbb{R}$; decrescimento: não existe nenhum intervalo de x em que a função seja decrescente.

c) Crescimento: não existe nenhum intervalo de x em que a função seja crescente; decrescimento: $x \in \mathbb{R}$

d) Crescimento: $x > 0$; decrescimento: $x < 0$

9. **a)** valor mínimo: 0

b) A função não apresenta valor máximo nem valor mínimo.

10. **a)** A função é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) A função é positiva para $-4 < x < 0$ e negativa para $x < -4$ e $x > 0$.

c) A função é positiva para $x > -4$ e negativa para $x < -4$.

d) A função é positiva para $x < 3$ e negativa para $x > 3$.

11. **a)** O polinômio é do 2º grau.

b) $a_2 = 3$, $a_1 = -2$ e $a_0 = 1$

12. **a)** $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$

b) A função é constante para $x > 3$.

c) A função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.

d) A função f tem apenas um zero real.

13. **a)** A função f é sobrejetora, pois o conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio. A função f também é injetora, pois, para quaisquer $x_1 \neq x_2$ do domínio, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, a função é bijetora.

b) Como f é bijetora, existe uma função inversa f^{-1}.

14. Para resolver esse exercício, vamos considerar $g: A \to B$, tal que $x \in A$ e $y \in B$.

a) Substituindo $g(x)$ por y, temos: $y = \frac{x-1}{x+3}$

Substituindo y por x e x por y, temos: $x = \frac{y-1}{y+3}$

Expressando y em função de x, temos:

$$x = \frac{y-1}{y+3} \Rightarrow x(y+3) = y - 1 \Rightarrow xy + 3x = y - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy - y = -1 - 3x \Rightarrow y(x-1) = -1 - 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1-3x}{x-1} \Rightarrow y = \frac{3x+1}{1-x}$$

Então, $g^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-x}$.

b) Para que $g(x)$ exista, devemos ter: $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$ ou $D(g) = \mathbb{R} - \{-3\}$.

Para que $g^{-1}(x)$ exista, devemos ter: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

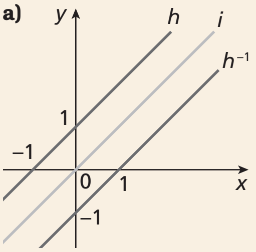
Logo, $D(g^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ ou $D(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$.

c) $\text{Im}(g) = D(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}$

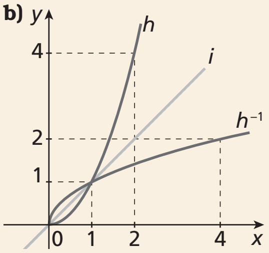
$\text{Im}(g^{-1}) = D(g) = \mathbb{R} - \{-3\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -3\}$

15. Para resolver esta atividade, deve-se considerar que o gráfico de h é simétrico ao gráfico de h^{-1} em relação à função identidade.

a)



b)



◆ Capítulo 4 – Função afim

Exercícios

1. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, para quais valores de a e b a função pode ser classificada como:

a) função afim?

b) função constante?

c) função linear?

2. Dada a função afim $f(x)$, sabe-se que $f(0) = 2$ e $f(3) = 8$. Determine o valor de $f(-1)$.

3. Uma dívida foi parcelada em prestações de R$ 250,00, que vencem todo dia 10 de cada mês. Em caso de atraso no pagamento, deverão ser cobrados 8% de juro, mais R$ 0,16 por dia de atraso. Se o valor a ser pago é expresso por $f(x)$, sendo x o número de dias de atraso, qual é a lei que define $f(x)$?

4. Uma reta passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(-2, -3)$ de um plano cartesiano.

a) Sabendo que essa reta pode ser representada por uma equação do tipo $y = ax + b$, elabore, com três colegas, uma estratégia para calcular os valores de a e b e, assim, determinar a equação dessa reta.

b) Usando a estratégia obtida no item anterior, determinem os valores de a e b e escrevam a equação dessa reta.

c) Verifiquem se essa reta pode ser a representação gráfica da função f, tal que $f(x) = 2x + 1$. Elaborem um pequeno texto justificando a resposta dada.

5. Determine os pontos de intersecção da reta que representa graficamente a função f, cuja lei de formação é $f(x) = -3x + 2$, com os eixos coordenados.

6. As locadoras de carro costumam cobrar um valor fixo pela locação, que dá direito a rodar certa quilometragem. Caso o cliente ultrapasse a quilometragem estabelecida, cobra-se um valor adicional por quilômetro excedente. A tabela abaixo mostra os valores cobrados por duas locadoras.

Locadora	Valor cobrado até 100 km	Valor cobrado por quilômetro excedente
A	R$ 70,00	R$ 0,45
B	R$ 60,00	R$ 0,70

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

a) Qual das locadoras apresenta o menor custo para um cliente que pretende rodar 125 km?

b) Qual das empresas deve ser escolhida por um cliente que pretende rodar 150 km?

7. Considere as funções f e g, tais que $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x - 2$. Para que valores de x temos $f(x) \geqslant g(x)$?

8. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das inequações abaixo.

a) $(-x + 1) \cdot (x - 4) \leqslant 0$ **b)** $-x - 5 \leqslant 2x < x + 1$

9. Obtenha o domínio das funções reais.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2x - 2}$ **b)** $g(x) = \sqrt{-3x + 1}$

◆ Resoluções

1. **a)** A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é afim para $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

b) A função f é constante para $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

c) A função f é linear para $a \neq 0$ e $b = 0$.

2. A lei de formação da função deve ser do tipo $f(x) = ax + b$, pois f é uma função afim. Assim, temos:

- $f(0) = 2 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$ (I)
- $f(3) = 8 \Rightarrow a \cdot 3 + b = 8$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$3a + b = 8 \Rightarrow 3a + 2 = 8 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$

Desse modo, obtemos: $f(x) = 2x + 2$

Logo: $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$

3. Calculando a parcela mais a multa de 8%, temos:

$250 \cdot 1{,}08 = 270$

Sabendo que são cobrados R$ 0,16 por dia de atraso, o valor a ser pago após o vencimento, expresso por $f(x)$, sendo x o número de dias, é dado por: $f(x) = 270 + 0{,}16x$

4. **a)** Espera-se que os alunos percebam que, substituindo os valores da abscissa e da ordenada de cada um dos pontos na equação $y = ax + b$, obtém-se um sistema de equações em função de a e b. Resolvendo esse sistema, determina-se o valor de a e b e, assim, é possível escrever a equação dessa reta.

b) Substituindo os valores da abscissa e da ordenada do ponto A na equação da reta, obtemos:

$1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$ (I)

Substituindo os valores da abscissa e da ordenada do ponto B na equação da reta, obtemos:

$-3 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow -3 = -2a + b$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$-3 = -2a + 1 \Rightarrow a = 2$

Portanto, a equação da reta é $y = 2x + 1$.

c) Espera-se que os alunos percebam que essa reta pode representar a função f. No texto de justificativa, os alunos podem traçar o gráfico da função f em um plano cartesiano e traçar a reta que passa pelos pontos A e B, verificando que a reta que representa o gráfico da função f também passa pelos pontos A e B; além disso, os alunos podem observar a semelhança entre as igualdades $y = 2x + 1$ e $f(x) = 2x + 1$.

5. Para $f(x) = 0$, temos: $-3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

O gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$.

Para $x = 0$, temos: $y = (-3) \cdot 0 + 2 \Rightarrow y = 2$

O gráfico da função intercepta o eixo y no ponto $(0, 2)$.

6. **a)** Sendo x o número de quilômetros excedentes e C o custo, temos:

- Locadora A: $C = 70 + 0{,}45x$
- Locadora B: $C = 60 + 0{,}70x$

Como o cliente vai exceder 25 km $(125 - 100)$, temos $x = 25$; logo:

- Locadora A: $C = 70 + 0{,}45 \cdot 25 = 81{,}25$
- Locadora B: $C = 60 + 0{,}70 \cdot 25 = 77{,}50$

Portanto, a locadora B apresenta o menor custo.

b) Para $x = 50$, temos:

- Locadora A: $C = 70 + 0{,}45 \cdot 50 = 92{,}50$
- Locadora B: $C = 60 + 0{,}70 \cdot 50 = 95{,}00$

Portanto, a locadora A deve ser escolhida.

7. Determinamos os valores de x para os quais $f(x) \geqslant g(x)$ resolvendo a seguinte inequação:

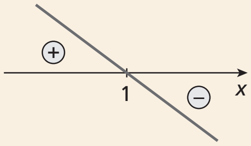
$2x + 3 \geqslant -x - 2 \Rightarrow 3x \geqslant -5 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{5}{3}$

Portanto, $f(x) \geqslant g(x)$ para $x \geqslant -\dfrac{5}{3}$.

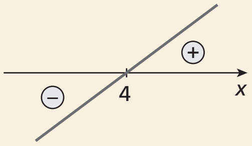
8. **a)** $(-x + 1) \cdot (x - 4) \leqslant 0$

Considerando $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = x - 4$, temos:

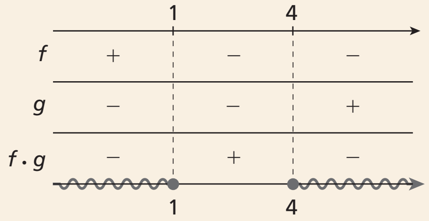
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$.

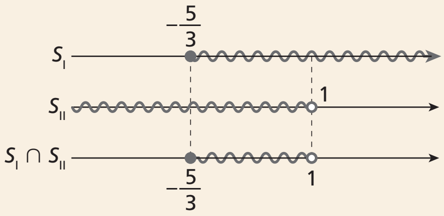
b) $-x - 5 \leqslant 2x < x + 1$

Devemos obter a solução das inequações:

(I) $-x - 5 \leqslant 2x \Rightarrow -3x \leqslant 5 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{5}{3}$

(II) $2x < x + 1 \Rightarrow x < 1$

Fazendo a intersecção das soluções, temos:



Logo, o conjunto solução da inequação é

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{3} \leqslant x < 1\right\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

9. **a)** Sabendo que o denominador de expressões fracionárias não pode ser nulo, devemos ter:

$2x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

b) Sabendo que o radicando de raízes de índice par não pode ser negativo, devemos ter:

$-3x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow -3x \geqslant -1 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{1}{3}$

Logo, $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{3}\right\}$.

◆ Capítulo 5 – Função quadrática

Exercícios

1. Dadas as funções abaixo, verifique qual é quadrática. Nesse caso, determine o valor dos coeficientes a, b e c.

a) $f(x) = (x + 2)(3 - x)$

b) $g(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2}{x^2}$, se $x \neq 0$; e $g(0) = -4$

2. Sabendo que $h(x) = x^2 + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2}$, determine o valor da expressão $Q = h(-2) - h(4)$.

3. Em cada caso, verifique se a parábola correspondente à função f tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo. Justifique sua resposta.

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ **b)** $f(x) = 3x^2 + 5$

4. Determine o ponto de intersecção com o eixo y das parábolas representadas pelas funções abaixo.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **b)** $h(x) = 2x^2 - 5x$

5. Obtenha, se existirem, os zeros das funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ **b)** $g(x) = x^2 + 2x - 3$

6. Escreva a lei da função correspondente à parábola que passa pelos pontos $(0, -4)$, $(1, 0)$ e $(2, 6)$.

7. Em cada caso, verifique se existem valores de x para os quais as imagens são negativas.

a) $f(x) = -x^2 - 3$

b) $f(x) = -2x^2 + x + 6$

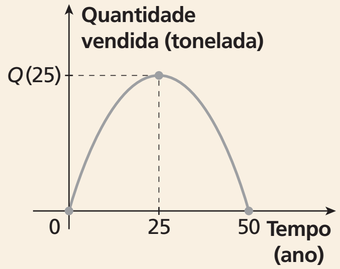
c) $f(x) = x^2 + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{9}{16}$

8. Para cada uma das funções, determine as coordenadas do vértice da parábola associada a ela e verifique se a ordenada do vértice é o valor máximo ou mínimo da função.

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 6$ **b)** $f(x) = x^2 - 3x$

9. Esboce o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x$.

10. Uma empresa fez um estudo sobre a permanência de um de seus produtos no mercado e obteve uma estimativa da quantidade de toneladas vendidas no decorrer do tempo.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Considerando o gráfico, resolva as questões.

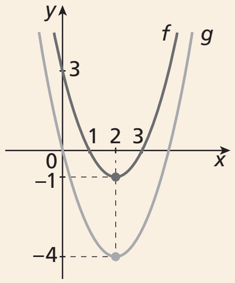
a) Espera-se que esse produto permaneça no mercado por quantos anos?

b) Após quanto tempo no mercado esse produto deverá atingir a quantidade máxima de toneladas vendidas?

c) Sabendo que a lei matemática que determina a quantidade de toneladas vendidas ($Q(t)$) no decorrer do tempo (t) é $Q(t) = 50t - t^2$, calcule a quantidade de toneladas que se espera vender no ano em que está prevista a maior venda.

11. Reúna-se com quatro colegas para resolver os itens abaixo.

a) Considerem os gráficos das funções f e g.



Para compor o gráfico da função g, foi feita uma transformação no gráfico da função f. Analisem esses gráficos e elaborem um texto para explicar o que aconteceu.

b) Com base na transformação ocorrida no gráfico da função f, verificada no item anterior, determinem a lei de formação da função g usando a lei de formação da função f dada por $f(x) = x^2 - 4x$.

12. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações do 2º grau:

a) $x^2 + 7x + 10 < 0$ **b)** $\dfrac{-x^2 + 81}{x - 9} \leqslant 0$

13. Obtenha o domínio da função: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

◆ Resoluções

1. **a)** Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$f(x) = (x + 2)(3 - x) \Rightarrow f(x) = 3x - x^2 + 6 - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -x^2 + x + 6$

Logo, f é quadrática, com $a = -1$, $b = 1$ e $c = 6$.

b) Simplificando a expressão para $x \neq 0$, temos:

$$g(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x - 4)}{x^2} \Rightarrow g(x) = 2x - 4$$

Logo, g não é quadrática, pois não pode ser expressa por um polinômio do 2º grau.

2. Calculando $h(-2)$, temos:

$$h(-2) = (-2)^2 + \frac{3 \cdot (-2)}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow h(-2) = 3$$

Calculando $h(4)$, temos:

$$h(4) = 4^2 + \frac{3 \cdot 4}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow h(4) = \frac{39}{2}$$

Substituindo os valores encontrados na expressão, obtemos:

$$Q = h(-2) - h(4) \Rightarrow Q = 3 - \frac{39}{2} \Rightarrow Q = -\frac{33}{2}$$

3. **a)** $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ corresponde a uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$.

b) $f(x) = 3x^2 + 5$ corresponde a uma parábola com concavidade voltada para cima, pois $a = 3 > 0$.

4. Para determinar o ponto de intersecção com o eixo y, basta observar o coeficiente c.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; coeficiente $c = 2$.

Então, a parábola que representa a função f intercepta o eixo y no ponto $(0, 2)$.

b) $h(x) = 2x^2 - 5x$; coeficiente $c = 0$.

Então, a parábola que representa a função h intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$.

5. **a)** $x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11$

Como $\Delta < 0$, a função f não possui zeros reais.

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$x = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -3$

Portanto, os zeros reais da função g são -3 e 1.

6. Como a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -4)$, o coeficiente c é -4. Então, a lei da função associada a ela é do tipo $f(x) = ax^2 + bx - 4$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Como a parábola passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(2, 6)$, podemos substituir essas coordenadas na lei da função:

$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 4 = 0 \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - a$ (I)

$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 6 \Rightarrow 4a + 2b = 10$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$4a + 2b = 10 \Rightarrow 4a + 2 \cdot (4 - a) = 10 \Rightarrow a = 1$

Substituindo $a = 1$ na equação (I), obtemos:

$b = 4 - a \Rightarrow b = 4 - 1 \Rightarrow b = 3$

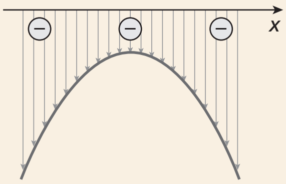
Portanto, a lei da função associada à parábola é $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

7. **a)** Verificando os zeros de $f(x) = -x^2 - 3$:

$-x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3$

Portanto, não existe x real tal que $f(x) = 0$.

Como a parábola tem concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$) e f não admite zeros reais, temos o esboço ao lado.



Portanto, as imagens são negativas para qualquer x real.

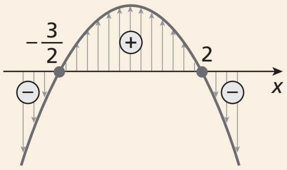
b) Verificando os zeros de $f(x) = -2x^2 + x + 6$:

$-2x^2 + x + 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6 = 1 + 48 = 49$

$x = \dfrac{-1 \pm 7}{-4} \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = 2$

Como a parábola tem concavidade voltada para baixo ($a = -2 < 0$) e f admite dois zeros reais $\left(-\dfrac{3}{2}\text{ e } 2\right)$, temos o esboço ao lado.



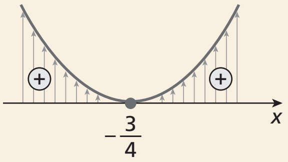
Portanto, $f(x)$ é negativa quando $x < -\dfrac{3}{2}$ ou $x > 2$.

c) Verificando os zeros de $f(x) = x^2 + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{9}{16}$:

$$x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{9}{16} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{9}{16} = 0 \Rightarrow x = \frac{-\frac{3}{2} \pm 0}{2} = -\frac{3}{4}$$

Como a parábola tem concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$) e f admite um zero real duplo $\left(-\dfrac{3}{4}\right)$, temos o esboço ao lado.



Portanto, não existem valores reais de x para os quais as imagens sejam negativas.

8. **a)** $f(x) = -x^2 - 2x + 6$

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x_v = -1$

$y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-[(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6]}{4 \cdot (-1)} \Rightarrow y_v = 7$

Como a parábola tem concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$), y_v corresponde ao valor máximo da função.

b) $f(x) = x^2 - 3x$

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-3)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_v = \dfrac{3}{2}$

$y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-[(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0]}{4} \Rightarrow y_v = -\dfrac{9}{4}$

Como a parábola tem concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$), y_v corresponde ao valor mínimo da função.

9. $f(x) = x^2 - 3x$

Coeficiente: $c = 0$

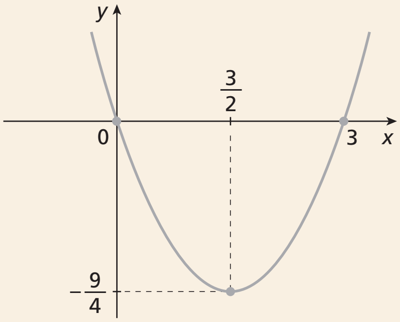
Zeros da função: $x^2 - 3x = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9$

$x = \dfrac{3 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 3$ ou $x = 0$

Coordenadas do vértice: $x_v = \dfrac{3}{2}$ e $y_v = -\dfrac{9}{4}$

Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola correspondente é voltada para cima, temos o esboço do gráfico:



10. **a)** A quantidade de toneladas vendidas é igual a zero em dois momentos: quando $t = 0$ e quando $t = 50$. Logo, espera-se que esse produto fique no mercado por 50 anos.

b) De acordo com o gráfico, a quantidade máxima de toneladas vendidas ocorrerá depois de 25 anos no mercado, já que $x_v = 25$.

c) Espera-se que a maior venda ocorra em $t = 25$; logo:

$Q(t) = 50t - t^2 \Rightarrow Q(25) = 50 \cdot 25 - 25^2 \Rightarrow Q(25) = 625$

Portanto, está previsto que, nesse ano, sejam vendidas 625 toneladas desse produto.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

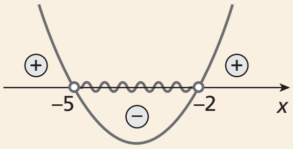
11. **a)** Espera-se que os alunos percebam que, para construir o gráfico da função g, foi feita uma translação da parábola que representa o gráfico da função f em três unidades para baixo.

b) Espera-se que os alunos verifiquem que, como a representação gráfica da função g foi feita transladando-se a parábola que representa a função f em três unidades para baixo, a lei de formação da função g pode ser obtida subtraindo-se três unidades na lei de formação da função f. Portanto, a lei de formação da função g é dada por $g(x) = x^2 - 4x - 3$.

12. **a)** $x^2 + 7x + 10 < 0$

$f(x) = x^2 + 7x + 10$ (zeros de f: -5 e -2)

Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola correspondente é voltada para cima.



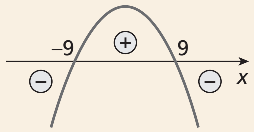
Assim, o conjunto solução da inequação é
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -2\}$.

b) $\dfrac{-x^2 + 81}{x - 9} \leqslant 0$

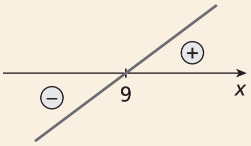
- $f(x) = -x^2 + 81$ (zeros de f: -9 e 9)

  Como $a = -1$, a concavidade da parábola correspondente é voltada para baixo.
- $g(x) = x - 9$ (zero de g: 9)

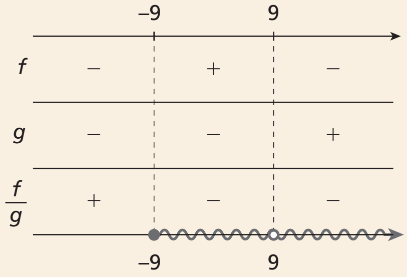
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



Veja que 9 não é solução da inequação, pois $x - 9 \neq 0$.

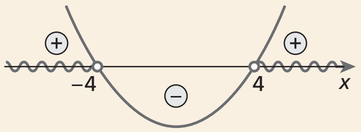
Portanto, o conjunto solução da inequação é
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -9 \text{ e } x \neq 9\}$.

13. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

Condição de existência: $x^2 - 16 > 0$

Tomando $g(x) = x^2 - 16$, temos:

- zeros de g: -4 e 4
- Como $a = 1$, a parábola correspondente tem a concavidade voltada para cima.



Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 4\}$.

◆ Capítulo 6 – Função modular

Exercícios

1. Calcule o valor das expressões a seguir.

a) $|6 - 10| + 2$ **b)** $|-5 + 2| - |-3 + 4|$

2. Escreva a lei de uma função equivalente sem usar módulo.

a) $|x - 6|$, se $x > 6$
b) $|x - 10|$, se $x \in \mathbb{R}$
c) $|x - 1| + |x - 11|$, se $x > 11$
d) $|x - 6| + |x - 3|$, se $3 < x < 6$

3. Construa o gráfico da função dada por:
$f(x) = |-2x + 5|$

4. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações modulares.

a) $|2x + 8| = 12$ **c)** $|-2x + 1| = |x + 7|$
b) $|3x + 7| = 2 - x$

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações modulares.

a) $|2x + 9| < 13$
b) $|4x - 3| \geqslant 17$

6. Identifique o domínio da função modular dada por:
$y = \dfrac{2}{|x + 1|} - \sqrt{x^2 - 1}$

◆ Resoluções

1. **a)** $|6 - 10| + 2 = |-4| + 2 = 4 + 2 = 6$
b) $|-5 + 2| - |-3 + 4| = |-3| - |1| = 3 - 1 = 2$

2. **a)** $|x - 6| = x - 6$, para $x > 6$

b) $|x - 10| = \begin{cases} x - 10, \text{ se } x \geqslant 10 \\ -x + 10, \text{ se } x < 10 \end{cases}$

c) $|x - 1| + |x - 11| = x - 1 + x - 11 = 2x - 12$, para $x > 11$

d) $|x - 6| + |x - 3| = -x + 6 + x - 3 = 3$, para $3 < x < 6$

3. $f(x) = |-2x + 5|$

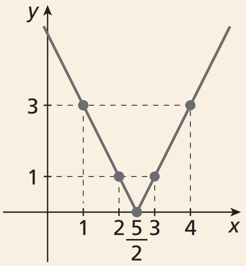
$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, \text{ se } x \leqslant \dfrac{5}{2} \\ 2x - 5, \text{ se } x > \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores do domínio de f:

x	$f(x) = \|-2x + 5\|$	$(x, f(x))$
1	$f(1) = \|-2 \cdot 1 + 5\| = \|-2 + 5\| = 3$	$(1, 3)$
2	$f(2) = \|-2 \cdot 2 + 5\| = \|-4 + 5\| = 1$	$(2, 1)$
$\frac{5}{2}$	$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left\|-2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 5\right\| = \|-5 + 5\| = 0$	$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
3	$f(3) = \|-2 \cdot 3 + 5\| = \|-6 + 5\| = 1$	$(3, 1)$
4	$f(4) = \|-2 \cdot 4 + 5\| = \|-8 + 5\| = 3$	$(4, 3)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A representação gráfica de f é:



4. **a)** $|2x + 8| = 12 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 8 = 12, \text{ ou} \\ 2x + 8 = -12 \end{cases}$

$2x + 8 = 12 \Rightarrow x = 2$

$2x + 8 = -12 \Rightarrow x = -10$

Logo, $S = \{2, -10\}$.

b) $|3x + 7| = 2 - x \Rightarrow \begin{cases} 3x + 7 = 2 - x, \text{ ou} \\ 3x + 7 = -(2 - x) \end{cases}$

$3x + 7 = 2 - x \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$

$3x + 7 = -(2 - x) \Rightarrow 3x + 7 = -2 + x \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$

Logo, $S = \left\{-\frac{9}{2}, -\frac{5}{4}\right\}$.

c) $|-2x + 1| = |x + 7| \Rightarrow \begin{cases} -2x + 1 = x + 7, \text{ ou} \\ -2x + 1 = -(x + 7) \end{cases}$

$-2x + 1 = x + 7 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2$

$-2x + 1 = -(x + 7) \Rightarrow -2x + 1 = -x - 7 \Rightarrow x = 8$

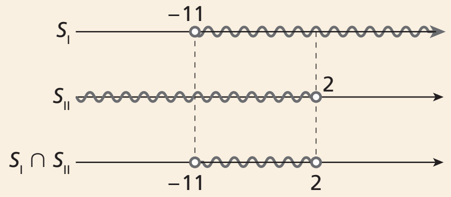
Logo, $S = \{-2, 8\}$.

5. **a)** $|2x + 9| < 13 \Rightarrow \overbrace{-13 < 2x + 9}^{(\mathrm{I})} \underbrace{< 13}_{(\mathrm{II})}$

(I) $-13 < 2x + 9 \Rightarrow -22 < 2x \Rightarrow x > -11$

(II) $2x + 9 < 13 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$

Fazendo a intersecção das soluções parciais, temos:



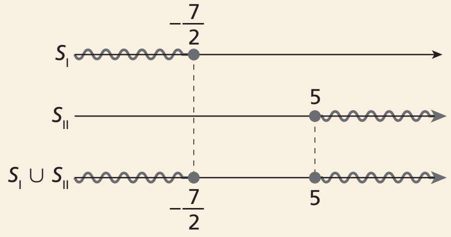
Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -11 < x < 2\}$.

b) $|4x - 3| \geqslant 17 \Rightarrow \underbrace{4x - 3 \leqslant -17}_{(\mathrm{I})} \text{ ou } \underbrace{4x - 3 \geqslant 17}_{(\mathrm{II})}$

(I) $4x - 3 \leqslant -17 \Rightarrow 4x \leqslant -14 \Rightarrow x \leqslant -\frac{7}{2}$

(II) $4x - 3 \geqslant 17 \Rightarrow 4x \geqslant 20 \Rightarrow x \geqslant 5$

Fazendo a união das soluções parciais, temos:



Logo, o conjunto solução da equação é

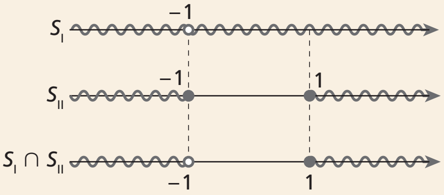
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{7}{2} \text{ ou } x \geqslant 5\right\}.$$

6. Para $y = \frac{2}{|x + 1|} - \sqrt{x^2 - 1}$, devemos ter:

(I) $|x + 1| \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

(II) $x^2 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$

Fazendo a intersecção das soluções parciais, temos:



Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

◆ Capítulo 7 – Função exponencial

Exercícios

1. Use um contraexemplo para justificar a falsidade das afirmações a seguir.

a) Toda potência de expoente natural é um número maior que zero.

b) Uma potência de expoente natural será negativa sempre que sua base for um número menor que zero.

2. Considerando a expressão $\left(-\frac{1}{2}\right)^{a-1}$, em que a é um número inteiro, verifique para quais valores de a a expressão resulta em um número:

a) natural.

b) positivo.

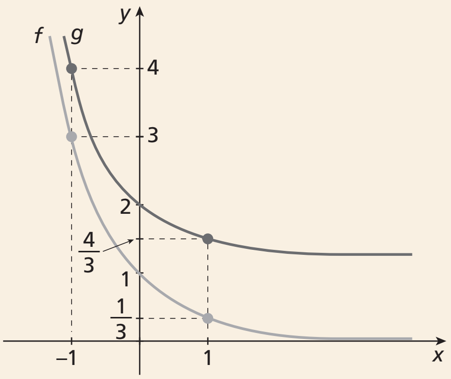
c) racional, não natural.

3. Em cada item, verifique se os números apresentados são iguais. Caso não sejam, compare-os e identifique o maior.

a) $1^{\sqrt{5}}$ e $1^{\sqrt{6}}$ **b)** $2^{\sqrt{3}}$ e $3^{\sqrt{2}}$ **c)** $6^{\sqrt{2}}$ e $5^{\sqrt{2}}$

4. A cada semana, uma colônia de fungos tem sua quantidade de indivíduos multiplicada por 1,5. Considerando que certa colônia tenha começado com 1 indivíduo, escreva a lei de formação da função que representa o número de indivíduos dessa colônia em função da quantidade de semanas.

5. No plano cartesiano a seguir estão representados os gráficos das funções f e g, tais que $f(x) = 3^{-x}$ e $g(x) = 3^{-x} + 1$.



a) Reúna-se com três colegas e analisem os gráficos. Encontrem uma estratégia para esboçar o gráfico da função g apenas tomando como base o gráfico da função f, sem construir uma tabela de valores.

b) Utilizando a estratégia identificada no item anterior, esbocem o gráfico das seguintes funções:

- $h(x) = 3^{-x} - 1$
- $i(x) = 3^{-x} + 2$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

6. Determine o tempo mínimo, em ano, que uma aplicação de R$ 300,00 levará para atingir um montante superior a R$ 400,00. (Use uma calculadora se achar necessário.)

7. Considere o seguinte sistema de equações exponenciais:

$\begin{cases} 2^{2x - y} = a \\ 2^{x + y} = b \end{cases}$, em que a, b, x e y são números reais.

a) Atribua valores reais para x e y e encontre os valores correspondentes de a e b.

b) Reescreva o sistema com os valores de a e b encontrados no item anterior e, em seguida, entregue-o para um colega resolver.

c) Verifique a resolução elaborada pelo colega.

8. Resolva as inequações a seguir.

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < 1$ **b)** $5^{3x} - 5^{x} \leqslant 0$ **c)** $3^{x^2} \leqslant 729$

◆ Resoluções

1. a) Sugestão de resposta: o expoente da potência $(-2)^3$ é um número natural, mas essa potência é um número menor que zero:

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

b) Sugestão de resposta: a base da potência $(-2)^4$ é menor que zero e o expoente é um número natural, mas a potência é maior que zero:

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

2. a) Para que a expressão resulte em um número natural, o expoente precisará ser negativo e seu módulo deverá ser um número par:

- $a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1$
- $|a - 1|$ precisa ser par; logo, $|a|$ tem de ser um número ímpar.

Portanto, a precisa ser um número menor que 1 cujo módulo seja ímpar.

b) Para que a expressão resulte em um número positivo, o módulo do expoente tem de ser um número par:

- $|a - 1|$ precisa ser par; logo, $|a|$ tem de ser um número ímpar.

c) Para que a expressão resulte em um número racional, não natural, o expoente tem de ser um número positivo:

- $a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$

3. a) Sabendo que uma potência de base 1 é igual a 1, temos:

$1^{\sqrt{5}} = 1$ e $1^{\sqrt{6}} = 1$

Logo, os números $1^{\sqrt{5}}$ e $1^{\sqrt{6}}$ são iguais.

b) Usando uma calculadora científica, verificamos que:

$\sqrt{3} \simeq 1{,}732$ e $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$. Assim:

$2^{\sqrt{3}} \simeq 2^{1{,}732} \simeq 3{,}32$ e $3^{\sqrt{2}} \simeq 3^{1{,}414} \simeq 4{,}728$

Logo, $3^{\sqrt{2}}$ é o maior número.

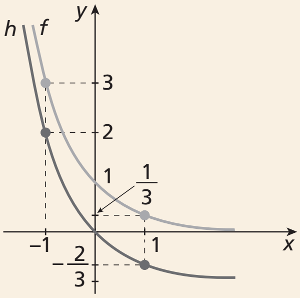
c) Ambas as potências têm o mesmo expoente e as bases são positivas; logo, a potência de maior base é o maior número, ou seja:

$6 > 5 \Rightarrow 6^{\sqrt{2}} > 5^{\sqrt{2}}$

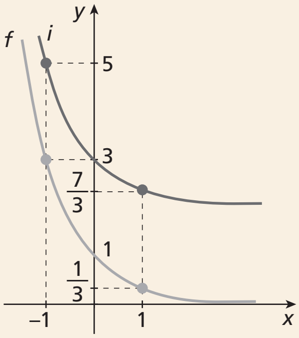
4. Considerando $n(t)$ o número de indivíduos em função do tempo t, medido em semanas, temos: $n(t) = 1{,}5^t$

5. a) Espera-se que os alunos percebam que a estratégia utilizada para obter a representação gráfica da função g foi transladar a curva que representa a função f uma unidade para cima.

b)
- Para esboçar o gráfico da função h, dada por $h(x) = 3^{-x} - 1$, será necessário transladar o gráfico da função f uma unidade para baixo:



- Para esboçar o gráfico da função i, dada por $i(x) = 3^{-x} + 2$, será necessário transladar o gráfico da função f duas unidades para cima:



6. Considerando as informações sobre a aplicação, podemos construir uma tabela.

Número de anos	Montante (R$)
1	$300 \cdot 1{,}1 = 330$
2	$300 \cdot 1{,}1^2 = 363$
3	$300 \cdot 1{,}1^3 = 399{,}30$
4	$300 \cdot 1{,}1^4 = 439{,}23$

Logo, para que seja atingido um montante superior a R$ 400,00, seriam necessários no mínimo 4 anos.

7. a) Sugestão de resposta: atribuindo os valores 0 e 1 para x e y, respectivamente, obtemos:

- $a = 2^{2 \cdot 0 - 1} \Rightarrow a = 2^{-1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
- $b = 2^{0 + 1} \Rightarrow b = 2^1 \Rightarrow b = 2$

Reescrevendo o sistema com os valores de a e b, temos:

$$\begin{cases} 2^{2x - y} = \frac{1}{2} \\ 2^{x + y} = 2 \end{cases}$$

b) *Comentário*: Os alunos trocarão os sistemas encontrados no item anterior para que sejam resolvidos.

c) *Comentário*: O aluno que elaborou o sistema deverá verificar se a resolução feita pelo colega está correta. Ele pode observar que a solução encontrada pelo colega deve corresponder aos valores atribuídos a x e y no item **a**.

8. a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{0} \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

b) $5^{3x} - 5^{x} \leqslant 0 \Rightarrow 5^{3x} \leqslant 5^{x} \Rightarrow 3x \leqslant x \Rightarrow x \leqslant 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$.

c) $3^{x^2} \leqslant 3^6 \Rightarrow x^2 \leqslant 6 \Rightarrow x^2 - 6 \leqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{6} \leqslant x \leqslant \sqrt{6}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{6} \leqslant x \leqslant \sqrt{6}\right\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

◆ Capítulo 8 – Função logarítmica

Exercícios

1. Ao obter o valor de x na expressão $\log_x 4 = 2$, um aluno considerou solução os seguintes valores: $x = 2$ e $x = -2$

a) As duas opções encontradas pelo aluno podem ser colocadas no lugar de x? Justifique.

b) Resolva corretamente a expressão.

2. Usando a definição de logaritmo, determine o valor de m em cada item.

a) $\log_3 81 = m$

b) $\log_m 0{,}36 = 2$

c) $\log_{\sqrt{7}} m = 2$

d) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = m$

e) $\log_{\frac{3}{2}} m = -3$

f) $\log_m 32 = -5$

3. Classifique cada igualdade a seguir em verdadeira ou falsa. Justifique.

a) $\log_2 1 = 0$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 1} = \frac{2}{3}$

c) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1$

d) $3^{\log_3 10} = 10$

4. Considere os seguintes logaritmos:

- $\log_2 78$
- $\log_2 780$
- $\log_5 81$
- $\log_5 162$

a) Para calcular os logaritmos apresentados empregando as propriedades operatórias dos logaritmos, quais logaritmos precisam ser conhecidos?

b) Com uma calculadora científica, encontre os valores dos logaritmos relacionados no item anterior. Considere três casas decimais.

c) Aplicando os valores encontrados no item anterior, calcule os logaritmos dados no início do exercício.

5. Para cada item, determine o valor de $\log x$.

a) $\log x + \log_{100} x - \log_{1.000} x = 14$

b) $\log_{0,1} x + \log \sqrt{x} - \log_{0,001} x = -11$

6. Considerando $\log 3 = 0{,}48$ e $\log 5 = 0{,}7$, encontre o valor de x que satisfaça a igualdade $135^x = 75$.

7. Se o pagamento por determinado serviço for efetuado após a data de vencimento, será cobrada uma multa de acordo com o número de dias de atraso. Na tabela estão apresentados os valores dessa multa previstos para os quatro primeiros dias de atraso no pagamento desse serviço.

Total de dias de atraso	Valor da multa
1	R$ 0,50
2	R$ 1,00
3	R$ 2,00
4	R$ 4,00

a) Calcule a multa que será paga no quinto dia de atraso.

b) Considerando que d representa o número de dias de atraso e m representa o valor que será pago de multa, escreva uma expressão que possa ser utilizada para calcular m em função de d.

c) Sabendo que o valor do serviço foi R$ 16.000,00, determine após quantos dias de atraso o valor pago de multa será igual ao valor do serviço. (Use: $\log 2 = 0{,}3$)

8. Considere a função f, de lei $f(x) = \log_2 (4 + x) + k$, sendo k um número real.

a) Calcule o valor de k, sabendo que o gráfico de f passa pela origem.

b) Esboce o gráfico de f.

9. Considere a função f, com lei $f(x) = \log_3 (x - 2)$.

a) Escreva os conjuntos domínio e contradomínio da função f.

b) Identifique os conjuntos domínio e contradomínio de uma função g, sabendo que essa função é a inversa de f (f é bijetora).

c) Escreva a lei de formação da função g.

10. Resolva os sistemas a seguir.

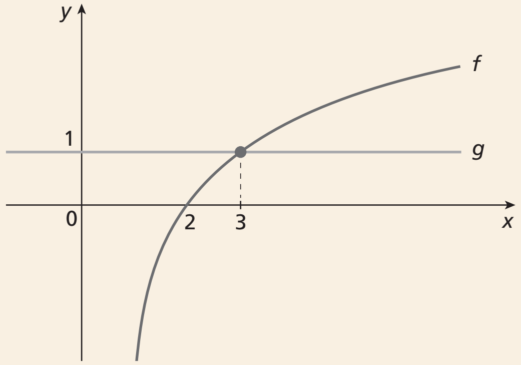
a) $\begin{cases} x + y = \dfrac{21}{2} \\ \log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 80 \\ \log (x + y) = 3 \end{cases}$

11. Em geral, quando resolvemos uma equação ou um sistema de equações, é possível verificar se a solução encontrada está correta atribuindo a cada incógnita o respectivo valor encontrado. Retome os sistemas apresentados no exercício anterior e verifique se as soluções que você encontrou estão corretas.

12. Junte-se a 3 colegas para resolver os itens a seguir.

a) Uma dupla deve analisar o gráfico e determinar o conjunto solução da inequação $f(x) \geqslant g(x)$.



ADILSON SECCO

b) Outra dupla deve resolver algebricamente a inequação $f(x) \geqslant g(x)$, sendo $f(x) = \log_2 (x - 1)$ e $g(x) = 1$.

c) Agora, comparem as soluções encontradas nos dois modos de resolução propostos nos itens anteriores.

◆ Resoluções

1. a) Embora $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$, pela definição de logaritmo, a base tem de ser um número real positivo; logo, o número -2 não pode ser considerado.

b) $\log_x 4 = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ e $x > 0$

Assim, $x = 2$.

2. a) $\log_3 81 = m \Rightarrow 3^m = 81 \Rightarrow m = 4$

b) $\log_m 0{,}36 = 2 \Rightarrow m^2 = 0{,}36$ e $m > 0$

Logo, $m = 0{,}6$.

c) $\log_{\sqrt{7}} m = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{7}\right)^2 = m$ e $m > 0$

Logo, $m = 7$.

d) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = m \Rightarrow 4^m = \frac{1}{16} \Rightarrow 4^m = 4^{-2} \Rightarrow m = -2$

e) $\log_{\frac{3}{2}} m = -3 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = m \Rightarrow m = \frac{8}{27}$

f) $\log_m 32 = -5 \Rightarrow m^{-5} = 32 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

3. a) Verdadeira.

$\log_2 1 = 0 \Rightarrow 2^0 = 1 \Rightarrow 1 = 1$

b) Falsa. Pelas consequências da definição:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 1} = 1$ e $1 \neq \frac{2}{3}$, ou seja, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 1} \neq \frac{2}{3}$

c) Verdadeira.

$\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^1 = \sqrt{5}$

d) Verdadeira. Pelas consequências da definição:

$3^{\log_3 10} = 10$

4. a) Manipulando os logaritmos, temos:

- $\log_2 78 = \log_2 (2 \cdot 3 \cdot 13) =$
  $= \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 13 = 1 + \log_2 3 + \log_2 13$
- $\log_2 780 = \log_2 (2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13) =$
  $= 2 \cdot \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 13 =$
  $= 2 + \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 13$
- $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4 \cdot \log_5 3$
- $\log_5 162 = \log_5 (2 \cdot 3^4) = \log_5 2 + \log_5 3^4 =$
  $= \log_5 2 + 4 \cdot \log_5 3$

Assim, para resolver os logaritmos apresentados utilizando as propriedades, precisamos ter o valor de: $\log_2 3$, $\log_2 5$, $\log_2 13$, $\log_5 2$, $\log_5 3$

b) Usando uma calculadora científica, verificamos que: $\log_2 3 = 1{,}585$; $\log_2 5 = 2{,}322$; $\log_2 13 = 3{,}700$; $\log_5 2 = 0{,}431$; $\log_5 3 = 0{,}682$

c)
- $\log_2 78 = 1 + \log_2 3 + \log_2 13 =$
  $= 1 + 1{,}585 + 3{,}700 = 6{,}285$
- $\log_2 780 = 2 + \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 13 =$
  $= 2 + 1{,}585 + 2{,}322 + 3{,}700 = 9{,}607$
- $\log_5 81 = 4 \cdot \log_5 3 = 2{,}728$
- $\log_5 162 = \log_5 2 + 4 \cdot \log_5 3 =$
  $= 0{,}431 + 4 \cdot 0{,}682 = 3{,}159$

5. a) $\log x + \log_{100} x - \log_{1.000} x = 14$

$$\log x + \frac{\log x}{\log 100} - \frac{\log x}{\log 1.000} = 14$$

$$\log x + \frac{\log x}{2} - \frac{\log x}{3} = 14$$

$$6 \cdot \log x + 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log x = 84$$

$$7 \cdot \log x = 84 \Rightarrow \log x = \frac{84}{7} \Rightarrow \log x = 12$$

b) $\log_{0,1} x + \log \sqrt{x} - \log_{0,001} x = -11$

$$\frac{\log x}{\log 0{,}1} + \frac{\log x}{2} - \frac{\log x}{\log 0{,}001} = -11$$

$$\frac{-\log x}{1} + \frac{\log x}{2} - \left(\frac{-\log x}{3}\right) = -11$$

$$-6 \cdot \log x + 3 \cdot \log x + 2 \cdot \log x = -66 \Rightarrow \log x = 66$$

6. $135^x = 75 \Rightarrow \log 135^x = \log 75 \Rightarrow x \cdot \log 135 = \log 75 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 75}{\log 135} \Rightarrow x = \frac{\log 3 + 2 \cdot \log 5}{3 \cdot \log 3 + \log 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{0{,}48 + 2 \cdot 0{,}7}{3 \cdot 0{,}48 + 0{,}7} \Rightarrow x = \frac{1{,}88}{2{,}14} \Rightarrow x = \frac{94}{107}$$

7. a) Primeiro, é necessário identificar um padrão no cálculo do valor da multa. Observando a tabela do enunciado, podemos construir uma terceira coluna identificando o cálculo do valor da multa para cada dia de atraso.

Total de dias de atraso	Valor da multa	Cálculo do valor da multa
1	R$ 0,50	$0{,}50 = 0{,}50 \cdot 2^0$
2	R$ 1,00	$1{,}00 = 0{,}50 \cdot 2^1$
3	R$ 2,00	$2{,}00 = 0{,}50 \cdot 2^2$
4	R$ 4,00	$4{,}00 = 0{,}50 \cdot 2^3$

Pelos cálculos apresentados na última coluna da tabela, conclui-se que, no quinto dia, o valor da multa será: $0{,}50 \cdot 2^4 = 8{,}00$

No quinto dia de atraso, serão pagos R$ 8,00 de multa.

b) É possível verificar um padrão nos cálculos apresentados na última coluna da tabela. Considerando esse padrão, temos a seguinte expressão: $m = 0{,}50 \cdot 2^{d-1}$

c) $16.000 = 0{,}50 \cdot 2^{d-1} \Rightarrow 32.000 = 2^{d-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 32.000 = \log 2^{d-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log (2^5 \cdot 10^3) = \log 2^{d-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 2^5 + \log 10^3 = (d - 1) \cdot \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 10 = (d - 1) \cdot \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = (d - 1) \cdot \log 2 - 5 \cdot \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = (d - 1 - 5) \cdot \log 2$

Usando $\log 2 = 0{,}3$, temos:

$$3 = (d - 1 - 5) \cdot 0{,}3 \Rightarrow d - 6 = \frac{3}{0{,}3} \Rightarrow d = 16$$

Logo, serão necessários 16 dias.

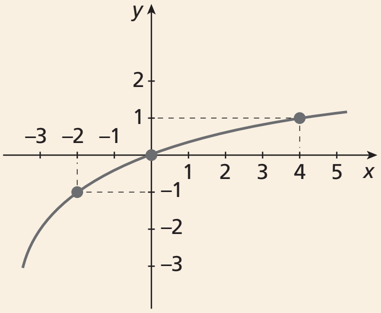
8. a) Se o gráfico de f passa pela origem, para $x = 0$, temos $f(x) = 0$. Assim:

$0 = \log_2 (4 + 0) + k \Rightarrow -k = \log_2 4 \Rightarrow k = -2$

Logo, $k = -2$.

b) $f(x) = \log_2 (4 + x) - 2$

x	$f(x)$
−2	−1
0	0
4	1



ADILSON SECCO

9. a) Pelas condições de existência de logaritmo, temos: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

b) Pelo item anterior, verifica-se que:

$D(g) = \mathbb{R}$ e $CD(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) Partindo da lei de formação da função f, temos:

- $f(x) = \log_3 (x - 2)$ é o mesmo que $y = \log_3 (x - 2)$;
- trocando x por y e y por x, obtemos $x = \log_3 (y - 2)$;
- expressando y em função de x, temos:
  $x = \log_3 (y - 2) \Rightarrow 3^x = y - 2 \Rightarrow y = 3^x + 2$

Portanto, $g(x) = 3^x + 2$.

10. a) $\begin{cases} x + y = \dfrac{21}{2} \\ \log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \end{cases}$

Manipulando a segunda equação, temos:

$$\log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \Rightarrow \log_5 \left(\frac{x}{y}\right) = \log_5 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = 20 \Rightarrow x = 20y$$

Substituindo x na primeira equação, obtemos:

$$x + y = \frac{21}{2} \Rightarrow 20y + y = \frac{21}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Então: $x = 20y \Rightarrow x = 20 \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 10$

Portanto, $S = \left\{\left(10, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} x - y = 80 \\ \log (x + y) = 3 \end{cases}$

Manipulando a segunda equação, temos:

$\log (x + y) = 3 \Rightarrow 10^3 = x + y \Rightarrow x + y = 1.000$

Escrevendo um sistema equivalente ao sistema dado e resolvendo-o pelo método da adição, obtemos:

$\begin{cases} x - y = 80 \\ x + y = 1.000 \end{cases}$

$2x = 1.080 \Rightarrow x = 540$

$x - y = 80 \Rightarrow 540 - y = 80 \Rightarrow y = 460$

Portanto, $S = \{(540, 460)\}$.

11. • Para as equações do sistema e a solução encontrada para o item **a**, temos:

$$x + y = \frac{21}{2} \Rightarrow 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2} \Rightarrow \frac{21}{2} = \frac{21}{2}$$

$$\log_5 10 - \log_5 \left(\frac{1}{2}\right) = \log_5 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 \left(\frac{10}{\frac{1}{2}}\right) = \log_5 20 \Rightarrow \log_5 20 = \log_5 20$$

Portanto, a solução encontrada está correta.

• Para as equações do sistema e a solução encontrada para o item **b**, temos:

$x - y = 80 \Rightarrow 540 - 460 = 80 \Rightarrow 80 = 80$

$\log (x + y) = 3 \Rightarrow \log (540 + 460) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 1.000 = 3 \Rightarrow 3 = 3$

Portanto, a solução encontrada está correta.

12. a) Analisando o gráfico, verifica-se que, para $x > 3$, os valores de $f(x)$ são maiores que os valores de $g(x)$. Logo, o conjunto solução da inequação $f(x) \geqslant g(x)$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

b) $f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \log_2 (x - 1) \geqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 1) \geqslant \log_2 2 \Rightarrow x - 1 \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$

Assim, a solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

c) Espera-se que os alunos percebam que, em ambos os modos, foi encontrada a mesma solução.

◆ Capítulo 9 – Sequências

Exercícios

1. Considere as seguintes sequências:

- sequência dos naturais divisores de 24;
- sequência dos naturais múltiplos de 7;
- sequência dos números quadrados perfeitos.

a) Classifique cada sequência em infinita ou finita.

b) Represente-as na forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$.

c) Quando possível, escreva uma lei de formação para a sequência.

2. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência.

a) Sequência dos números primos positivos.

b) Sequência definida pela lei $f(n) = 3n + (-1)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Sequência dada pela lei:

$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{3} \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2^n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

3. Determine a razão de cada PA e classifique-a em crescente, decrescente ou constante.

a) $\left(1, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{3}, 3, \dfrac{11}{3}, \dfrac{13}{3}, 5, ...\right)$

b) $(5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, ...)$

c) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, ...\right)$

4. Em janeiro. uma empresa planejou aumentar sua produção de embalagens para presentes em 50 unidades a cada mês, até dezembro daquele mesmo ano. Sabendo que em março, ou seja, no terceiro mês após o planejamento, foram produzidas 520 embalagens, determine quantas dessas embalagens serão produzidas em dezembro.

5. Cada um dos gráficos a seguir representa uma PA infinita.

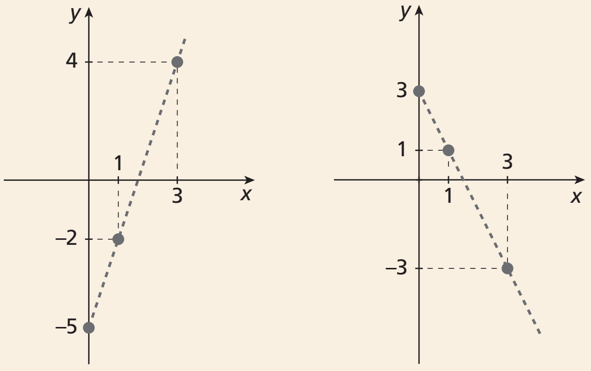


gráfico 1 gráfico 2

Considerando esses gráficos, resolva os itens a seguir com um colega.

a) Encontrem o valor de a_0 e de a_1 para cada PA.

b) Determinem a razão de cada PA.

c) Escrevam a lei de formação de cada PA.

6. O primeiro termo de uma PA é -8 e o terceiro termo é -7. Determine a soma dos 10 primeiros termos dessa PA.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

7. O primeiro termo de uma PG é 3 e o terceiro termo é $\frac{1}{3}$. Sabendo que essa PG não é oscilante, determine:

a) a razão dessa PG.

b) o 10º termo dessa PG.

8. Cada um dos gráficos a seguir representa uma PG infinita.

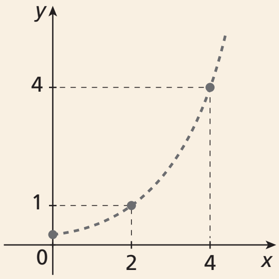


gráfico 1

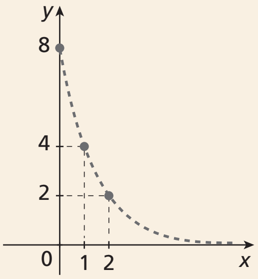


gráfico 2

Considerando esses gráficos, resolva os itens a seguir com um colega.

a) Determinem a razão de cada PG.

b) Escrevam a lei de formação de cada PG.

9. Qual das seguintes PGs tem a soma dos 10 primeiros termos menor que 100?

a) (12; 18; 27; 40,5; ...)

b) (12; 6; 3; 1,5; ...)

c) (5; −5; 5; −5; 5; ...)

10. Escreva uma PG infinita cuja soma dos termos seja:

a) maior ou igual a 1.

b) menor que 1.

11. Em um cinema, as poltronas estão dispostas em fila. Na primeira delas, há 18 poltronas; na segunda, há duas poltronas a mais que na primeira; na terceira, há duas poltronas a mais que na segunda; e assim sucessivamente, até a última fila.

a) Escreva uma expressão que indique o número de cadeiras (S_n) em função do número de filas (n).

b) Sabendo que no total há 270 poltronas, calcule quantas filas de poltronas há nesse cinema.

◆ Resoluções

1. a)
- sequência dos naturais divisores de 24: finita
- sequência dos naturais múltiplos de 7: infinita
- sequência dos números quadrados perfeitos: infinita

b)
- sequência dos naturais divisores de 24: (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)
- sequência dos naturais múltiplos de 7: (0, 7, 14, 21, 28, ...)
- sequência dos números quadrados perfeitos: (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...)

c)
- sequência dos naturais divisores de 24: não tem uma lei de formação
- sequência dos naturais múltiplos de 7: $f(n) = 7(n - 1),\ n \in \mathbb{N}^*$
- sequência dos números quadrados perfeitos: $f(n) = n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$

2. a) (2, 3, 5, 7, 11)

b) (2, 7, 8, 13, 14)

c) $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{64}{3}, \frac{1.024}{3}, \frac{32.768}{3}\right)$

3. a) $r = \frac{2}{3}$; crescente

b) $r = -2$; decrescente

c) $r = 0$; constante

4. Primeiro, vamos determinar o valor de a_1, sabendo que $a_3 = 520$ e $r = 50$:

$a_1 = a_3 - 2r \Rightarrow a_1 = 520 - 100 \Rightarrow a_1 = 420$

Agora, vamos determinar o 12º termo da sequência, ou seja, o termo correspondente ao mês de dezembro:

$a_{12} = 420 + 11 \cdot 50 \Rightarrow a_{12} = 970$

Logo, em dezembro a empresa produzirá 970 embalagens.

5. a) PA do gráfico 1: $a_0 = -5;\ a_1 = -2$

PA do gráfico 2: $a_0 = 3;\ a_1 = 1$

b) PA do gráfico 1: $r = -2 - (-5) = 3$

PA do gráfico 2: $r = 1 - 3 = -2$

c) PA do gráfico 1:

$f(n) = -5 + 3n \Rightarrow f(n) = 3n - 5$, com $n \in \mathbb{N}$

PA do gráfico 2:

$f(n) = 3 + n \cdot (-2) \Rightarrow f(n) = -2n + 3$, com $n \in \mathbb{N}$

6. Primeiro, vamos calcular a razão e o 10º termo:

$$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow -7 = -8 + 2r \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a_{10} = -8 + 9 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_{10} = -\frac{7}{2}$$

Agora, vamos determinar a soma dos 10 primeiros termos:

$$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot \left(-8 - \frac{7}{2}\right) = 5 \cdot \left(\frac{-16 - 7}{2}\right) = -\frac{115}{2}$$

7. a) $a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow \frac{1}{3} = 3q^2 \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3}$

Como essa PG não é oscilante, consideramos $q = \frac{1}{3}$.

b) $a_{10} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 \Rightarrow a_{10} = 3^{-8}$

8. a) PG do gráfico 1: $a_4 = a_2 \cdot q^2 \Rightarrow 4 = 1 \cdot q^2 \Rightarrow q = \pm 2$

Pelo gráfico, verificamos que a razão é positiva; logo, $q = 2$.

PG do gráfico 2: $a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow 2 = 4 \cdot q \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

b) PG do gráfico 1: primeiro, determinamos o valor de a_0: $a_0 = a_2 \cdot q^{-2} \Rightarrow a_0 = 1 \cdot 2^{-2} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}$

Assim, a lei de formação é:

$$f(n) = \frac{1}{4} \cdot 2^n \Rightarrow f(n) = 2^{n-2}$$

PG do gráfico 2: calculando o valor de a_0, temos:

$a_0 = a_1 \cdot q^{-1} \Rightarrow a_0 = 8$

Assim, a lei de formação é:

$$f(n) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow f(n) = 2^{3-n}$$

9. a) Calculando a razão da PG, temos $q = 1,5$.

$$S_{10} = \frac{12 \cdot (1,5^{10} - 1)}{1,5 - 1} \simeq 1.359,84$$

b) Calculando a razão da PG, temos $q = 0,5$.

$$S_{10} = \frac{12 \cdot (0,5^{10} - 1)}{0,5 - 1} \simeq 24$$

c) Calculando a razão da PG, temos $q = -1$.

$$S_{10} = \frac{5 \cdot [(-1)^{10} - 1]}{-1 - 1} = 0$$

Portanto, as PGs dos itens **b** e **c** apresentam a soma dos 10 primeiros termos menores que 100.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10. a) Sugestão de resposta:

A PG (0,5; 0,25; 0,125; ...), pois:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0{,}5}{1 - 0{,}5} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1$$

b) Sugestão de resposta:

A PG (0,2; 0,02; 0,002; ...), pois:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}2}{0{,}9} \simeq 0{,}22$$

11. a) O total de poltronas nesse cinema é dado pela soma dos termos de uma PA. Para escrevermos a soma dos termos dessa PA, em função de n, precisamos determinar o termo a_n:

$a_n = 18 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n + 16$

Assim, temos:

$$S_n = \frac{n(18 + 2n + 16)}{2} = n^2 + 17n$$

b) $270 = n^2 + 17n \Rightarrow n^2 + 17n - 270 = 0$

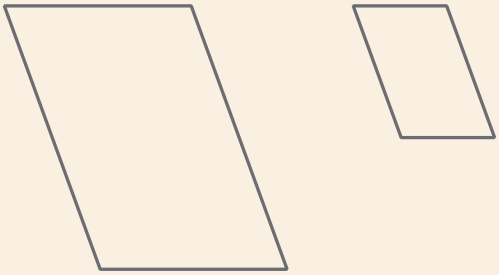
Resolvendo a equação do 2º grau, temos: $n = 10$.

Logo, há 10 filas de poltronas nesse cinema.

◆ Capítulo 10 – A semelhança e os triângulos

Exercícios

1. Nas duas figuras a seguir, a menor foi obtida reduzindo-se a maior, sem distorções.



a) Sem medir os lados, apenas empregando o conceito de semelhança, responda às questões a seguir.

- As razões entre as medidas de cada par de lados correspondentes das figuras são iguais ou diferentes?
- Os ângulos correspondentes têm a mesma medida?

b) Usando uma régua e um transferidor, verifique as respostas dos itens anteriores.

(*Observação*: As figuras devem ser reproduzidas exatamente como estão.)

2. Considere m, n e p três retas paralelas e s e t duas transversais. As retas paralelas determinam dois segmentos sobre a transversal s, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, tais que $AB = x$ e $BC = x + 1$. Sobre a transversal t, as paralelas determinam os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$, na mesma ordem, de tal modo que $DE = 2x + 10$ e $EF = 4x + 4$.

a) Faça um esquema para representar essa situação.

b) Determine o valor de x.

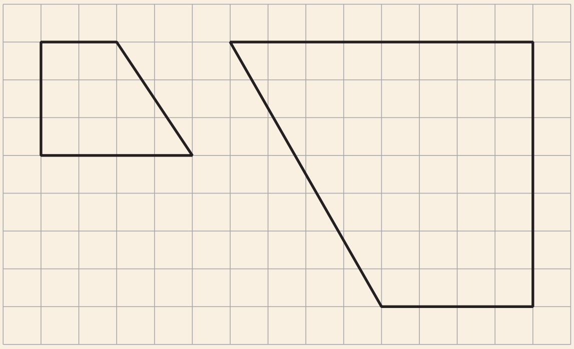
c) Calcule a medida dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

3. Um arquiteto está desenhando a planta de um salão comercial cujas medidas reais são 4 m de comprimento e 3,25 m de largura.

a) Sabendo que essa planta está sendo desenhada na escala 1 : 200, responda: que medida, em centímetro, deverá ter os segmentos que representam o comprimento e a largura dessa sala?

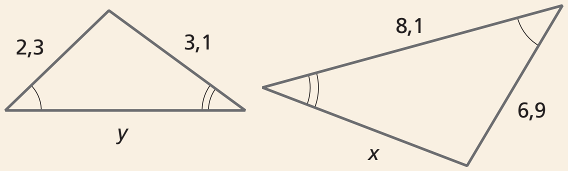
b) Se o arquiteto está usando uma régua graduada, cuja menor divisão é o milímetro, essa escala é a ideal para representar esse salão? Justifique sua resposta.

4. Sabendo que a malha quadriculada a seguir é composta de quadrados cujos lados medem uma unidade, pode-se afirmar que os dois trapézios desenhados são semelhantes? Justifique sua resposta.

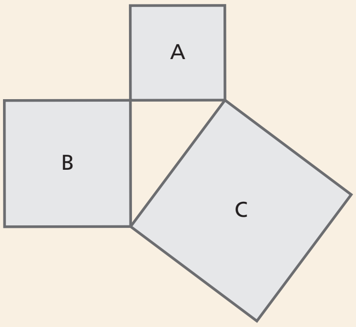


5. Desenhe três polígonos, I, II e III, de modo que I seja semelhante a II e II seja congruente a III. O que se pode afirmar do polígono I em relação ao polígono III?

6. Os triângulos a seguir são semelhantes e apresentam alguns lados cujas medidas são desconhecidas. Encontre essas medidas.



7. No esquema a seguir, o quadrado A tem 81 cm² de área, o quadrado B tem 144 cm² de área e o quadrado C tem 225 cm² de área.

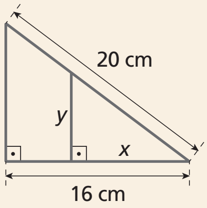


a) Sabendo que cada lado do triângulo é congruente a um lado de um dos quadrados, como pode ser verificado na figura, determine a medida dos lados desse triângulo.

b) Mostre que o triângulo é retângulo.

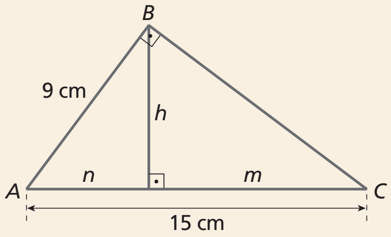
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. Determine os valores de x e de y para que o triângulo maior tenha o dobro da área do triângulo menor.



9. Em certo horário do dia, um adolescente com 1,5 m de altura projeta uma sombra com 2 m de comprimento. Nesse mesmo horário, um pinheiro projeta uma sombra de 12 m de comprimento. Qual é a altura desse pinheiro?

10. Considere o triângulo ABC, retângulo em B. Sabe-se que o cateto $\overline{AB}$ mede 9 cm e que a hipotenusa $\overline{AC}$ mede 15 cm.



Calcule:

a) a medida do cateto $\overline{BC}$.

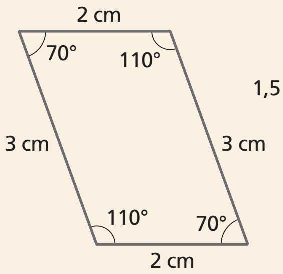
b) a medida h da altura em relação à hipotenusa.

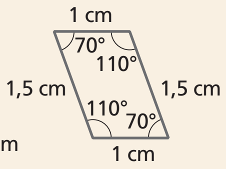
c) as medidas m e n das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

◆ Resoluções

1. a)
- Como uma figura é a redução da outra, sem distorções, as razões entre as medidas dos pares de lados correspondentes são iguais.
- As medidas dos ângulos correspondentes são iguais.

b)



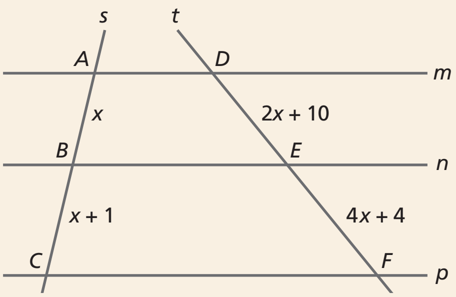


Usando uma régua e um transferidor, devemos obter as medidas indicadas nas figuras acima.

Analisando as medidas dos ângulos, verificamos que os ângulos correspondentes são iguais, ou seja, têm a mesma medida. Considerando as medidas dos lados correspondentes, temos:

$$\frac{3}{1{,}5} = \frac{2}{1} = 2$$

2. a)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) $\frac{x}{x+1} = \frac{2x+10}{4x+4} \Rightarrow x(4x+4) = (x+1)(2x+10) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$

c) $AB = 5$

$BC = x + 1 = 6$

$DE = 2x + 10 = 20$

$EF = 4x + 4 = 24$

3. a) Com relação à medida do comprimento, cada 1 cm da planta equivale a 200 cm de distância real. Então, 400 cm na realidade correspondem a 2 cm no desenho. Considerando a medida da largura, temos, em relação à escala usada, 325 cm de distância real, que equivalem a 1,625 cm na planta.

b) Não, pois o arquiteto terá dificuldade para representar algumas medidas usando uma régua graduada comum, que apresenta o milímetro como a menor divisão.

4. Escrevendo as razões entre as medidas dos lados paralelos dos trapézios correspondentes, temos $\frac{4}{8}$ e $\frac{2}{4}$.

Escrevendo a razão entre as medidas de um par de lados não paralelos dos trapézios correspondentes, temos $\frac{3}{7}$.

Como as três razões não são iguais, podemos concluir que os trapézios não são semelhantes.

5. Se os polígonos I e II são semelhantes, então os ângulos correspondentes são congruentes.

Como os polígonos II e III são congruentes, os ângulos correspondentes são congruentes.

Assim, os polígonos I e III têm ângulos correspondentes congruentes. Portanto, podemos afirmar que esses polígonos são semelhantes.

6. Escrevendo as razões entre as medidas dos lados, temos as seguintes proporções:

$$\frac{2{,}3}{6{,}9} = \frac{3{,}1}{x} = \frac{y}{8{,}1}$$

Assim:

$$\frac{2{,}3}{6{,}9} = \frac{3{,}1}{x} \Rightarrow 2{,}3x = 21{,}39 \Rightarrow x = 9{,}3$$

$$\frac{2{,}3}{6{,}9} = \frac{y}{8{,}1} \Rightarrow 6{,}9y = 18{,}63 \Rightarrow y = 2{,}7$$

7. a) A área do quadrado A é igual a 81 cm²; logo, seu lado mede 9 cm. A área do quadrado B é igual a 144 cm²; então, seu lado mede 12 cm. Considerando o quadrado C, cuja área é igual a 225 cm², verificamos que seu lado mede 15 cm.

Assim, concluímos que os lados do triângulo medem 9 cm, 12 cm e 15 cm.

b) Considerando que os dois lados menores sejam os catetos e o lado maior, a hipotenusa, vamos verificar se o teorema de Pitágoras é válido para esse triângulo:

$9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow 81 + 144 = 225 \Rightarrow 225 = 225$

Como o teorema de Pitágoras é satisfeito, esse triângulo é retângulo.

8. Representando por a a medida do cateto do triângulo maior, cuja medida não foi dada, temos:

$a^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow a = 12$

Logo, esse cateto mede 12 cm.

Sabemos que a área do triângulo maior é igual ao dobro da área do triângulo menor; então:

$$\frac{16 \cdot 12}{2} = 2 \cdot \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow xy = 96 \quad \text{(I)}$$

Analisando os triângulos, podemos concluir que eles são semelhantes. Logo:

$$\frac{12}{y} = \frac{16}{x} \Rightarrow 12x = 16y \Rightarrow x = \frac{16y}{12} \Rightarrow x = \frac{4y}{3} \quad \text{(II)}$$

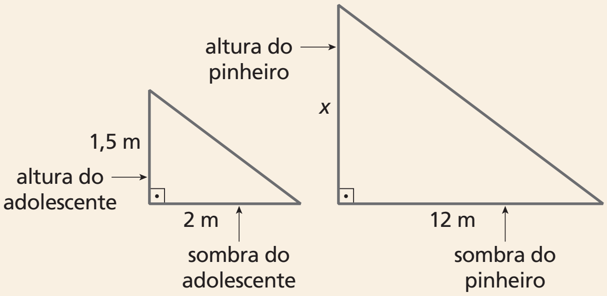
De (I) e (II), vem:

$$\frac{4y}{3} \cdot y = 96 \Rightarrow y^2 = 72 \Rightarrow y = 6\sqrt{2}$$

$$x = \frac{4 \cdot 6\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$$

Portanto, os catetos y e x medem $6\sqrt{2}$ cm e $8\sqrt{2}$ cm.

9. A situação pode ser representada pelo seguinte esquema:



Então:

$$\frac{1{,}5}{x} = \frac{2}{12} \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

Portanto, o pinheiro tem 9 m de altura.

10. a) $BC^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow BC^2 = 144 \Rightarrow BC = 12$

Portanto, o cateto $\overline{BC}$ mede 12 cm.

b) $\frac{h}{9} = \frac{12}{15} \Rightarrow h = \frac{9 \cdot 12}{15} \Rightarrow h = \frac{36}{5}$

Logo, h mede $\frac{36}{5}$ cm.

c) $12^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = \frac{144}{15} \Rightarrow m = \frac{48}{5}$

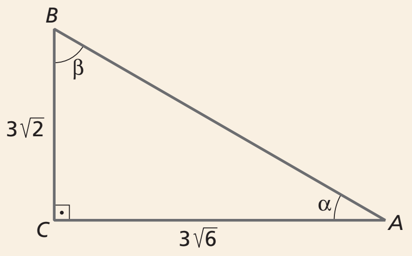
$9^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = \frac{81}{15} \Rightarrow n = \frac{27}{5}$

Assim, m e n medem $\frac{48}{5}$ cm e $\frac{27}{5}$ cm.

◆ Capítulo 11 – Trigonometria no triângulo retângulo

Exercícios

1. Reúna-se com três colegas para resolver esta atividade. Considerem o seguinte triângulo ABC, retângulo em C.



a) Calculem sen α, cos α e tg α.

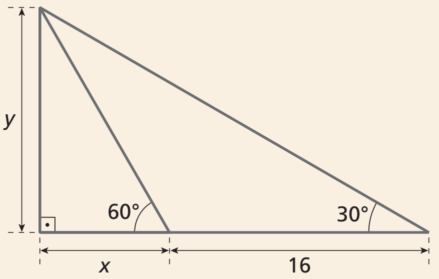
b) Com base apenas nos resultados obtidos no item anterior, sem fazer cálculos, determinem sen β e cos β.

c) Determinem o valor de tg β, considerando os valores de sen β e cos β obtidos no item **b**.

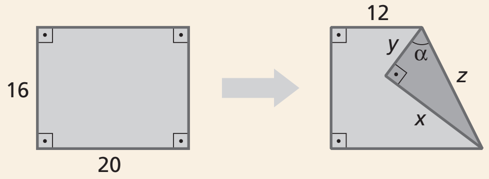
d) Com um transferidor, meçam os ângulos α e β. Em seguida, obtenham os valores de seno, cosseno e tangente desses ângulos.

e) Comparem os valores encontrados nos itens **a**, **b** e **c** com os cálculos do item anterior.

2. Determine o valor de x e de y indicados na figura.



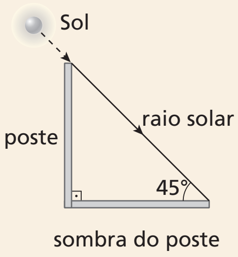
3. Uma folha de papel foi dobrada conforme o esquema:



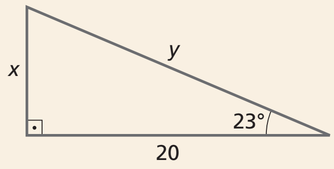
a) Determine as medidas x, y e z do triângulo formado com a dobra.

b) Calcule sen α, cos α e tg α.

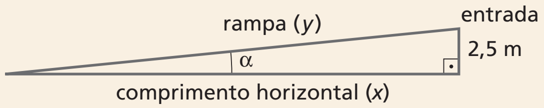
4. Em certo horário do dia, a sombra de um poste, projetada pelo Sol, tem 25 m de comprimento. Sabendo que nesse horário os raios solares formam um ângulo de 45° com o solo, determine a altura desse poste.



5. Usando a tabela de razões trigonométricas, determine os valores de x e de y indicados no triângulo a seguir.



6. Na entrada de uma loja está sendo projetada uma rampa, conforme mostra o esquema a seguir.



Se a rampa deve ter 10% de inclinação, determine:

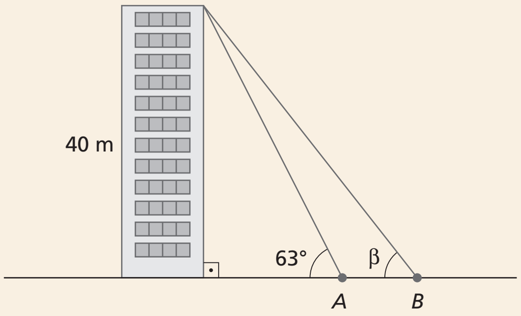
a) o comprimento horizontal (x) dessa rampa.

b) o ângulo de inclinação α. (*Dica*: Consulte a tabela de razões trigonométricas.)

c) o comprimento (y) aproximado da rampa.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

7. Do alto de um prédio de 40 m de altura, um observador vê um carrinho de pipoca e uma barraca de pastel alinhados com a entrada do prédio. Eles estão representados, no esquema a seguir, pelos pontos *A* e *B*, respectivamente.



ADILSON SECCO

Usando uma calculadora, determine:

a) a distância entre o carrinho de pipoca e o prédio.

b) o valor do ângulo β, considerando que $AB = 11$ m.

◆ Resoluções

1. a) Calculando a medida da hipotenusa, temos:

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = AB^2 \Rightarrow AB = 6\sqrt{2}$$

Assim:

$$\text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e tg } \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) $\text{sen } \beta = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \beta = \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$

c) $\text{tg } \beta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

d) $\alpha = 30°$ e $\beta = 60°$

Assim:

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}; \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 60° = \frac{1}{2} \text{ e tg } 60° = \sqrt{3}$$

e) Espera-se que os alunos percebam que os valores encontrados são iguais.

2. $\text{tg } 30° = \dfrac{y}{x + 16} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{y}{x + 16} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{x\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{3} \quad \text{(I)}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\sqrt{3} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), temos:

$$x\sqrt{3} = \frac{x\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x\sqrt{3} = x\sqrt{3} + 16\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \Rightarrow x = 8$$

Como $y = x\sqrt{3}$, então $y = 8\sqrt{3}$.

Portanto, $x = 8$ e $y = 8\sqrt{3}$.

3. a) A medida *x* representa a largura da folha; logo, $x = 16$.

A medida *y* é parte do comprimento da folha; então:

$y + 12 = 20 \Rightarrow y = 8$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$16^2 + 8^2 = z^2 \Rightarrow z^2 = 320 \Rightarrow z = 8\sqrt{5}$

b) $\text{sen } \alpha = \dfrac{16}{8\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos \alpha = \dfrac{8}{8\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$;

$\text{tg } \alpha = \dfrac{16}{8} = 2$

4. Representando a medida da altura do poste por *x*, temos:

$$\text{tg } 45° = \frac{x}{25} \Rightarrow 1 = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 25$$

Portanto, o poste tem 25 m de altura.

5. $\cos 23° = \dfrac{20}{y} \Rightarrow 0{,}9205 = \dfrac{20}{y} \Rightarrow y \simeq 21{,}73$

$\text{tg } 23° = \dfrac{x}{20} \Rightarrow 0{,}4245 = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x = 8{,}49$

6. a) Como a rampa deve ter 10% de inclinação, para cada 10 m de altura serão necessários 100 m de comprimento horizontal. Logo, $x = 25$, ou seja, para 2,5 m de altura serão necessários 25 m de comprimento horizontal.

b) $\text{tg } \alpha = \dfrac{2{,}5}{25} = 0{,}1$. Consultando a tabela, verifica-se que $\text{tg } 6° = 0{,}1051$. Logo, pode-se aproximar o valor de α para 6°. Assim, $\alpha \simeq 6°$.

c) $\text{sen } \alpha = \dfrac{2{,}5}{y} \Rightarrow 0{,}1045 = \dfrac{2{,}5}{y} \Rightarrow y \simeq 23{,}92$

Logo, a rampa tem cerca de 23,92 m de comprimento.

7. a) Representando a distância entre o carrinho de pipoca e o prédio por *x*, temos:

$$\text{tg } 63° = \frac{40}{x} \Rightarrow 1{,}96 = \frac{40}{x} \Rightarrow x \simeq 20{,}41$$

Portanto, a distância entre o prédio e o carrinho de pipoca é, aproximadamente, 20,41 m.

b) Se $AB = 11$, então a distância entre a barraca de pastel e o prédio é: $20{,}41 + 11 = 31{,}41$

Assim: $\text{tg } \beta = \dfrac{40}{31{,}41} \Rightarrow \text{tg } \beta \simeq 1{,}27 \Rightarrow \beta \simeq 52°$

II. Resoluções e comentários

Capítulo 1

Organização e apresentação de dados

Com o advento da chamada era tecnológica, dispomos de uma facilidade crescente para a obtenção de dados sobre assuntos diversos. Porém, para que isso seja proveitoso, é preciso saber lidar com essa avalanche de dados.

Esse capítulo tem por objetivo introduzir o estudo da análise exploratória de dados de modo que se transformem em informações com significado.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. Sendo x o número de gotas recomendado para uma criança de 14 kg, temos:

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{14} \Rightarrow 2 \cdot x = 3 \cdot 14 \Rightarrow x = 21$$

Logo, a dosagem recomendada é 21 gotas.

2. Chamando de x o número de alunos do sexo feminino, temos:

$$\frac{4}{7} = \frac{x}{42} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 42}{7} \Rightarrow x = 24$$

Calcula-se agora o número de alunos do sexo masculino: $42 - 24 = 18$

Assim, 18 alunos são do sexo masculino.

Comentário: Espera-se que os alunos percebam que, para calcular o número de meninos, pode-se usar a razão que falta $\left(\frac{3}{7}\right)$ para completar o inteiro $\left(\frac{7}{7}\right)$.

3. $\frac{x}{4} = \frac{15}{20} \Rightarrow x \cdot 20 = 15 \cdot 4 \Rightarrow x = 3$

$\frac{7}{6} = \frac{21}{y} \Rightarrow 7 \cdot y = 21 \cdot 6 \Rightarrow y = 18$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Portanto, $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{6}$ formam uma proporção.

4. $\frac{x}{2} = \frac{6}{y} = \frac{27}{18}$

$\frac{x}{2} = \frac{27}{18} \Rightarrow x \cdot 18 = 2 \cdot 27 \Rightarrow x = 3$

$\frac{6}{y} = \frac{27}{18} \Rightarrow 6 \cdot 18 = y \cdot 27 \Rightarrow y = 4$

5. Vamos dividir R$ 1.600,00 em duas partes, x e y, diretamente proporcionais a 6 e a 10.

$$\begin{cases} x + y = 1.600 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{10} = k & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $x = 6k$ e $y = 10k$

De (I), temos: $6k + 10k = 1.600 \Rightarrow k = 100$

Então, $x = 600$ e $y = 1.000$.

Portanto, o pintor que trabalhou 6 horas recebeu R$ 600,00, e o pintor que trabalhou 10 horas recebeu R$ 1.000,00.

6. a)

$$\begin{cases} x + y + z = 1.280 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} = k & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $x = 8k$, $y = 5k$ e $z = 7k$

De (I), temos: $8k + 5k + 7k = 1.280 \Rightarrow k = 64$

Assim, $x = 512$, $y = 320$ e $z = 448$.

Logo, a primeira pessoa receberá R$ 512,00, a segunda, R$ 320,00, e a última, R$ 448,00.

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 1.280 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{\frac{1}{5}} = \dfrac{y}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{\frac{1}{10}} = k & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $x = \frac{k}{5}$, $y = \frac{k}{2}$ e $z = \frac{k}{10}$

De (I), temos: $\frac{k}{5} + \frac{k}{2} + \frac{k}{10} = 1.280 \Rightarrow k = 1.600$

Assim, $x = 320$, $y = 800$ e $z = 160$.

Logo, a primeira pessoa receberá R$ 320,00, a segunda, R$ 800,00, e a última, R$ 160,00.

7. Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180° & \text{(I)} \\ \dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{\beta}{4} = \dfrac{\gamma}{5} = k & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $\alpha = 3k$, $\beta = 4k$ e $\gamma = 5k$

De (I), temos:

$3k + 4k + 5k = 180° \Rightarrow 12k = 180° \Rightarrow k = 15°$

Assim, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ e $\gamma = 75°$.

8. a) Se $\frac{8}{9}$ do volume total do *iceberg* corresponde à parte submersa, então $\frac{1}{9}$ do volume total corresponde à parte não submersa, o que equivale, de acordo com o enunciado, a 135.000 m^3. Assim:

$9 \cdot 135.000 = 1.215.000$

Portanto, o volume total do *iceberg* é 1.215.000 m^3.

b) Se 2% do volume total corresponde às “impurezas”, 98% correspondem ao volume de gelo puro. Assim, usando o resultado do item **a**, 98% de 1.215.000 m^3 correspondem ao volume do gelo puro.

Logo: $\frac{1.215.000}{100} = \frac{x}{98} \Rightarrow x = 1.190.700$

Portanto, o volume de gelo puro é de 1.190.700 m^3.

9. **a)** O lado de 9 cm da fotografia foi ampliado para 50 cm; então, temos:

$$\frac{9}{50} = \frac{7{,}5}{x} \Rightarrow 9 \cdot x = 50 \cdot 7{,}5 \Rightarrow x \simeq 42$$

Logo, a altura da pessoa passará a ser de aproximadamente 42 cm.

b) Comparando o lado de 9 cm da foto original com seu novo tamanho, 50 cm, observamos que houve um aumento de 41 cm (50 cm − 9 cm). Se originalmente tínhamos 9 cm, então 9 cm está para 100%, assim como 41 cm está para *x*, a taxa percentual da ampliação. Portanto:

$$\frac{9\text{ cm}}{100\%} = \frac{41\text{ cm}}{x} \Rightarrow x \simeq 455{,}56\%$$

Comentário: É possível que alguns alunos trabalhem com a razão $\frac{9}{50}$, enquanto outros usem a razão $\frac{12{,}6}{70}$.
É interessante promover uma discussão para que eles percebam que ambas são iguais e, portanto, levam ao mesmo resultado.
Se achar conveniente, pedir aos alunos que calculem a taxa percentual de ampliação da área da foto. Em seguida, pedir que comparem essa taxa com o quadrado da taxa obtida no item **b**, para que verifiquem a igualdade desses valores.

10. Tomando v como o volume do caminhão-tanque, temos:

Produto	1º caminhão	2º caminhão
Álcool anidro	$\frac{v}{6}$	$\frac{v}{4}$
Gasolina pura	$\frac{5v}{6}$	$\frac{3v}{4}$

Então, no reservatório haverá um volume igual a $2v$, em que $\frac{5v}{12}$ $\left(\text{que é } \frac{v}{6} + \frac{v}{4}\right)$ é o volume de álcool anidro.

Assim, a porcentagem de álcool anidro nesse reservatório é:

$$\frac{\frac{5v}{12}}{2v} = \frac{5v}{12} \cdot \frac{1}{2v} = \frac{5}{24} \simeq 0{,}21 = 21\%$$

Portanto, a gasolina obtida é considerada de "boa qualidade", segundo o critério estabelecido pela ANP.

Comentário: O assunto apresentado nessa questão, assim como nas questões **13**, **17**, **18**, **19** e **21** – fontes de energia, saúde, economia, consumo, turismo, entre outros –, propicia um trabalho interdisciplinar.
Avaliar a conveniência e a possibilidade de empreender uma abordagem desses assuntos com os professores das disciplinas afins.

11. **a)** 125.000
b) 800
c) resposta pessoal

12. **a)** quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

13. **a)** Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.
b) Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistados todos os idosos.

14. **a)** Cor dos veículos que transitam na rua de Pedro:

Cor	Frequência absoluta		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	1	1	2
Prata	9	8	17
Azul	4	4	8
Vermelha	4	4	8
Amarela	1	0	1
Preta	6	4	10
Verde	2	2	4
Total	27	23	50

Cor	Frequência relativa		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	0,02	0,02	0,04
Prata	0,18	0,16	0,34
Azul	0,08	0,08	0,16
Vermelha	0,08	0,08	0,16
Amarela	0,02	0	0,02
Preta	0,12	0,08	0,20
Verde	0,04	0,04	0,08
Total	0,54	0,46	1,00

Cor	Frequência percentual		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	2%	2%	4%
Prata	18%	16%	34%
Azul	8%	8%	16%
Vermelha	8%	8%	16%
Amarela	2%	0%	2%
Preta	12%	8%	20%
Verde	4%	4%	8%
Total	54%	46%	100%

b) A cor que apresentou maior frequência percentual de manhã, à tarde e no dia foi prata, 18%, 16% e 34%, respectivamente. As que apresentaram menor frequência percentual de manhã foram as cores branca e amarela, 2%; à tarde foi a amarela, 0%; e no dia foi a amarela, 2%.

Comentário: Com base no exemplo do texto teórico, essa atividade permite que os alunos façam uso de planilha eletrônica.

15. **a)**

Posse de computador segundo o sexo

Tem computador Sexo	Sim	Não	Total
Masculino	36%	10%	46%
Feminino	40%	14%	54%
Total	76%	24%	100%

b) Percentual masculino:

$$\frac{18}{23} \simeq 0{,}7826 = 78{,}26\%$$

O percentual de meninos que têm computador em relação a todos os meninos é, aproximadamente, 78,26%.
Percentual feminino:

$$\frac{20}{27} \simeq 0{,}7407 = 74{,}07\%$$

O percentual de meninas que têm computador em relação a todas as meninas é, aproximadamente, 74,07%.
Logo, quem tem mais computadores, percentualmente, em relação a seu grupo, são os meninos.

16. resposta pessoal

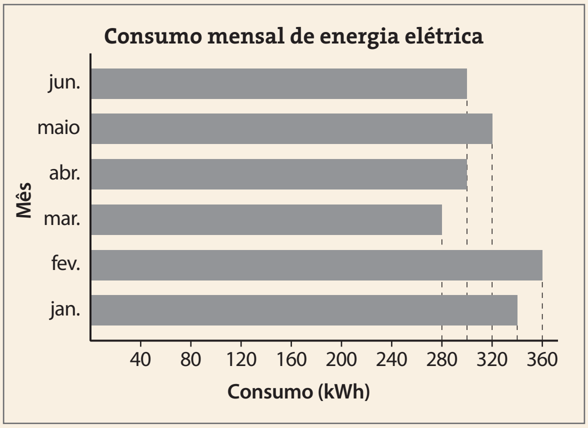
17. a) Ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta.

b)
- título: "Vendas das principais empresas estaduais";
- cabeçalho: "Vendas (bilhão de reais)";
- colunas indicadoras: "Empresa", "Ramo de atividade", "2016", "2017";
- fonte: "Agência Pesquisa Efetiva".

c) Espera-se que os alunos percebam que o critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse ordenada de acordo com os valores das vendas em 2017, em ordem crescente ou decrescente.

d) frequência percentual

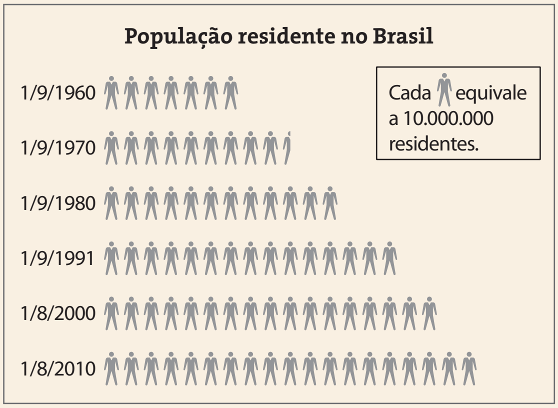
18. Resposta possível:



ADILSON SECCO

Comentário: Pode-se pedir aos alunos que observem a conta de luz de suas residências para comparar com os valores do exercício. Há empresas de energia elétrica cuja conta traz a informação de consumo dos últimos 12 meses com um gráfico de barras horizontais.
Essa é também uma boa oportunidade para discussão sobre o uso racional da energia elétrica.

19. a) Resposta possível:



LUIZ RUBIO

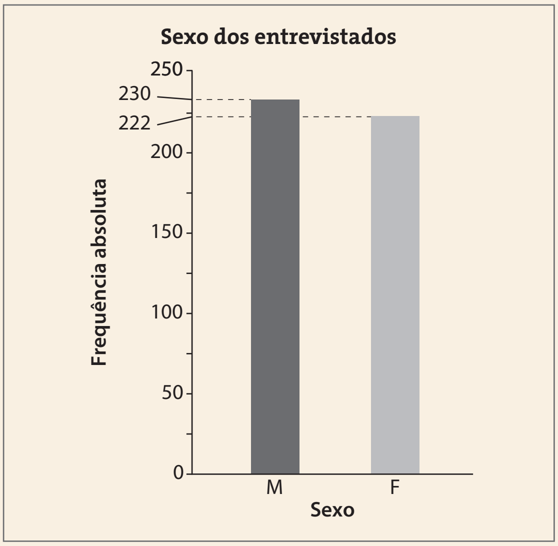
b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos escolham o pictograma que apresenta a melhor relação entre o elemento usado e a quantidade de ocorrências que ele representa.

20. a) sim

b) Não, considerando os valores dados: 230 e 222.

c) Espera-se que os alunos percebam que sim. A altura das colunas não está proporcional às respectivas frequências. No gráfico, a altura da coluna que representa o número de homens entrevistados é o dobro da altura da coluna que representa o número de mulheres, o que não corresponde à verdade, porque foram entrevistados 230 homens e 222 mulheres. A indução a esse equívoco se deve à opção de adotar 214 como valor inicial no eixo das ordenadas.

d) Espera-se que os alunos proponham redefinir a escala do eixo vertical, localizando o zero na intersecção dos eixos.



ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Comentário: Esse tipo de exercício é interessante para que se discuta com os alunos a importância da interpretação correta e crítica de um gráfico, mesmo quando quem está divulgando os dados manipula informações para favorecer uma leitura equivocada.

21.

Local de residência	Frequência relativa	Frequência absoluta aproximada
África	0,020	128.597
América Central e Caribe	0,010	64.299
América do Norte	0,131	842.311
América do Sul	0,487	3.131.338
Ásia	0,052	334.352
Europa	0,287	1.845.368
Oceania	0,013	83.588

22. a)

Horas de uso de fone de ouvido	Frequência absoluta	Frequência percentual
1 h	4	10%
2 h	10	25%
3 h	12	30%
4 h	6	15%
5 h	4	10%
6 h	2	5%
7 h	2	5%
Total	40	100%

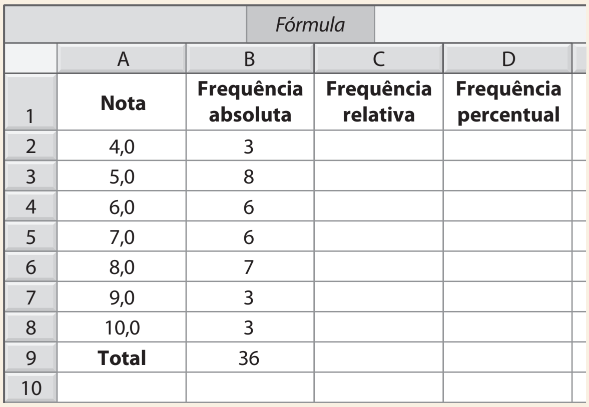
b) 35% dos alunos usam fone de ouvido por 4 horas ou mais, diariamente. Assim:

35% de 640 = 0,35 · 640 = 224

Portanto, diariamente, 224 alunos usam fone de ouvido por 4 horas ou mais.

Comentário: Com base na situação apresentada, discuta com os alunos os danos auditivos causados pelo uso contínuo e excessivo do fone de ouvido, as dicas para seu uso, os diferentes sons e seus decibéis no nosso dia a dia etc.

23. a) Para organizar os dados em uma tabela de frequências, inicialmente preenchemos a coluna das frequências absolutas:



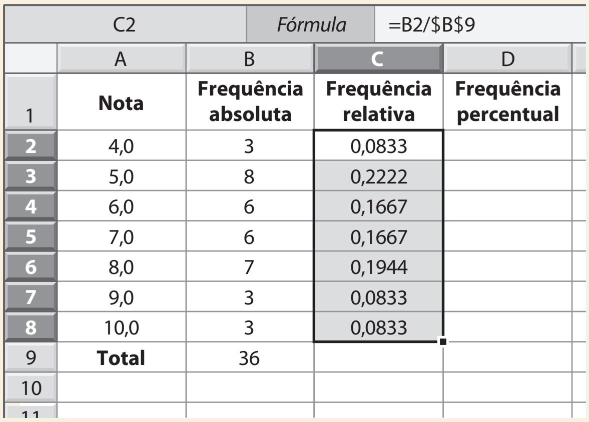
Fórmula

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3		
3	5,0	8		
4	6,0	6		
5	7,0	6		
6	8,0	7		
7	9,0	3		
8	10,0	3		
9	**Total**	36		
10				

Para preencher a coluna das frequências relativas, basta digitar, na célula C2, a fórmula:

=B2/$B$9

Em seguida, selecionar a célula C2 e arrastar a seleção até a célula C8:



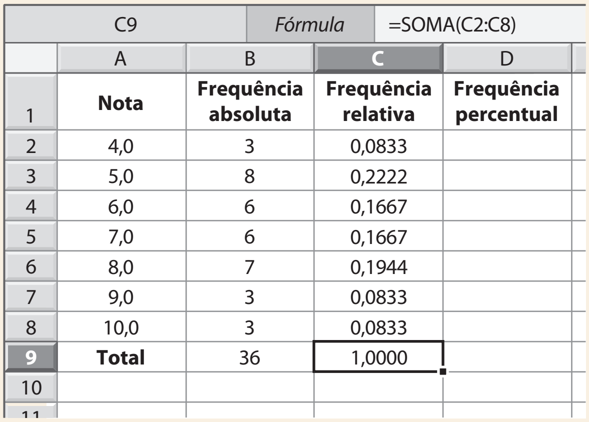
C2 | *Fórmula* | =B2/$B$9

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	
3	5,0	8	0,2222	
4	6,0	6	0,1667	
5	7,0	6	0,1667	
6	8,0	7	0,1944	
7	9,0	3	0,0833	
8	10,0	3	0,0833	
9	**Total**	36		
10				

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

O total pode ser calculado digitando-se na célula C9 a fórmula:

=SOMA(C2:C8)



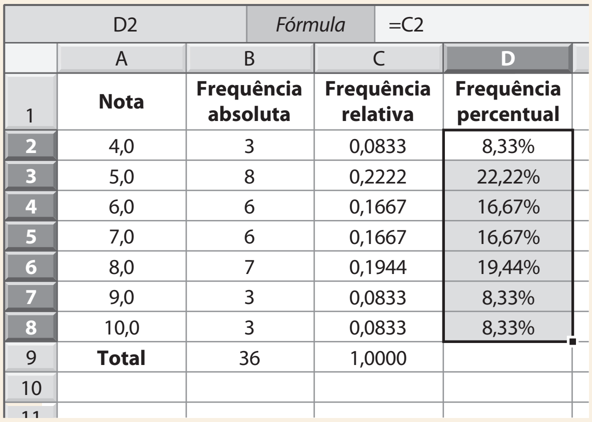
C9 | *Fórmula* | =SOMA(C2:C8)

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	
3	5,0	8	0,2222	
4	6,0	6	0,1667	
5	7,0	6	0,1667	
6	8,0	7	0,1944	
7	9,0	3	0,0833	
8	10,0	3	0,0833	
9	**Total**	36	1,0000	
10				

Para preencher a coluna das frequências percentuais, basta digitar, na célula D2, a fórmula:

=C2

Em seguida, deve-se formatar a célula para exibir o valor em porcentagem, depois selecionar a célula D2 e arrastar a seleção até a célula D8:

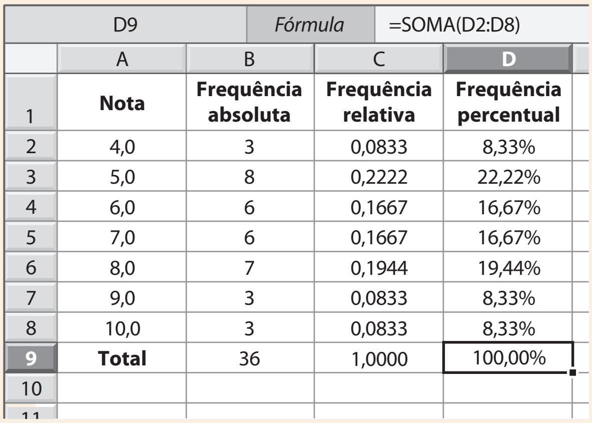


D2 | *Fórmula* | =C2

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	
10				

O total pode ser calculado digitando-se na célula D9 a fórmula:

=SOMA(D2:D8)



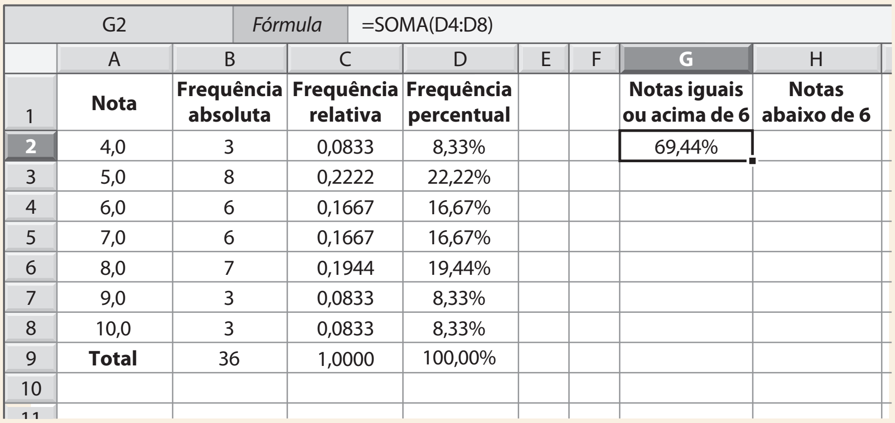
D9 | *Fórmula* | =SOMA(D2:D8)

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%
10				

b) Para calcular a porcentagem de notas iguais ou acima de 6 e a porcentagem de notas abaixo de 6, também é possível usar a planilha eletrônica. Basta digitar, em duas células quaisquer da planilha (que ainda não estejam sendo usadas), as fórmulas:

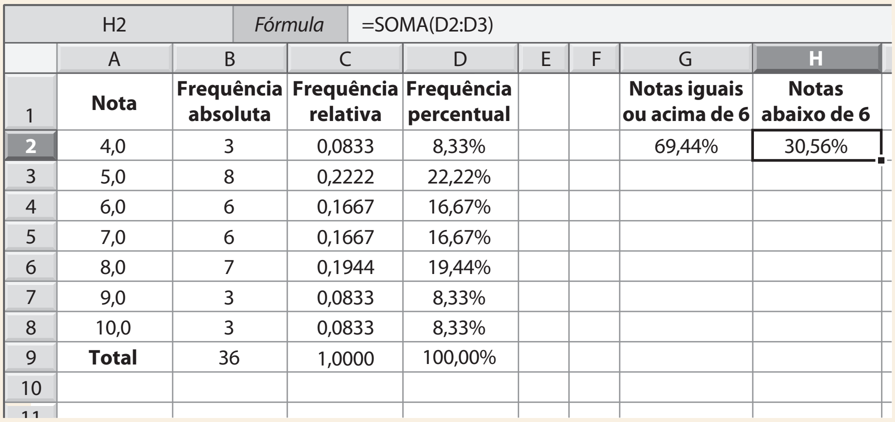
=SOMA(D4:D8) ⟶ para a porcentagem de notas iguais ou acima de 6

=SOMA(D2:D3) ⟶ para a porcentagem de notas abaixo de 6



G2 | *Fórmula* | =SOMA(D4:D8)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**			**Notas iguais ou acima de 6**	**Notas abaixo de 6**
2	4,0	3	0,0833	8,33%			69,44%	
3	5,0	8	0,2222	22,22%				
4	6,0	6	0,1667	16,67%				
5	7,0	6	0,1667	16,67%				
6	8,0	7	0,1944	19,44%				
7	9,0	3	0,0833	8,33%				
8	10,0	3	0,0833	8,33%				
9	**Total**	36	1,0000	100,00%				
10								



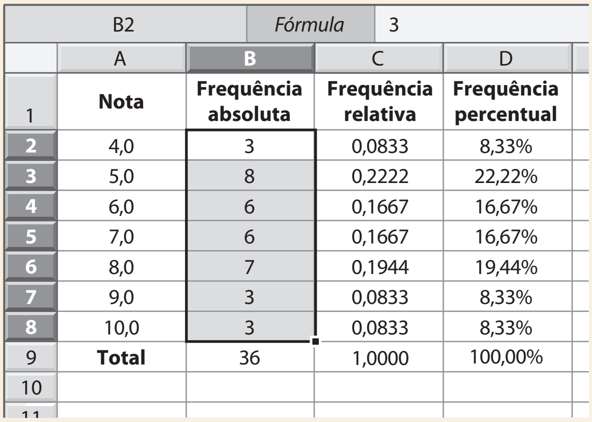
H2 | *Fórmula* | =SOMA(D2:D3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**			**Notas iguais ou acima de 6**	**Notas abaixo de 6**
2	4,0	3	0,0833	8,33%			69,44%	30,56%
3	5,0	8	0,2222	22,22%				
4	6,0	6	0,1667	16,67%				
5	7,0	6	0,1667	16,67%				
6	8,0	7	0,1944	19,44%				
7	9,0	3	0,0833	8,33%				
8	10,0	3	0,0833	8,33%				
9	**Total**	36	1,0000	100,00%				
10								

Portanto, a porcentagem de notas iguais ou acima de 6 é de 69,44%, e a porcentagem de notas abaixo de 6 é de 30,56%.

c) Vamos construir os dois tipos de gráfico aproveitando a tabela já construída no item **a**.

- Para construir o gráfico de barras, basta selecionar os dados da coluna de frequências absolutas e selecionar a opção para inserir gráfico de barras; há várias opções de estilo para os gráficos de barras (horizontais, verticais, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar dos retângulos).

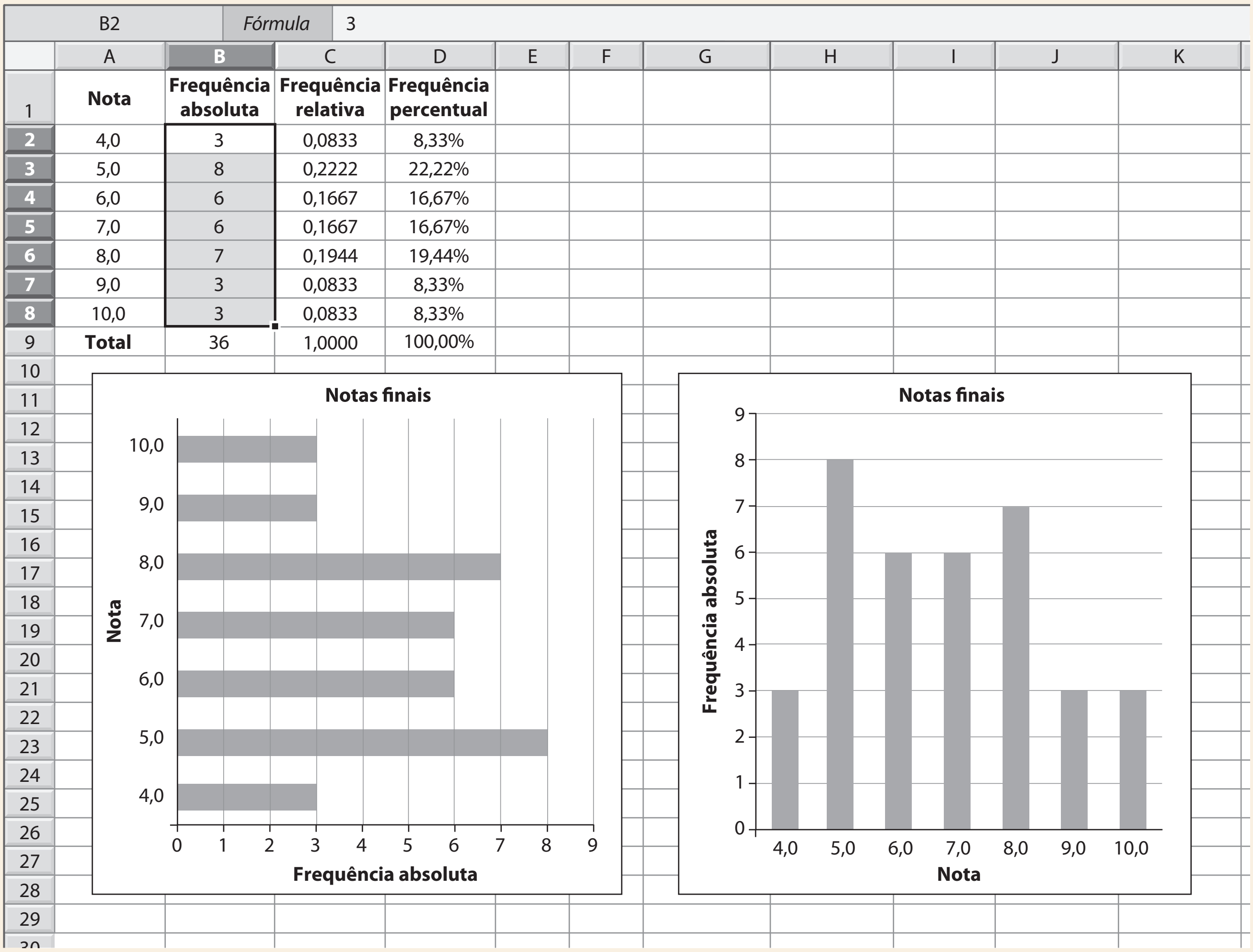


B2 | *Fórmula* | 3

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%
10				

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar os rótulos do eixo que exibe as notas. Também é possível inserir nomes nos eixos, título no gráfico, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

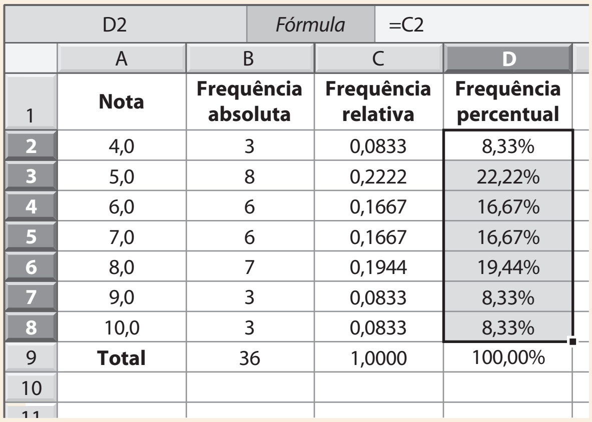


B2 | *Fórmula* | 3

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%

A B C D E F G H I J K
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
Notas finais
10,0
9,0
8,0
7,0
6,0
5,0
4,0
Nota
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Frequência absoluta
Notas finais
9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
Frequência absoluta
4,0 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0 10,0
Nota

- Para construir o gráfico de setores, pode-se selecionar os dados da coluna de frequências absolutas ou da de frequências percentuais e escolher a opção para inserir gráfico de setores; nesse caso, também há várias opções de estilo para o gráfico.

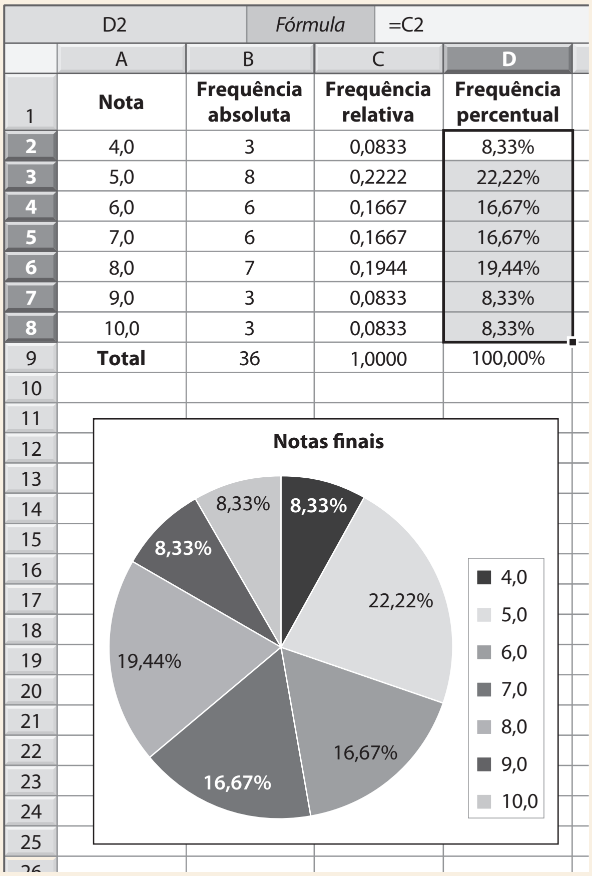


D2 | *Fórmula* | =C2

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar a legenda com as notas finais dos alunos. Também é possível inserir título no gráfico, alterar cores, tamanho, estilo das bordas etc.



D2 | *Fórmula* | =C2

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%

LUIZ RUBIO

d) Espera-se que os alunos percebam que o tipo de gráfico mais recomendado depende do que se pretende analisar. O gráfico de setores é melhor para representar os dados quando se quer analisar a distribuição de cada nota em relação ao total; o gráfico de barras é mais indicado quando se deseja deixar evidente o número de alunos que tirou cada uma das notas.

Comentário: Essa questão leva os alunos a refletir sobre a melhor maneira de comunicar uma situação apresentada: a representação tabular ou a gráfica. Na representação gráfica, a opção por diferentes tipos de gráfico depende do objetivo da análise da situação. Por exemplo, quando se quer comparar um dado com o conjunto de dados, isto é, com o todo, convém o uso do gráfico de setores. No caso de comparar um dado com outro dado, o gráfico de barras é melhor. O mesmo é válido para as questões complementares **4** e **6**.

Exercícios complementares

1. Temos:

$$\frac{8\text{ cm}}{2.000\text{ km}} = \frac{8\text{ cm}}{200.000.000\text{ cm}} = \frac{1\text{ cm}}{25.000.000\text{ cm}}$$

Logo, o mapa observado pelo aluno está na escala de 1 : 25.000.000.

alternativa e

2. a) 1º A: 31,25% de 32 — 1º B: 12,50% de 24

$\frac{31{,}25}{100} \cdot 32 = 10$ — $\frac{12{,}50}{100} \cdot 24 = 3$

Da turma A foram 10 alunos e da turma B, 3 alunos.

b) Não, pois os totais de alunos de cada turma são diferentes. Desse modo, 25% representam quantidades diferentes, como pode ser visto a seguir:

1º A: 25% de 32 — 1º B: 25% de 24

$\frac{25}{100} \cdot 32 = 8$ — $\frac{25}{100} \cdot 24 = 6$

Comentário: O assunto apresentado possibilita um trabalho interdisciplinar sobre a obesidade nos jovens, seus hábitos alimentares, sedentarismo etc.
No item **b**, é interessante reforçar o fato de a porcentagem ser um conceito relativo ao todo considerado.

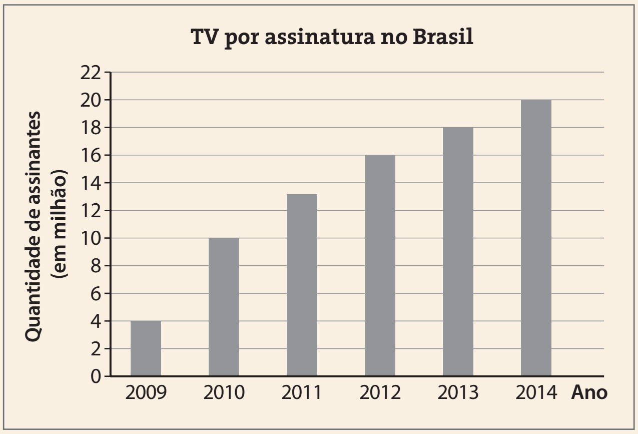
3. (I) Falsa.
O pai participa em:
35% + 45% + 7% = 87% → 870 famílias
(II) Verdadeira.
O pai e a mãe participam em:
45% + 7% = 52% → 520 famílias
alternativa c

4. a)

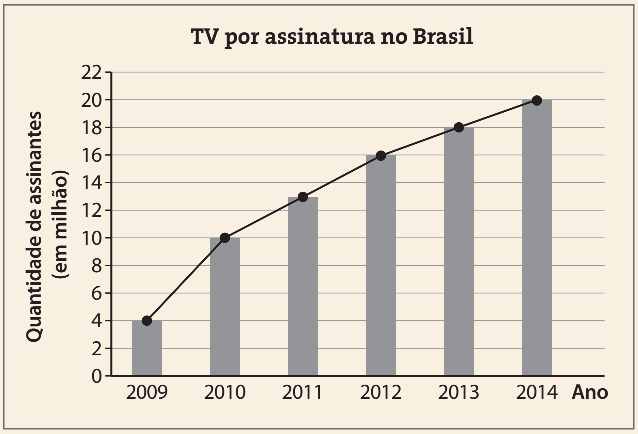
TV por assinatura no Brasil

Ano	Número arredondado de assinaturas (em milhão)
2009	4
2010	10
2011	13
2012	16
2013	18
2014	20

b)



c)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

d) Espera-se que os alunos percebam que ambos os gráficos são adequados para representar a evolução dos resultados.

5. a) Pode-se observar que, de janeiro de 2007 a janeiro de 2015, o número de automóveis aumentou cerca de 20 milhões.

b) região Norte

c) A região Sudeste, com crescimento de cerca de 10 milhões de automóveis.

d) Em jan./2007, o número de automóveis era, aproximadamente, 28 milhões. Em jan./2015, esse número era, aproximadamente, 48 milhões.

$48 - 28 = 20$

Logo, o crescimento foi de aproximadamente 20 milhões de automóveis. Em porcentagem:

$$\frac{28}{100\%} = \frac{20}{x} \Rightarrow 28 \cdot x = 20 \cdot 100\% \Rightarrow x \simeq 71{,}4\%$$

Assim, o crescimento do número total de automóveis no Brasil de janeiro de 2007 a janeiro de 2015 foi de aproximadamente 71,4%.

e) resposta pessoal

Neste item, pode-se discutir com os alunos, por exemplo, os impactos ambientais, como a poluição, e sociais, como o trânsito, que esse crescimento gera na vida da população.

6. a) Sim, os dados referentes a idosos e crianças em 2008 e 2050, indicados no gráfico, são compatíveis com os apresentados no texto.

b)

População (em milhões)

Idade \ Ano	1980	2008	2030	2050
Até 14 anos	45,3	50,2	36,8	28,3
De 15 a 64 anos	68,5	127,0	150,8	138,1
65 anos ou mais	4,7	12,4	28,8	48,9
Total	118,5	189,6	216,4	215,3

c) Em 2008, a população de idosos era de 12,4 milhões; em 2050, deverá ser de 48,9 milhões.

$48{,}9 - 12{,}4 = 36{,}5$

Então, o aumento deverá ser de 36,5 milhões.

Calculando a taxa percentual de crescimento, obtemos:

$$\frac{12{,}4}{100\%} = \frac{36{,}5}{x} \Rightarrow 12{,}4 \cdot x = 3.650\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \simeq 294{,}35\%$$

A taxa de crescimento da população idosa é de aproximadamente 294,35%.

Em 2050, a população de crianças será de 28,3 milhões; em 2008, era de 50,2 milhões.

$50{,}2 - 28{,}3 = 21{,}9$

Logo, a diminuição da população infantil será de 21,9 milhões.

Calculando a taxa percentual, obtemos:

$$\frac{50{,}2}{100\%} = \frac{21{,}9}{x} \Rightarrow 50{,}2 \cdot x = 2.190\% \Rightarrow x \simeq 43{,}63\%$$

A taxa de diminuição da população infantil é aproximadamente 43,63%.

d) Espera-se que os alunos respondam “o gráfico”.

e) Sim. Resposta possível: Essas informações são úteis para direcionar as políticas públicas e permitir ao governo tomar as providências necessárias para atender a essa nova realidade.

Autoavaliação

1. sexo: qualitativa
tempo de residência: quantitativa
satisfação: qualitativa
frequência: quantitativa
alternativa c

2. Nos sábados:

- Homens:

  $35 + 32 + 37 + 39 = 143$

- Mulheres:

  $28 + 30 + 25 + 37 = 120$

- Total de espectadores:

  $143 + 120 = 263$

$$\frac{263}{100} = \frac{143}{x} \Rightarrow 263 \cdot x = 14.300 \Rightarrow x \simeq 54$$

$y \simeq 100 - 54 \Rightarrow y \simeq 46$

Portanto, o percentual de homens é de aproximadamente 54%, e o percentual de mulheres é de aproximadamente 46%.

Nos domingos:

- Homens:

  $40 + 28 + 28 + 27 = 123$

- Mulheres:

  $30 + 31 + 35 + 33 = 129$

- Total de espectadores:

  $123 + 129 = 252$

$$\frac{252}{100} = \frac{123}{x} \Rightarrow 252 \cdot x = 12.300 \Rightarrow x \simeq 49$$

$y \simeq 100 - 49 \Rightarrow y \simeq 51$

Portanto, o percentual de homens é de aproximadamente 49%, e o percentual de mulheres é de aproximadamente 51%.
alternativa b

3. $$\frac{25}{100} = \frac{x}{360} \Rightarrow 100 \cdot x = 25 \cdot 360 \Rightarrow x = 90$$

Portanto, é a região 2 que representa 25%.
alternativa c

4.

Nota	Nº de alunos	Soma das notas
4	2	$4 \cdot 2 = 8$
5	10	$5 \cdot 10 = 50$
6	12	$6 \cdot 12 = 72$
7	8	$7 \cdot 8 = 56$
8	3	$8 \cdot 3 = 24$
10	5	$10 \cdot 5 = 50$
Total	40	260

Razão da soma das notas pelo número de alunos:

$260 : 40 = 6{,}5$

alternativa d

5. **a)** Das 12 pessoas com 31 anos ou mais, 9 pessoas (a maioria) atribuíram nota acima de 5; portanto, consideram a educação de qualidade acima da média. (correta)

b) Nenhum entrevistado até 20 anos atribuiu nota máxima. (errada)

c) Pela tabela, podemos calcular a soma das notas dadas pelos 45 entrevistados:

$1 \cdot 3 + (2 + 2) \cdot 4 + (2 + 1 + 3) \cdot 5 +$
$+ (4 + 4 + 1 + 1) \cdot 6 + (3 + 1 + 1 + 1) \cdot 7 +$
$+ (1 + 1 + 1) \cdot 8 + (1 + 1) \cdot 9 =$
$= 3 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 =$
$= 3 + 16 + 30 + 60 + 42 + 24 + 18 = 193$

A nota média da pesquisa é dada pelo quociente entre a soma das notas e o total de pessoas entrevistadas na pesquisa.

$193 : 32 \simeq 6$

Como a nota 5 determina qualidade média, então a nota 6 está acima da média. (errada)

d) Pelo que foi descrito nas alternativas anteriores, pode-se perceber que existe relação entre as duas variáveis. (errada)

alternativa a

Pesquisa e ação

Essa atividade pretende inserir os alunos no universo da pesquisa estatística, fazendo com que eles reflitam sobre temas importantes do mundo em que vivem. Assim, os temas sugeridos propõem reflexões sobre meio ambiente, saúde, consumo e mercado de trabalho.

Com base na escolha do tema da pesquisa, os grupos devem definir o tamanho e as características da amostra escolhida. Essa escolha deve ser justificada por cada grupo com argumentos relativos ao tema. O passo seguinte é construir o instrumento de pesquisa. Em geral, usa-se o questionário contendo itens respondidos por meio de múltipla escolha. Essa metodologia facilita a tabulação dos dados. Mas é preciso alertá-los sobre a possibilidade da inserção das questões abertas. Nesse caso, devem-se construir categorias de análise no momento da tabulação. O professor deve orientar a aplicação dos questionários, mostrando aos alunos a necessidade de expor os objetivos da pesquisa aos entrevistados. Os alunos deverão, então, tabular os dados obtidos, analisando-os de forma a responder às questões levantadas inicialmente sobre o tema escolhido.

A análise dos resultados levará à construção de uma apresentação, que poderá ser feita por meio de cartazes ou *softwares* adequados. A apresentação deverá mostrar as etapas do trabalho de pesquisa e as conclusões obtidas sobre o tema escolhido. O uso de tabelas e gráficos deverá ser avaliado. O professor poderá expor os materiais em áreas comuns da escola, divulgando e valorizando o trabalho de seus alunos.

A pesquisa estatística e a construção de materiais de apresentação são atividades com características de projeto, o que pressupõe uma parte do trabalho sendo desenvolvida fora da sala de aula. Os alunos deverão ter tarefas específicas para desenvolver em casa. Dessa maneira, é necessário, nos planejamentos de aula, considerar tempos específicos para o desenvolvimento desta atividade.

Compreensão de texto

Nas atividades dessa seção, os alunos são levados, de maneira lúdica, a estabelecer relações entre as linguagens alfabética, numérica e gráfica, codificando e decodificando um texto. É interessante promover uma reflexão com a classe e discutir postura e relacionamento social.

1. **a)** A história se passa na praia.
b) As crianças brincavam de construir castelo de areia.
c) Quem desmanchou o castelo foi uma onda do mar.
d) As crianças correram pela praia, fugindo da água, rindo de mãos dadas.
e) O narrador aprendeu que tudo o que construímos na vida pode ser destruído, só o que permanece é a amizade, o amor e o carinho. O resto é feito de areia.

2.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4	8	C	D	3	F	G	H	1	J

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
K	L	M	N	0	P	Q	R	5	7

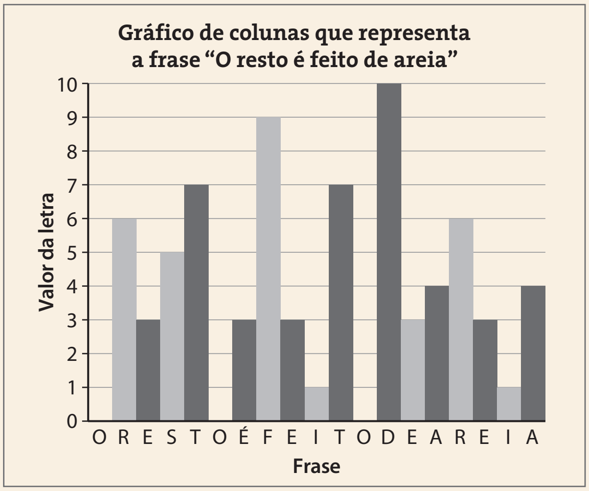
U	V	W	X	Y	Z
U	V	W	X	Y	2

3. resposta pessoal

4. Em dia de verão, estava na praia, observando duas crianças brincando na areia. Elas trabalhavam muito construindo um castelo de areia, com torres, passarelas e passagens internas.
Quando estavam quase acabando, veio uma onda e destruiu tudo, reduzindo o castelo a um monte de areia e espuma.
Achei que, depois de tanto esforço e cuidado, as crianças cairiam no choro; correram pela praia, fugindo da água, rindo de mãos dadas e começaram a construir outro castelo. Compreendi que havia aprendido uma grande lição; gastamos muito tempo da nossa vida construindo alguma coisa e, mais cedo ou mais tarde, uma onda poderá vir e destruir tudo o que levamos tanto tempo para construir. Mas, quando isso acontecer, somente aquele que tem as mãos de alguém para segurar será capaz de sorrir! Só o que permanece é a amizade, o amor e o carinho.
O resto é feito de areia.

(Autor desconhecido)

5.



ADILSON SECCO

Capítulo 2

Conjuntos

Como muitos dos conceitos estudados no Ensino Médio exigem maior formalismo na linguagem usada nas definições, nas resoluções e na apresentação dos resultados, esse capítulo tem o intuito de apresentar o necessário da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos para o estudo dos demais capítulos, associando essa linguagem, sempre que possível, a situações cotidianas.

Aqui, trabalham-se a noção e a definição de conjunto, seus elementos, suas representações e classificações — conteúdos necessários para a introdução do estudo desenvolvido no Capítulo 3, "Funções".

Em diversos momentos desta coleção, vamos recorrer a conceitos formalizados nesse segundo capítulo. Por exemplo, no estudo da Geometria (nos volumes do 2º e do 3º ano), ao dizer que um ponto pertence a uma reta ou que uma reta está contida em um plano; ao escrever o conjunto solução de equações e inequações; ao trabalhar os conjuntos numéricos, desde o conjunto dos números naturais até o conjunto dos números complexos (volume do 3º ano desta coleção); no estudo das funções constituídas de relações entre conjuntos determinadas por uma lei e na resolução de problemas probabilísticos (volume do 3º ano desta coleção) e estatísticos.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. **a)** $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
b) $B = \{A, E, I, O\}$
c) $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. Respostas possíveis:
a) D: x é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40.
b) E: fases da Lua.
c) F: x é um número ímpar maior que 3 e menor que 21.

3. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$
$C = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$
a) falsa
b) verdadeira
c) verdadeira
d) falsa
e) verdadeira
f) verdadeira

4. **a)** Não. Existem números ímpares que não são múltiplos de 3.
b) Não. Existem números ímpares que não são primos.
c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

5. $A = \{1\}$; $B = \varnothing$; $C = \{1\}$
Logo, $A = C$.

6. **a)** $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

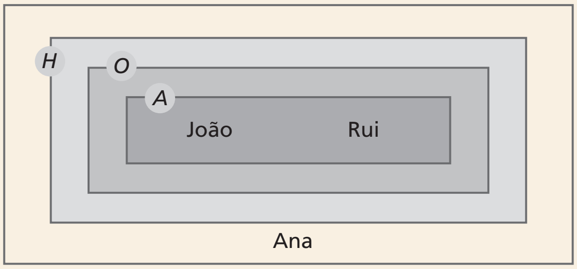
7. **a)** Falsa, pois há elementos de D (os elementos 2 e 3) que não pertencem a C.
b) verdadeira
c) Falsa, pois 1 não é primo.
d) verdadeira
e) Falsa, pois existem números ímpares que não são primos, como o número 9.
f) verdadeira
g) Falsa, pois os conjuntos E e F não possuem os mesmos elementos.
h) verdadeira
i) verdadeira

8. **a)** $J = \{2, 9\}$
b) $K = \{3, 9\}$
c) $L = \{8, 4\}$
d) $M = \{5, 7, 9\}$

9. Sabendo que $M \subset A$, há oito possibilidades:
1) $M = \{a\}$
2) $M = \{b\}$
3) $M = \{c\}$
4) $M = \{a, b\}$
5) $M = \{a, c\}$
6) $M = \{b, c\}$
7) $M = \{a, b, c\}$
8) $M = \varnothing$
Porém, sabemos que $M \supset B$. Logo, há somente quatro possibilidades:
$M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

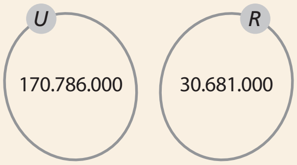
11. $H = \{\text{Jonas, Carlos, João, Rui}\}$
$A \subset O$ e $O \subset H \Rightarrow A \subset H$
João $\in A$ e Rui $\in A$
Temos, então, o seguinte diagrama:



Logo, há quatro possibilidades para o conjunto O:
$O = \{\text{João, Rui}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Jonas}\}$ ou
$O = \{\text{João, Rui, Carlos}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Carlos, Jonas}\}$

12. **a)** $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\}$
b) $Y \cup Z = \{1, 3, 5\}$
c) $Z \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

13. Como uma pessoa não pode morar simultaneamente na área urbana e na área rural, os conjuntos U e R não têm elementos comuns; logo, são disjuntos.



Portanto, o conjunto $P = U \cup R$ tem 201.467.000 elementos, que é a soma das quantidades de elementos de U e de R.

14. $P = \{0, 2, 4, 6, ...\}$
$I = \{1, 3, 5, 7, ...\}$
$M = \{0, 10, 20, 30, ...\}$
a) $P \cap M = \{0, 10, 20, ...\} = M$
b) $P \cap I = \varnothing$
c) $I \cap M = \varnothing$
d) $P \cup I = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
$(P \cup I) \cap M = \{0, 10, 20, 30, ...\} = M$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

15. Temos $Y = \{2, 3, 5\}$. Então:

a) $X - Z = \{n \mid n \in X \text{ e } n \notin Z\} = \{\ \} = \varnothing$

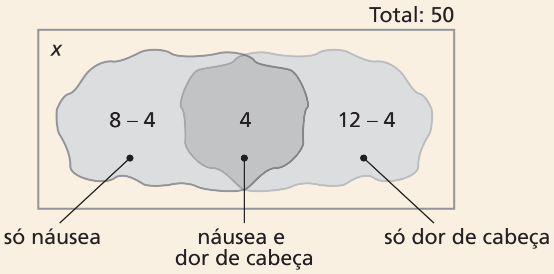
b) $Y - X = \{n \mid n \in Y \text{ e } n \notin X\} = \{5\}$

c) $Z - X = \{n \mid n \in Z \text{ e } n \notin X\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

16. **a)** Resposta possível: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) Respostas possíveis: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. Vamos considerar o seguinte diagrama:



$12 - 4 = 8$

Logo, 8 voluntários sentiram dor de cabeça, mas não náusea.

$x = 50 - [(8 - 4) + 4 + (12 - 4)] = 50 - 16 = 34$

Logo, 34 voluntários não sentiram dor de cabeça nem náusea.

18. Conforme definido, os conjuntos dados são:

$P = \{2, 3, 5, 7\}$ $\quad M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $\quad Q = \{0, 4, 8\}$

a) verdadeira

b) Falsa, pois: $P \cup M = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Logo, $n(P \cup M) = 8$.

c) Verdadeira, pois: $P \cap M = \{2\} \Rightarrow n(P \cap M) = 1$

d) Falsa, pois: $Q - M = \varnothing \Rightarrow n(Q - M) = 0$

e) Verdadeira, pois: $P \cup Q = \{0, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

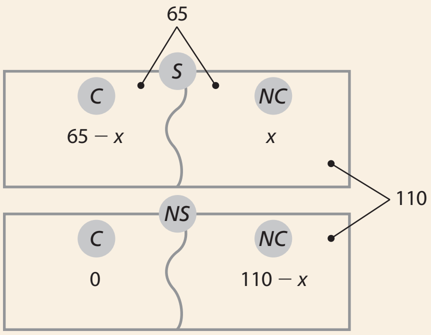
Logo, $n(P \cup Q) = 7$.

f) Verdadeira, pois: $M - P = \{0, 4, 6, 8\}$

Logo, $n(M - P) = 4$.

19. Para solucionar este problema, vamos construir um diagrama considerando o conjunto das pessoas que acharam a margarina muito salgada (S) e o das que acharam não muito salgada (NS) e subdividir cada um desses conjuntos nos conjuntos das que acharam a margarina cremosa (C) e das que acharam não muito cremosa (NC).

Sendo x o número de pessoas que achou a margarina não cremosa e muito salgada, temos:

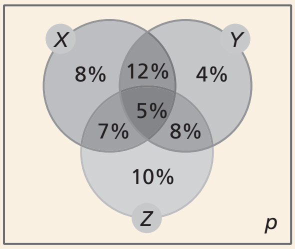


Como foram entrevistadas 150 pessoas, 40 acharam a margarina cremosa. Então: $40 = 65 - x + 0 \Rightarrow x = 25$

Logo, 25 pessoas acharam que a margarina não é cremosa e é muito salgada.

Comentário: Neste ponto, é importante retomar o exercício resolvido **R5** e mostrar que a representação por conjuntos facilita a resolução dos exercícios **19** a **21**.

20. Podemos construir o seguinte diagrama:



a) A porcentagem do público que gostou de algum filme é dada por:

$8\% + 12\% + 5\% + 7\% + 4\% + 8\% + 10\% = 54\%$

Então: $p = 100\% - 54\% = 46\%$

Logo, 46% do público não gostou de nenhum dos três filmes.

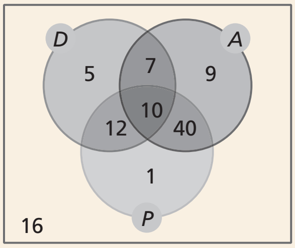
b) $n(X \cup Y) = 44\%$

$n(X \cup Z) = 50\%$

$n(Y \cup Z) = 46\%$

Os filmes escolhidos seriam X e Z, pois $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$.

21. Podemos construir o seguinte diagrama:



(I) O número total de pessoas pesquisadas é igual a:

$5 + 7 + 10 + 12 + 9 + 40 + 1 + 16 = 100$

O número de pessoas que achou o preço mais elevado é igual a: $n(P) = 63$

Logo, é verdadeira a afirmação.

(II) De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.

(III) Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento que criar vantagens na forma de pagamento.

Comentário: Essa questão retrata e propõe uma situação-problema frequente e importante de ser resolvida no mundo empresarial e do trabalho. A análise do sucesso comercial de um produto passa por um procedimento com várias etapas: coleta e organização de informações, conjecturas com base nesses dados, verificação dessas conjecturas e tomada de decisões.

Os conceitos de conjunto e de suas operações constituem ferramentas a serem usadas para a validação ou não, nem sempre evidentes, das suposições elaboradas.

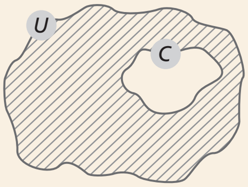
22. **a)** $A^C = \{6, 8, 10\}$

b) $B^C = \{0, 2, 10\}$

c) $C^C = \{0, 2, 6, 8, 10\}$

d) $\complement_B^C = B - C = \{6, 8\}$

23. Vamos considerar o diagrama ao lado, que representa a situação descrita.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Seja A o conjunto que representa a região hachurada no diagrama anterior. Então: $U = A \cup C$

$A = C^C = U - C \Rightarrow A^C = U - A = C$

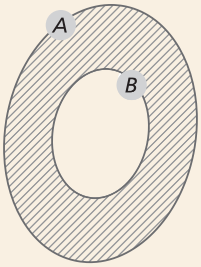
Logo, o complementar do complementar de C é o próprio conjunto C.

24. **a)** $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cup B) = 10 + 5 - 0$
$n(A \cup B) = 15$

b) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cup B) = 15 + 15 - 3$
$n(A \cup B) = 27$

c) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
Se $n(A) = 0$, então $n(A \cap B) = 0$.
Logo, $n(A - B) = 0$.

d) $A \cap \complement_A^B = A \cap (A - B) = A - B$



ADILSON SECCO

Logo: $n(A - B) = n\left(A \cap \complement_A^B\right) = 5$

25. **a)** Falsa, pois -2 é um número negativo e, portanto, não é natural.

b) verdadeira

c) verdadeira

d) Falsa, pois o zero é natural e não pertence ao conjunto $\mathbb{Z}^*$.

e) verdadeira

f) Falsa, pois $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \{0\}$.

26. Resposta possível: a divisão não está definida para quaisquer dois números inteiros a e b. Considerando, por exemplo, $a = 0$ e $b = 3$, a divisão $\frac{b}{a}$ não está definida em $\mathbb{Z}$. E, ainda, para $a = 2$ e $b = 3$, a divisão $\frac{a}{b}$ não está definida em $\mathbb{Z}$.

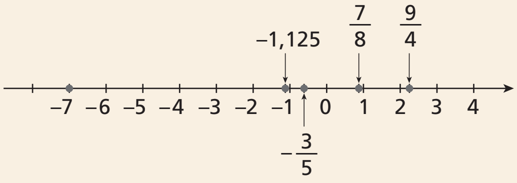
27. **a)** O conjunto $\mathbb{N}$.

b) O conjunto $\mathbb{Q}$, pois existem valores não inteiros.

c) O conjunto $\mathbb{Z}$, pois em alguns casos indicam-se os andares abaixo do térreo com valores negativos.

d) O conjunto $\mathbb{Q}$.

28. $\frac{9}{4} > \frac{7}{8} > -\frac{3}{5} > -1{,}125 > -7$



ADILSON SECCO

29. **a)** • Seja x a fração geratriz:
$x = -10{,}111...$ (I)
$10x = -101{,}111...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), temos:
$9x = -91$
$x = -\frac{91}{9}$

• Seja y a fração geratriz:
$y = -10{,}010101...$ (I)
$100y = -1001{,}0101...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), temos:
$99y = -991$
$y = -\frac{991}{99}$

b) • Seja x a fração geratriz:
$x = 1{,}333...$ (I)
$10x = 13{,}333...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), temos:
$9x = 12$
$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

• Seja y a fração geratriz:
$y = 1{,}5333...$ (I)
$10y = 15{,}333...$ (II)
$100y = 153{,}333....$ (III)
Subtraindo (II) de (III), temos:
$90y = 138$
$y = \frac{138}{90} = \frac{23}{15}$

30. Vamos considerar os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d números inteiros e b e d não nulos.

a) A diferença de x e y é dada por:

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd}$$

Temos: $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$, $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot d - b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo. Portanto, a diferença de dois números racionais é um número racional.

b) O quociente de x e y, com $y \neq 0$, é dado por:

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Temos $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$, $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo. Portanto, o quociente de dois números racionais é um número racional.

Comentário: Uma extensão dessa atividade e do **R7**, da página **44** do livro do aluno, pode ser proposta aos alunos: demonstrar que a potência enésima de um número racional é um número racional, sendo n um número natural.

31. **a)** verdadeira

b) verdadeira

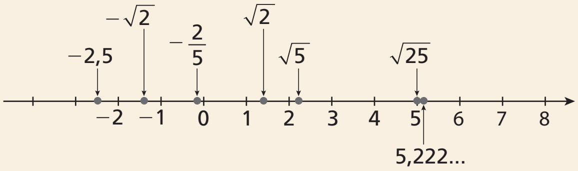
c) Falsa, pois, por exemplo, $1 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

d) verdadeira

e) verdadeira

f) Falsa, pois toda dízima periódica pode ser escrita na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$; portanto, é um número racional.

32.



LUIZ RUBIO

ordem crescente: $-2{,}5$; $-\sqrt{2}$; $-\frac{2}{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{25}$; 5,222...

a) Existem dois naturais: 0 e 1.

b) Existem três inteiros: -1, 0 e 1.

c) Existem infinitos racionais, pois, por exemplo, podemos obter a média aritmética entre 0 e 1, que é um número racional; depois, obter a média aritmética entre 0 e a média obtida anteriormente; e assim sucessivamente.

d) Existem infinitos reais, pois, por exemplo, existem infinitos números racionais.

33. **a)** $-13 \notin \mathbb{N}$ **d)** $\frac{6}{16} \in \mathbb{Q}$ **g)** $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

b) $0 \notin \mathbb{Z}^*$ **e)** $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}^*$ **h)** $\mathbb{R}^* \not\subset \mathbb{R}_+$

c) $-2{,}25 \notin \mathbb{Q}_+$ **f)** $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{R}_-$ **i)** $\mathbb{Q}_+ \not\subset \mathbb{R}_-$

34. **a)** Verdadeira. Seja $x \in \mathbb{Q}$, então $x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; logo, $x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}$, isto é, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.

b) Falsa, pois, por exemplo: $-1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$

c) Falsa, pois: $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

d) Falsa, pois: $0 \in \mathbb{N}$ e $0 \notin \mathbb{Z}^*$

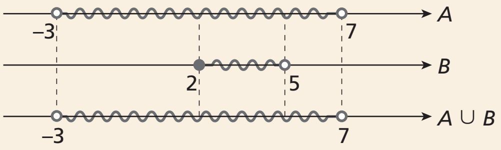
35. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\right\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$

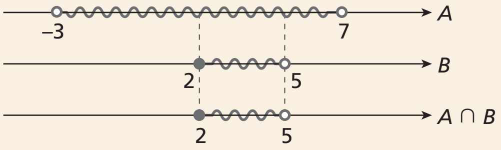
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

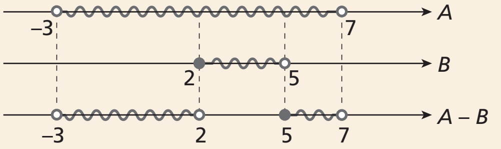
36. **a)**



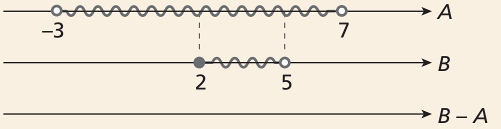
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\} = A$



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\} = B$

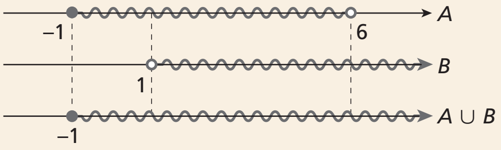


$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 5 \leqslant x < 7\}$

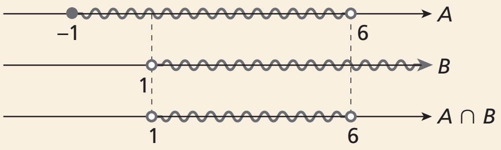


$B - A = \varnothing$

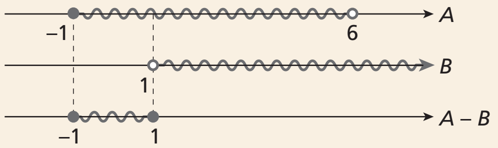
b)



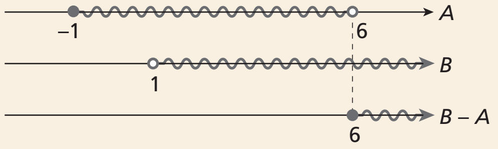
$A \cup B = [-1, +\infty[$



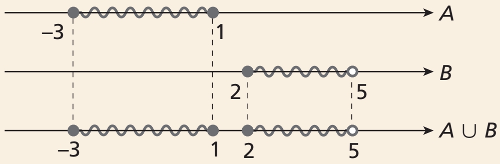
$A \cap B =]1, 6[$



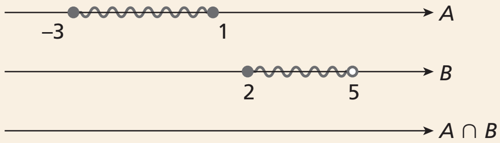
$A - B = [-1, 1]$



$B - A = [6, +\infty[$

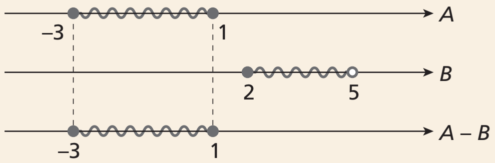


$A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$

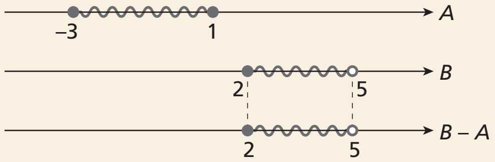


$A \cap B = \varnothing$

c)



$A - B = [-3, 1] = A$



$B - A = [2, 5[= B$

37. Comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$

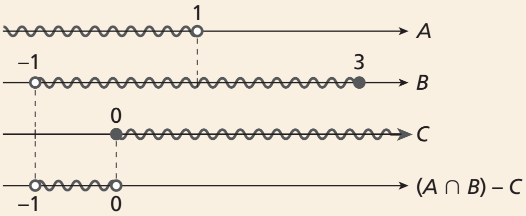
Para $r = 0{,}5$, temos: $C = 2\pi(0{,}5) = \pi \simeq 3{,}14$

Área do círculo: $A = \pi r^2$

Para $r = 0{,}5$, temos: $A = \pi(0{,}5)^2 = 0{,}25\pi \simeq 0{,}79$

alternativa d

38.



alternativa a

Exercícios complementares

1. **a)** $A = \{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$

b) $B = \varnothing$

c) $C = \{0, 1, 2\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2. Respostas possíveis:

a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$

b) $B = \{x \mid x$ é natural e potência de $2\}$

3. **a)** $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $A - C = \{0, 1, 2\}$

c) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$

d) $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

e) $A - B = \{0\}$

f) $A \cap C = \{3, 4\}$

g) $B \cap C = \{3, 4, 5, 6\} = C$

h) $(A - B) \cap C = \{\ \} = \varnothing$

4. **a)** O resultado de $(A \cap B)$ está representado nas regiões IV e VII.

O resultado de $(A \cap B) - C$ está representado na região IV.

b) $B - A = \varnothing$

Logo: $(B - A) \cap C = \varnothing$

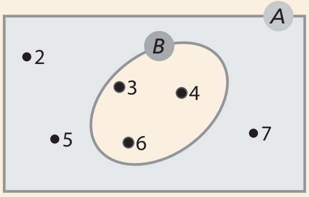
c) O resultado de $(A - B)$ está representado na região I.

Logo: $(A - B) \cap C = \varnothing$

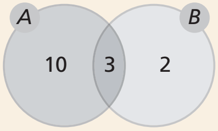
5. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B = \{3, 4, 6\}$

$\complement_A^B = A - B = \{2, 5, 7\}$



6.



Pelo diagrama, três pessoas usam os produtos A e B.

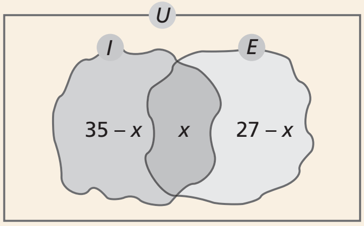
7. Vamos considerar os conjuntos:

U: conjunto de todos os alunos da sala de aula

E: conjunto dos alunos que falam espanhol

I: conjunto dos alunos que falam inglês

Podemos construir o seguinte diagrama:


U
I
E
35 – x
x
27 – x

a) $35 - x + x + 27 - x = 50 \Rightarrow x = 12$

Assim, 12 alunos falam inglês e espanhol.

b) $35 - x = 35 - 12 = 23$

Assim, 23 alunos falam somente inglês.

c) $27 - x = 27 - 12 = 15$

Assim, 15 alunos falam somente espanhol.

8. Se $A \cap M = \{3\}$, então $3 \in M$ e $7 \notin M$.

Se $B \cap M = \{8\}$, então $8 \in M$, $7 \notin M$ e $9 \notin M$.

Como $A = \{3, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$ e

$A \cup B \cup M = \{3, 7, 8, 9, 10\}$, então $10 \in M$.

Logo, $M = \{3, 8, 10\}$ e $n(M) = 3$.

9. Podemos definir os seguintes conjuntos:

U: conjunto de todas as pessoas analisadas

A: conjunto das pessoas que têm miopia

B: conjunto das pessoas que têm astigmatismo

Então:

$n(U) = n(A \cup B) = 45$

$n(A) = x + 9$

$n(B) = x$

$n(A \cap B) = 40\% \cdot (45) = 18$

Logo:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

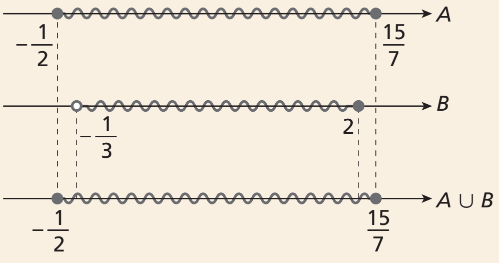
$45 = x + 9 + x - 18$

$54 = 2x$

$x = 27$

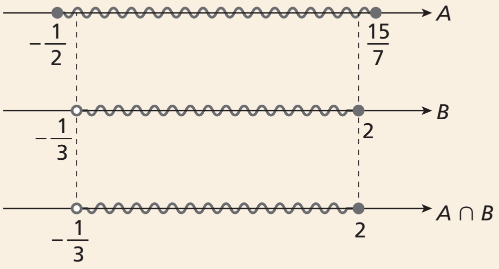
Portanto, 27 pessoas têm astigmatismo e 36 pessoas têm miopia.

10. **a)**


A
$-\frac{1}{2}$
$\frac{15}{7}$
B
$-\frac{1}{3}$
2
A ∪ B
$-\frac{1}{2}$
$\frac{15}{7}$

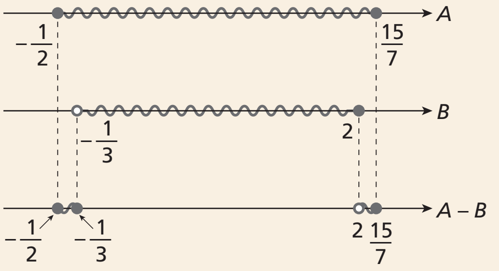
$A \cup B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{15}{7}\right] = A$

b)


A
$-\frac{1}{2}$
$\frac{15}{7}$
B
$-\frac{1}{3}$
2
A ∩ B
$-\frac{1}{3}$
2

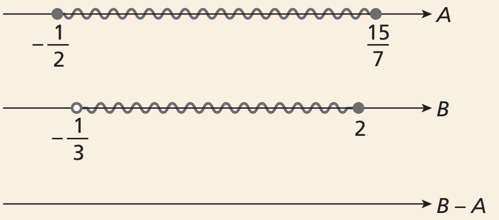
$A \cap B = \left]-\frac{1}{3}, 2\right] = B$

c)


A
$-\frac{1}{2}$
$\frac{15}{7}$
B
$-\frac{1}{3}$
2
A – B
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{3}$
2
$\frac{15}{7}$

$A - B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

d)


A
$-\frac{1}{2}$
$\frac{15}{7}$
B
$-\frac{1}{3}$
2
B – A

$B - A = \varnothing$

e) $\complement_A^B = A - B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

11. Sabemos que os conjuntos *A* e *B* são iguais, ou seja, possuem os mesmos elementos. Então, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Logo, $x = 1$ e $y = 2$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

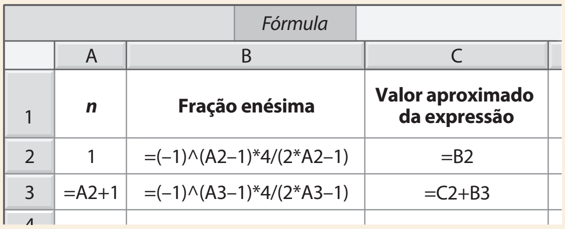
12. **a)** O número máximo de elementos de $A - B$ é obtido quando A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$. Nesse caso:
$n(A - B) = n(A) = x$

b) Da mesma forma que no item **a**, o número máximo de elementos de $B - A$ é obtido quando A e B são disjuntos. Nesse caso:
$n(B - A) = n(B) = y$

c) O número máximo de elementos de $A \cup B$ é obtido quando A e B são disjuntos, ou seja, quando $n(A \cap B) = 0$. Nesse caso:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = x + y$

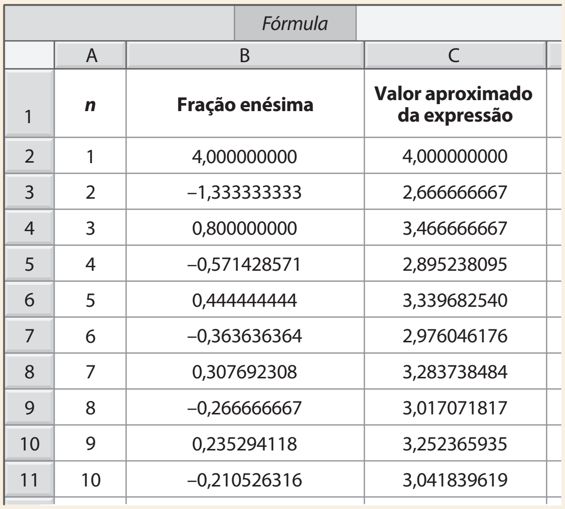
d) O número máximo de elementos de $A \cap B$ é obtido quando $B \subset A$ (já que o número de elementos de A é maior que o de B). Nesse caso:
$n(A \cap B) = n(B) = y$

13. Em uma planilha eletrônica, pode-se fazer:



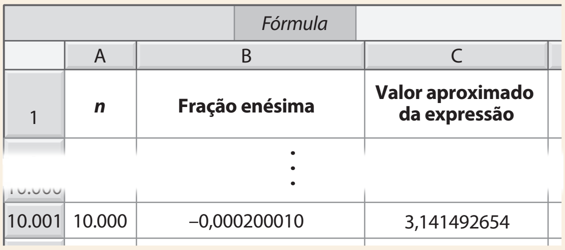
	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
2	1	=(–1)^(A2–1)*4/(2*A2–1)	=B2
3	=A2+1	=(–1)^(A3–1)*4/(2*A3–1)	=C2+B3

Da linha 4 em diante, basta copiar as fórmulas da linha anterior.
As primeiras linhas, para n variando de 1 a 10, ficam assim:



	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
2	1	4,000000000	4,000000000
3	2	–1,333333333	2,666666667
4	3	0,800000000	3,466666667
5	4	–0,571428571	2,895238095
6	5	0,444444444	3,339682540
7	6	–0,363636364	2,976046176
8	7	0,307692308	3,283738484
9	8	–0,266666667	3,017071817
10	9	0,235294118	3,252365935
11	10	–0,210526316	3,041839619

Continuando a iteração, arrastando a seleção das células A3, B3 e C3 até as células A10.001, B10.001 e C10.001, respectivamente, obtém-se:



	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
		⋮	
10.001	10.000	–0,000200010	3,141492654

Espera-se que os alunos percebam que a sequência converge para π.
Comentário: Do ponto de vista pedagógico, essa atividade pretende que os alunos experimentem, com o uso de uma planilha eletrônica, o cálculo de elementos de uma série convergente a um número, no caso, o número π.

A série apresentada no exercício,

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n - 1},$$

$n \in \mathbb{N}^*$, é obtida a partir da série de Gregory, publicada em 1670,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

multiplicando-se ambos os seus termos por 4.

Autoavaliação

1. A única situação que não é resolvida com conceitos referentes a conjuntos é a do item **c**. Para resolvê-la, usamos conceitos de medidas (cálculo do perímetro de uma figura geométrica plana). O perímetro do quadrado descrito é 8 cm.
alternativa c

2. Para representar o conjunto dos números primos usando a notação de conjunto, fazemos:
$P = \{x \mid x$ é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos$\}$
alternativa c

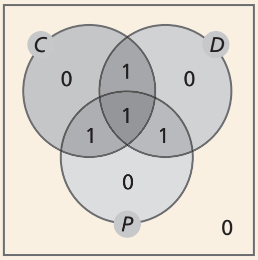
3. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = U$
alternativa d

4. $A - B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = A$
alternativa b

5. $A \cap B = \varnothing$
alternativa a

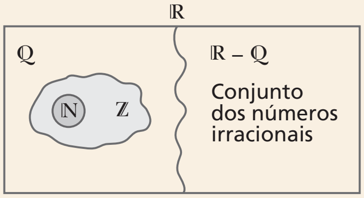
6. $\complement_U^A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = B$
alternativa c

7. Podemos construir o seguinte diagrama:



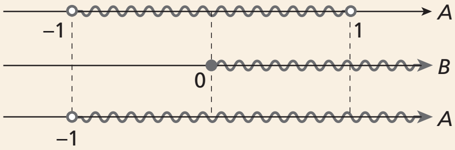
Portanto, há quatro membros na família.
alternativa a

8.

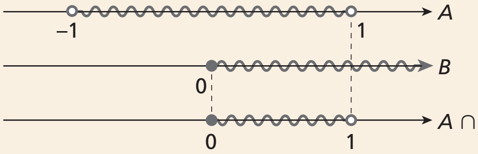


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
alternativa b

9.



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\} =]-1, +\infty[$



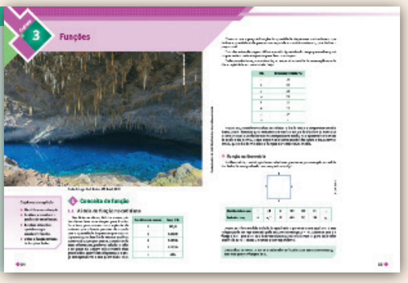
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\} = [0, 1[$
alternativa b

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 3

Funções



Muitas situações do cotidiano, como a distância percorrida por um carro em função do tempo, explorada na área da Física, ou o crescimento do número de bactérias em função do tempo, na área da Biologia, podem ser analisadas como relações entre grandezas, denominadas ***funções****, que são definidas por leis matemáticas. Usos como esses permitem aos alunos a utilização da linguagem algébrica em situações aplicadas às ciências.*

O estudo de funções permite estabelecer conexões interdisciplinares, como nos exemplos citados, que envolvem conceitos de diferentes campos de estudo da Matemática, como nos casos do estudo de progressões aritméticas e progressões geométricas (volume do 1º ano), algumas funções trigonométricas e suas aplicações (volume do 2º ano) e polinômios (volume do 3º ano).

Esse capítulo apresenta o conceito de função e seus elementos, identificando sua presença em diversos contextos, além da construção, interpretação e análise dos gráficos que a representam.

Na abertura do capítulo, o conceito de função é apresentado com base em aplicações a contextos comuns do cotidiano das pessoas. Pode-se pedir aos alunos que tentem dar outros exemplos de relação entre duas grandezas e, em seguida, discutir se representam ou não funções. Nesse início de capítulo, é importante que haja uma discussão sobre dependência entre duas grandezas com base em situações contextualizadas. O vocabulário utilizado com os alunos deve ser formalizado aos poucos, à medida que o tema for aprofundado.

Nesse capítulo, como em outros, há atividades que incentivam os alunos a elaborar conclusões a respeito de determinado conceito, ou seja, propiciam aos alunos a participação ativa na construção do saber. Convém avaliar a oportunidade de pedir-lhes que manifestem suas conclusões verbalmente para que também as práticas da oralidade e da argumentação sejam contempladas.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. a) Para consumo de até 10 m^3, o valor a pagar é o mesmo. Assim, $f(9) = f(7)$. Logo, quem consome 9 m^3 de água não paga mais do que quem consome 7 m^3.

b) $f(19) = 2 \cdot (15{,}10 + 2{,}35 \cdot 9) \Rightarrow f(19) = 2 \cdot 36{,}25 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(19) = 72{,}50$

Portanto, o valor da conta para um consumo mensal de 19 m^3 é de R$ 72,50.

$f(27) = 2 \cdot (15{,}10 + 2{,}35 \cdot 10 + 5{,}50 \cdot 7\,) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(27) = 154{,}20$

Portanto, o valor da conta para um consumo mensal de 27 m^3 é de R$ 154,20.

c) O valor a pagar inclui o consumo de água e as despesas referentes a esgoto. Dividindo por 2, encontra-se o valor do consumo de água: $748{,}80 : 2 = 374{,}40$

Por um consumo de água de 50 m^3, o valor a pagar referente à água seria de R$ 203,60, conforme tabela a seguir.

Faixa de consumo (m^3)	Consumo total (m^3)	Valor total a pagar (R$)
Até 10	10	15,10
De 11 a 20	20	$15{,}10 + 2{,}35 \cdot 10 = 38{,}60$
De 21 a 50	50	$15{,}10 + 23{,}5 + 5{,}50 \cdot 30 = 203{,}60$

Percebe-se, assim, que o consumo da casa de Flávia foi acima de 50 m^3. Dessa maneira, o cálculo pode ser:

$203{,}60 + 6{,}1(x - 50) = 374{,}40 \Rightarrow 6{,}1x = 475{,}8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 78$

Portanto, o consumo de água na casa de Flávia foi de 78 m^3.

Comentário: Pode-se pedir aos alunos que observem a conta de água de suas residências para comparar com os valores dispostos no exercício. Essa é também uma boa oportunidade para discussão sobre o uso responsável desse recurso natural.

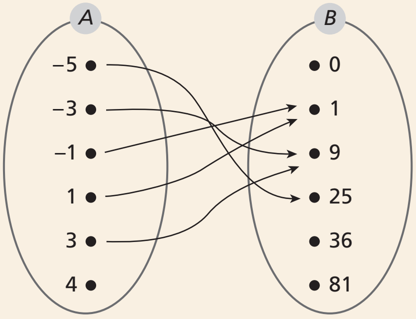
2. a) É função, pois cada elemento de *A* tem um único correspondente em *B*.

b) Não é função, pois existe um elemento de *A* (o elemento 3) que tem dois correspondentes em *B* (os elementos 2 e 3).

c) Não é função, pois existe um elemento de *A* (o elemento 5) que não tem correspondente em *B*.

d) É função, pois cada elemento de *A* tem um único correspondente em *B*.

3. a)



ADILSON SECCO

b) Não, pois existe um elemento de *A* (o elemento 4) que não tem correspondente em *B*.

4. a) variável independente: medida do diâmetro da base; variável dependente: preço de custo

b) Devemos determinar $p(x)$ para $x = 3$:
$p(3) = 0{,}01 \cdot 3 + 0{,}06 = 0{,}09$

Portanto, o preço de custo de um parafuso com base de 3 milímetros de diâmetro é R$ 0,09.

c) Devemos determinar x para $p(x) = 0{,}11$:
$0{,}11 = 0{,}01x + 0{,}06 \Rightarrow 0{,}01x = 0{,}05 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{0{,}05}{0{,}01} = 5$

Logo, a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11 é 5 mm.

d) De acordo com o cálculo do item **b**, o preço de custo de 1 parafuso com base de 3 mm é R$ 0,09.
Então, o preço para 500 desses parafusos é:
$p = 500 \cdot 0{,}09 = 45$
Logo, o preço é R$ 45,00.

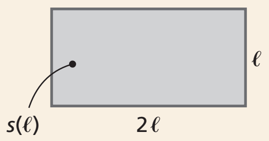
e) O preço de custo de 1 parafuso com base de 4 mm é dado por:
$p(4) = 0{,}01 \cdot 4 + 0{,}06 \Rightarrow p(4) = 0{,}1$
Portanto, o preço de custo de 100 parafusos é igual a:
$p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$
Assim, o preço de custo é R$ 10,00.
Como o preço de venda foi R$ 20,00, houve um percentual de 100% de lucro nessa venda.

5. a) $D(f) = \{5, 6, 7, 8\} = A$
$CD(f) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = B$
$Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$

b) Não existe x tal que $f(x) = 4$.

c) Para $x = 5$, temos $f(5) = 6$.

6.



$s(\ell) = 2\ell \cdot \ell \Rightarrow s(\ell) = 2\ell^2$
$D(s) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$

7. a) $f(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17 \Rightarrow f(4) = 17$

b) $f(-2) = 4 \cdot (-2) + 1 = -7 \Rightarrow f(-2) = -7$

c) $f(-1) = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$
$f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$
$f(11) = 4 \cdot 11 + 1 = 45$
Logo: $f(-1) + f(0) - f(11) = -3 + 1 - 45 = -47$

d) $f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$
$f(-3) = 4 \cdot (-3) + 1 = -11$
Logo: $2f(3) - f(-3) = 2 \cdot 13 - (-11) = 37$

8. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) Condição de existência para $g(x)$:
$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$
Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$.

c) Condição de existência para $i(x)$:
$x - 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 8$
Assim, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$.

d) Condição de existência para $j(x)$:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Logo, $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$.

9. a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

- $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$
- $f(4) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$
- $f(9) = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$
- $f(16) = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$
- $f(25) = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

Logo, $Im(f) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}\right\}$.

b) $w(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

- $w(2) = \dfrac{1}{2 - 1} = 1$
- $w(3) = \dfrac{1}{3 - 1} = \dfrac{1}{2}$
- $w(4) = \dfrac{1}{4 - 1} = \dfrac{1}{3}$
- $w(5) = \dfrac{1}{5 - 1} = \dfrac{1}{4}$
- $w(6) = \dfrac{1}{6 - 1} = \dfrac{1}{5}$

Continuando o cálculo das imagens de w para sucessivos valores de seu domínio, pode-se concluir que:
$Im(w) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots\right\}$

10. a) $h(x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

b) $s(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = 1$

c) $m(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ (Não há zero real.)

d) $p(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x + 1} = 0$ (Não há zero real.)

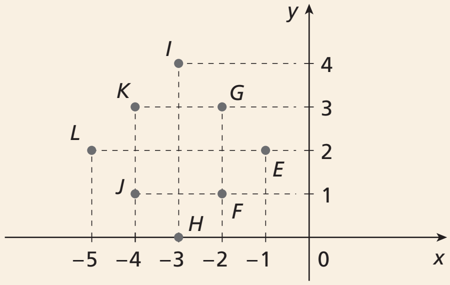
11. Procura-se x tal que $f(x) = -6$.
Assim:
$x^2 - 2x - 6 = -6 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

12. $f(3) = 11 \Rightarrow 11 = a \cdot 3 - 4 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$
Logo, f é dada por $f(x) = 5x - 4$.
Queremos determinar $f(x)$ para $x = -5$:
$f(-5) = 5 \cdot (-5) - 4 \Rightarrow f(-5) = -29$

13. a) $g(2) = 8 \Rightarrow 8 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 8 \quad \text{(I)}$
$g(-2) = -4 \Rightarrow -4 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow$
$\Rightarrow -2a + b = -4 \quad \text{(II)}$
Somando as equações (I) e (II), membro a membro, obtemos:
$2b = 4 \Rightarrow b = 2$
Substituindo b por 2 em (I), obtemos:
$2a + 2 = 8 \Rightarrow a = 3$
Assim, $a = 3$ e $b = 2$.

b) g é dada pela lei $g(x) = 3x + 2$. Assim:
$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

14.



15. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$

16. No eixo das abscissas, a ordenada é igual a zero:
$5y + 10 = 0 \Rightarrow y = -2$

17. No 2º quadrante, a ordenada do ponto é positiva e a abscissa é negativa. Então:
$2x \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$ e $y + 3 \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant -3$
Logo, $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

18. Observando o gráfico, podemos verificar o que se pede.

a) Os anos em que a variação da quantidade de passageiros aumentou foram de 2005 a 2013.

b) A quantidade de passageiros cresceu mais rapidamente no período de 2009 a 2010.

Comentário: No *site* do Departamento de Controle do Espaço Aéreo, uma organização governamental subordinada ao Ministério da Defesa e ao Comando da Aeronáutica, encontram-se informações sobre o controle do tráfego aéreo. O *site* é <http://www.decea.gov.br>, acesso em: 1º out. 2015.

19. a)
- $f(3) = 1$
- $f(-2) = -1$
- $f(4) = 3$
- $f(2) = 5$

b)
- $f(x) = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$
- $f(x) = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$
- $f(x) = 3 \Rightarrow x = 0{,}9$, $x = 2{,}5$ ou $x = 4$
- $f(x) = 4 \Rightarrow x = 1{,}3$ ou $x = 2{,}4$

c) $\text{Im}(f) = [-1, 5]$

d)
- (0, 6): nenhum, pois 6 não pertence à imagem de f.
- (0, 2): três pontos
- (0, 4): dois pontos
- (0, 0): um ponto

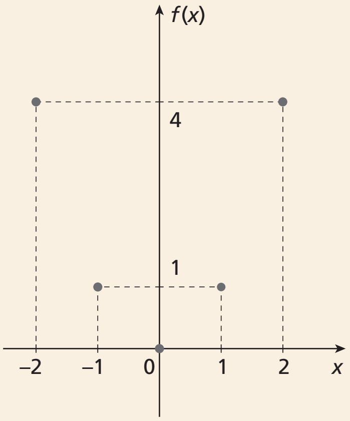
e)
- não
- não

Comentário: O objetivo principal dessa atividade é que os alunos adquiram estratégias para avaliar quando um gráfico representa ou não uma função, o que será objeto de estudo na próxima seção. Ao responder aos itens **a** e **b**, eles terão também a oportunidade de trabalhar com estimativa, o que pode gerar respostas ligeiramente diferentes na classe.

20. a) Para obter as coordenadas dos pontos do gráfico a ser construído, vamos primeiro construir uma tabela.

x	$f(x) = x^2$	$(x, f(x))$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$

A representação gráfica de f é:

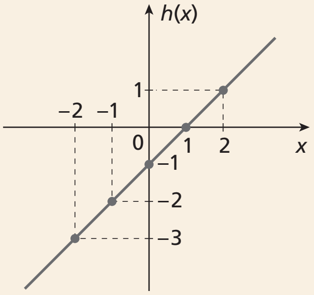


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Podemos construir uma tabela tomando alguns valores pertencentes ao domínio da função h.

x	$h(x) = x - 1$	$(x, h(x))$
-2	$h(-2) = -2 - 1 = -3$	$(-2, -3)$
-1	$h(-1) = -1 - 1 = -2$	$(-1, -2)$
0	$h(0) = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$h(1) = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$h(2) = 2 - 1 = 1$	$(2, 1)$

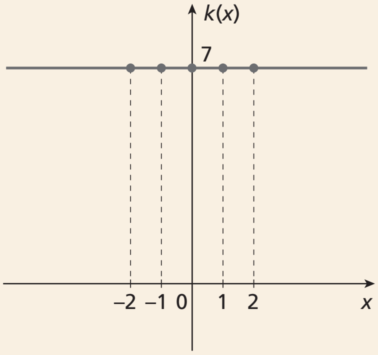
A representação gráfica de h é:



c) Primeiro construímos uma tabela.

x	$k(x) = 7$	$(x, h(x))$
-2	$k(-2) = 7$	$(-2, 7)$
-1	$k(-1) = 7$	$(-1, 7)$
0	$k(0) = 7$	$(0, 7)$
1	$k(1) = 7$	$(1, 7)$
2	$k(2) = 7$	$(2, 7)$

A representação gráfica de k é:



Comentário: Pode-se comentar com os alunos a diferença entre os gráficos dos itens **a**, **b** e **c** e ressaltar a importância do domínio e da imagem na construção de um gráfico. Pode-se também, no item **b**, colocar um intervalo no domínio para que os alunos determinem a imagem.

21. a) Para $x = 8$, temos: $f(8) = 5 \cdot 8 - 9 = 31$

Portanto, o par ordenado $(8, -1)$ não pertence ao gráfico de f, já que $f(8) = 31 \neq -1$.

b) Para $x = -2$, temos: $f(-2) = 1$

Logo: $1 = a \cdot (-2) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

c) Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. a) variável independente: tempo;

variável dependente: número de litros

b) Para cada ponto pertencente ao gráfico, observamos que o número de litros é sempre igual a 8 vezes o correspondente tempo. Logo, a lei que relaciona as duas variáveis é $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.

c) O par ordenado (1,5; 12) indica que, em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.

d) Para $x = 6$, temos: $y = 8 \cdot 6 \Rightarrow y = 48$

Para $x = 10$, temos: $y = 8 \cdot 10 \Rightarrow y = 80$

Logo, em 6 horas a máquina produziria 48 litros da substância e, em 10 horas, 80 litros, em regime ininterrupto.

e) Para $y = 4$, temos: $4 = 8x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, é necessária 0,5 hora para a máquina produzir 4 litros da substância.

23. Vamos determinar os zeros das funções f e g:

$f(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$g(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

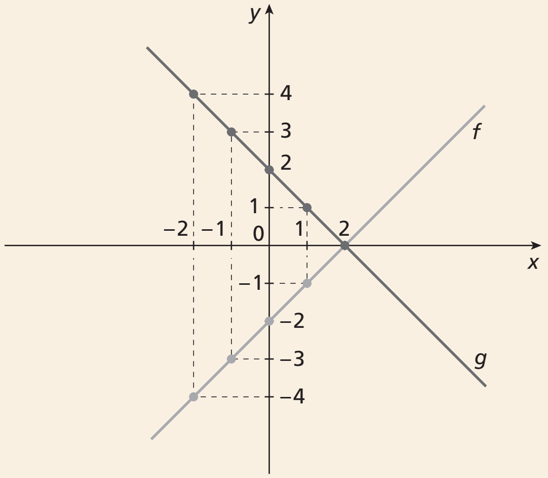
Observe que essas funções têm o mesmo zero.

Podemos construir duas tabelas, uma para cada função, com alguns valores pertencentes ao domínio, incluindo o zero das funções ($x = 2$).

x	$f(x) = x - 2$	(x, y)
-2	$f(-2) = -2 - 2 = -4$	$(-2, -4)$
-1	$f(-1) = -1 - 2 = -3$	$(-1, -3)$
0	$f(0) = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$f(1) = 1 - 2 = -1$	$(1, -1)$
2	$f(2) = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$

x	$g(x) = -x + 2$	(x, y)
-2	$g(-2) = -(-2) + 2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1) = -(-1) + 2 = 3$	$(-1, 3)$
0	$g(0) = 0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$g(1) = -1 + 2 = 1$	$(1, 1)$
2	$g(2) = -2 + 2 = 0$	$(2, 0)$

As representações gráficas são:



Analisando os gráficos, observamos que:

- $y = f(x)$ é positivo para $x > 2$;
- $y = g(x)$ é positivo para $x < 2$.

24. **a)** A lei que relaciona o preço (y) com o número de litros (x) é dada por: $y = 3{,}10x$

b) Para $x = 1{,}5$, temos: $y = 3{,}10 \cdot 1{,}5 \Rightarrow y = 4{,}65$

Portanto, 1,5 litro de gasolina custa, nesse posto, R$ 4,65.

c) Para $y = 9{,}30$, temos:

$9{,}30 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{9{,}30}{3{,}10} \Rightarrow x = 3$

Portanto, se pagar R$ 9,30, o consumidor comprará 3 litros de gasolina.

Para $y = 31{,}00$, temos:

$31{,}00 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{31{,}00}{3{,}10} \Rightarrow x = 10$

Portanto, se pagar R$ 31,00, o consumidor comprará 10 litros de gasolina.

d) Para $y = 155{,}00$ temos:

$155{,}00 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{155{,}00}{3{,}10} \Rightarrow x = 50$

Portanto, com R$ 155,00 poderão ser comprados, nesse posto, 50 litros de gasolina, no máximo.

25. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

zero da função: 2

b) $D(h) = [-2, 2]$

$Im(h) = [-3, 3]$

zeros da função: -2, 0 e 2

26. **a)** A função f é crescente para $x \in \mathbb{R}$;

a função g é crescente para $x \in [0, +\infty[$;

a função g é decrescente para $x \in]-\infty, 0]$;

a função h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$;

a função h é decrescente para $x \in [-1, 1]$.

b) A função f não possui valor máximo ou valor mínimo.

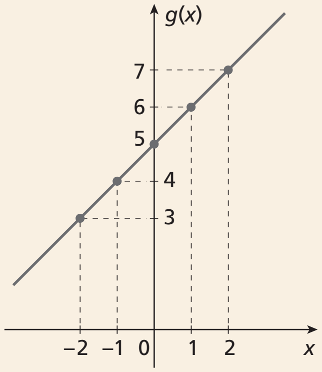
A função g apresenta um valor mínimo igual a 1.

A função h não possui valor máximo ou valor mínimo.

27. **a)** Podemos construir uma tabela para alguns valores pertencentes ao domínio de g. Veja:

x	$g(x) = x + 5$	$(x, g(x))$
-2	$g(-2) = -2 + 5 = 3$	$(-2, 3)$
-1	$g(-1) = -1 + 5 = 4$	$(-1, 4)$
0	$g(0) = 0 + 5 = 5$	$(0, 5)$
1	$g(1) = 1 + 5 = 6$	$(1, 6)$
2	$g(2) = 2 + 5 = 7$	$(2, 7)$

A representação gráfica de g é:



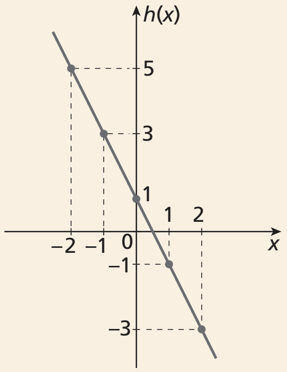
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observe que a função g, tal que $g(x) = x + 5$, é crescente para $x \in \mathbb{R}$.

b) Podemos construir uma tabela para alguns valores pertencentes ao domínio de h. Veja:

x	$h(x) = -2x + 1$	$(x, h(x))$
-2	$h(-2) = -2 \cdot (-2) + 1 = 5$	$(-2, 5)$
-1	$h(-1) = -2 \cdot (-1) + 1 = 3$	$(-1, 3)$
0	$h(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$h(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -1$	$(1, -1)$
2	$h(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$	$(2, -3)$

A representação gráfica de h é:



Observe que a função h, dada por $h(x) = -2x + 1$, é decrescente para $x \in \mathbb{R}$.

Comentário: Nesse exercício, pode-se explorar com os alunos se, tratando-se de funções do 1º grau, há necessidade de uma tabela com muitos valores do domínio.

28. **a)** De acordo com o gráfico, temos que a imagem de 2 pela função f é $y = 2$.

b) A imagem é -2 para $x = 4$.

c) No intervalo $[-1, 2]$, a função é positiva, pois encontra-se acima do eixo x.

d) não

e) $D(f) = [-3, 4]$

f) $Im(f) = [-2, 4]$

g) O valor máximo da função é 4.

h) O valor mínimo da função é -2.

29. **a)** $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

O valor máximo é 4.

b) $Im(g) = \mathbb{R}$

Não possui valor máximo nem valor mínimo.

c) $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$

Não possui valor máximo nem valor mínimo.

d) $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

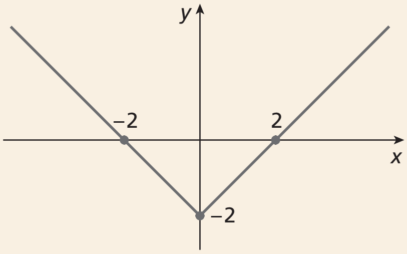
O valor mínimo é zero.

e) $Im(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$

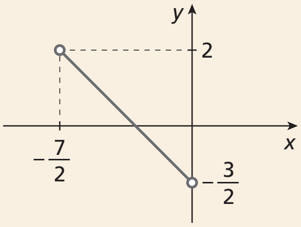
O valor mínimo é -3.

O valor máximo é 3.

30. Resposta possível:



31. Resposta possível:



32. **a)** verdadeira

b) Falsa, pois no intervalo $[0, 1]$ a função é decrescente.

c) Falsa, pois no intervalo $[0, 2]$ a função é negativa ou nula.

d) verdadeira

e) verdadeira

33. **a)** Os zeros da função são -2 e 2, pois são os valores nos quais a função intercepta o eixo x.

b) A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

A função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.

c) A função é positiva para $x < -2$ ou $x > 2$.

A função é negativa para $-2 < x < 2$.

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$

e) O valor mínimo que essa função pode assumir é -4, que é a imagem de zero.

34. **a)** A arrecadação do IPI foi crescente nos seguintes períodos: julho de 2014 a janeiro de 2015, fevereiro a abril de 2015 e maio a junho de 2015.

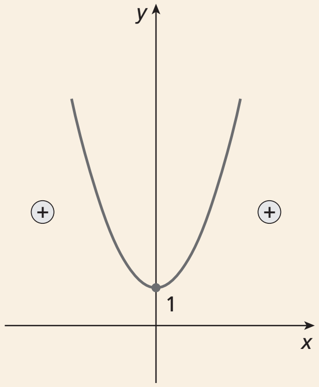
b) A arrecadação do IPI foi decrescente nos seguintes períodos: janeiro a fevereiro de 2015 e abril a maio de 2015.

c) Arrecadação máxima: 5.421 milhões de reais em janeiro de 2015.

Arrecadação mínima: 3.487 milhões de reais em fevereiro de 2015.

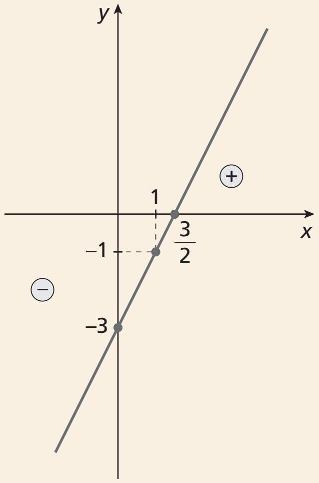
35. Fazendo um esboço dos gráficos das funções, temos:

a)



Para todo x, temos: $y > 0$

b)

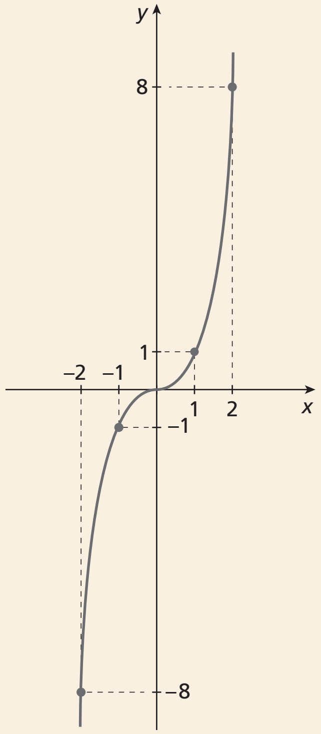


Para $x < \frac{3}{2}$, temos: $y < 0$

Para $x > \frac{3}{2}$, temos: $y > 0$

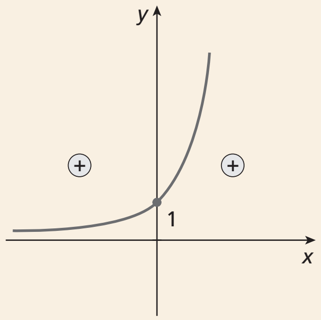
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

c)



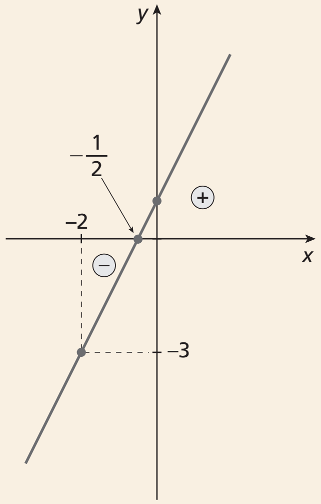
Para todo $x < 0$, temos: $y < 0$
Para todo $x > 0$, temos: $y > 0$

d)



Para todo x, temos: $y > 0$

e)



Para $x < -\frac{1}{2}$, temos: $y < 0$

Para $x > -\frac{1}{2}$, temos: $y > 0$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Assim, pelos gráficos e pelas análises feitas a partir deles, as funções dos itens **a** e **d** são positivas em todo o seu domínio: $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$

Comentário: Com a experiência adquirida até aqui, os alunos podem aprofundar seu conhecimento explorando o uso de um *software* de construção de gráficos.

36. Se o gráfico da função é uma reta paralela ao eixo x, todos os valores do domínio da função têm a mesma imagem. Como o par ordenado $(0, -5)$ pertence ao gráfico da função, a lei que a define é dada por: $f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. **a)** $D(m) = \mathbb{R}$ e $Im(m) =]-\infty, 3]$

b) A função é constante para $x > 2$; nesse caso, a função é dada por $m(x) = 3$.

c) Como o gráfico intercepta o eixo x uma só vez, essa função tem apenas um zero, que é menor que -2.

d) Para definir o intervalo em que a função é positiva ou negativa, devemos inicialmente encontrar o zero dessa função, que está localizado no intervalo $]-\infty, -2]$. Assim, temos:

$m(x) = 0$

$-\frac{x^2}{2} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 3 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6}$ (não serve)

Logo, a função é positiva no intervalo $\left]-\sqrt{6}, +\infty\right[$ e é negativa no intervalo $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right[$.

38. **a)** Se $0 \leqslant x < 30$, então: $y = 3\% \cdot 350x = 10{,}5x$

Se $30 \leqslant x \leqslant 100$, então: $y = 5\% \cdot 350x = 17{,}5x$

Se $x > 100$, então: $y = 8\% \cdot 350x = 28x$

Logo, temos a seguinte função:

$$y = f(x) = \begin{cases} 10{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$$

b) Se vender 80 bicicletas:

$x = 80 \Rightarrow f(80) = 17{,}5 \cdot 80 = 1.400$

Portanto, a comissão será de R$ 1.400,00.

Se vender 101 unidades:

$x = 101 \Rightarrow f(101) = 28 \cdot 101 = 2.828$

Então, a comissão será de R$ 2.828,00.

39. **a)** $x = -6$

$p(-6) = \frac{(-6)^2}{4} = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow p(-6) = 9$

b) $x = \frac{1}{2}$

$p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{20}{7} = \frac{19}{7} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{7}$

c) $x = 3{,}78$

$p(3{,}78) = \frac{3{,}78 + 3}{3} = \frac{6{,}78}{3} = 2{,}26 \Rightarrow p(3{,}78) = 2{,}26$

d) $x = -4$

$p(-4) = \frac{(-4)^2}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow p(-4) = 4$

e) $x = 3$

$p(3) = -\frac{2}{7} \cdot (3) + \frac{20}{7} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow p(3) = 2$

f) $x = 0$

$p(0) = -\frac{2}{7} \cdot 0 + \frac{20}{7} = \frac{20}{7} \Rightarrow p(0) = \frac{20}{7}$

40. **a)** Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{2x + 1}{x + 9}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{2y + 1}{y + 9}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{2y + 1}{y + 9} = x \Rightarrow 2y + 1 = x(y + 9) \Rightarrow$

$2y + 1 = xy + 9x \Rightarrow 2y - xy = 9x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(2 - x) = 9x - 1 \Rightarrow y = \frac{9x - 1}{2 - x}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$

b) Para que $f(x)$ exista:

$x + 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq -9$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$ ou $D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$.

c) Condição de existência de $f^{-1}(x)$:

$2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Assim, $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ ou $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$.

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$ ou $Im(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

e) $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$ ou $Im(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-9\}$

Comentário: Um dos objetivos dessa atividade é fazer os alunos usarem as igualdades $D(f) = Im(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = Im(f)$ para obter os conjuntos $Im(f)$ e $Im(f^{-1})$ a partir dos conjuntos $D(f)$ e $D(f^{-1})$. Nesse caso, é interessante eles perceberem que $D(f)$ e $D(f^{-1})$ podem ser escritos da seguinte maneira:

$D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$ e $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$

Assim: $Im(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$ e

$Im(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$

Os alunos também podem escrever os domínios do seguinte modo:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$ ou $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

Nesse caso, para obter os conjuntos imagem, é necessário que se atente à troca das letras x por y. Assim:

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$ e $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

41. **a)** Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = 4x + 9$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 4y + 9$

Expressando y em função de x, temos:

$4y + 9 = x \Rightarrow 4y = x - 9 \Rightarrow y = \frac{x - 9}{4}$

Portanto, f^{-1} é dada por: $f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$

b) Substituindo $g(x)$ por y, obtemos: $y = -2x + 3$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -2y + 3$

Expressando y em função de x, temos:

$-2y + 3 = x \Rightarrow -2y = x - 3 \Rightarrow y = \frac{3 - x}{2}$

Portanto, g^{-1} é dada por: $g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$

c) Substituindo $h(x)$ por y, obtemos: $y = -7x - \frac{1}{2}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -7y - \frac{1}{2}$

Expressando y em função de x, temos:

$-7y - \frac{1}{2} = x \Rightarrow -7y = x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{-2x - 1}{14}$

Portanto, h^{-1} é dada por: $h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$

d) Substituindo $m(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{x + 5}{3}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{y + 5}{3}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{y + 5}{3} = x \Rightarrow y + 5 = 3x \Rightarrow y = 3x - 5$

Portanto: $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e) Substituindo $n(x)$ por y, obtemos: $y = x^3 + 1$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = y^3 + 1$

Expressando y em função de x, temos:

$y^3 + 1 = x \Rightarrow y^3 = x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x - 1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x - 1}$

Portanto, n^{-1} é dada por: $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

f) Substituindo $p(x)$ por y, obtemos: $y = \sqrt[5]{2x}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \sqrt[5]{2y}$

Expressando y em função de x, temos:

$\sqrt[5]{2y} = x \Rightarrow \left(\sqrt[5]{2y}\right)^5 = x^5 \Rightarrow 2y = x^5 \Rightarrow y = \frac{x^5}{2}$

Portanto, p^{-1} é dada por: $p^{-1}(x) = \frac{x^5}{2}$

42. **a)**
- $f(x) = 4x + 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$ ou $y = \frac{x - 9}{4}$

  Substituindo y por x e x por y obtemos:

  $x = \frac{y - 9}{4} \Rightarrow 4x = y - 9 \Rightarrow y = 4x + 9$

  Portanto, $[f^{-1}]^{-1}(x) = 4x + 9 = f(x)$.

- $g(x) = -2x + 3 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$ ou $y = \frac{3 - x}{2}$

  Substituindo y por x e x por y obtemos:

  $x = \frac{3 - y}{2} \Rightarrow 2x = 3 - y \Rightarrow y = -2x + 3$

  Portanto, $[g^{-1}]^{-1}(x) = -2x + 3 = g(x)$.

- $h(x) = -7x - \frac{1}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$ ou $y = \frac{-2x - 1}{14}$

  Substituindo y por x e x por y obtemos:

  $x = \frac{-2y - 1}{14} \Rightarrow 14x = -2y - 1 \Rightarrow y = -7x - \frac{1}{2}$

  Portanto, $[h^{-1}]^{-1}(x) = -7x - \frac{1}{2} = h(x)$.

- $m(x) = \frac{x + 5}{3} \Rightarrow m^{-1}(x) = 3x - 5$ ou $y = 3x - 5$

  Substituindo y por x e x por y obtemos:

  $x = 3y - 5 \Rightarrow y = \frac{x + 5}{3}$

  Portanto, $[m^{-1}]^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3} = m(x)$.

- $n(x) = x^3 + 1 \Rightarrow n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ ou $y = \sqrt[3]{x - 1}$

  Substituindo y por x e x por y obtemos:

  $x = \sqrt[3]{y - 1} \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow y = x^3 + 1$

  Portanto, $[n^{-1}]^{-1}(x) = x^3 + 1 = n(x)$.

- $p(x) = \sqrt[5]{2x} \Rightarrow p^{-1}(x) = \frac{x^5}{2}$ ou $y = \frac{x^5}{2}$

  Substituindo y por x e x por y obtemos:

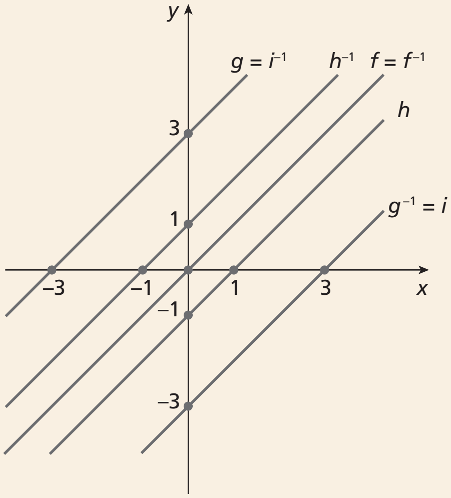
  $x = \frac{y^5}{2} \Rightarrow y^5 = 2x \Rightarrow y = \sqrt[5]{2x}$

  Portanto, $[p^{-1}]^{-1}(x) = \sqrt[5]{2x} = p(x)$.

b) Os alunos devem perceber que a função inversa de sua inversa coincide com a própria função.

Comentário: Essa questão, assim como a **44**, propicia aos alunos descobrirem, com base em casos particulares, uma propriedade de uma função invertível de domínio real, isto é, $[f^{-1}]^{-1}(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

43. a) Obtendo as leis das funções inversas, temos:
$f^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = x - 3$, $h^{-1}(x) = x + 1$ e $i^{-1}(x) = x + 3$
Assim, temos os gráficos:



b) Respostas possíveis:

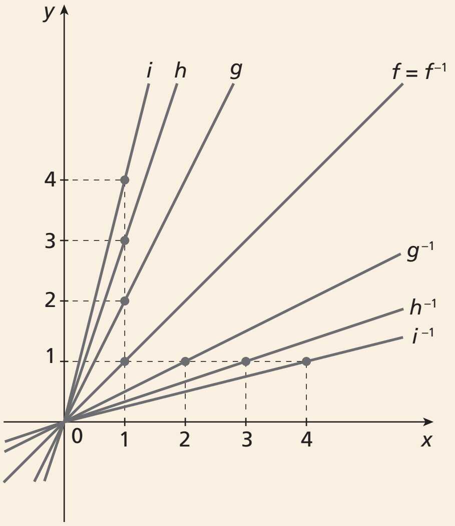
- Os gráficos de cada uma dessas funções e de suas respectivas inversas são retas paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares.
- Os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Comentário: Com o conhecimento adquirido até aqui, os alunos são induzidos a antecipar, com base em casos particulares, o conteúdo a ser visto no próximo item.

44. a) Obtendo as leis das funções inversas, temos:

$f^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$, $h^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$ e $i^{-1}(x) = \dfrac{x}{4}$

Assim, temos os gráficos:



b) Respostas possíveis:

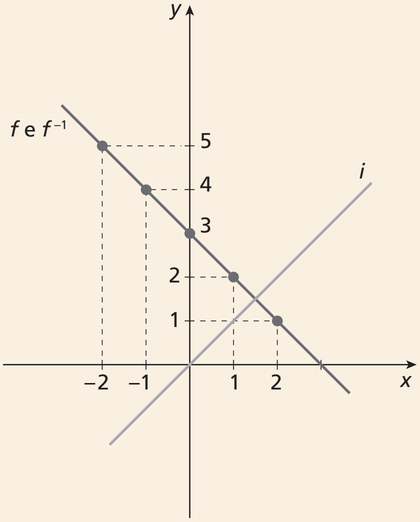
- Os gráficos de cada uma dessas funções e de suas respectivas inversas são retas que concorrem com a bissetriz dos quadrantes ímpares na origem do plano cartesiano.
- Os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

45. a) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = -x + 3$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -y + 3$
Expressando y em função de x, temos:
$-y + 3 = x \Rightarrow -y = x - 3 \Rightarrow y = 3 - x$
Portanto, f^{-1} é dada por: $f^{-1}(x) = 3 - x$
Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$. Veja:

x	$f(x) = -x + 3$	$f^{-1}(x) = 3 - x$
-2	$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$	$f^{-1}(-2) = 3 - (-2) = 5$
-1	$f(-1) = -(-1) + 3 = 4$	$f^{-1}(-1) = 3 - (-1) = 4$
0	$f(0) = -(0) + 3 = 3$	$f^{-1}(0) = 3 - 0 = 3$
1	$f(1) = -(1) + 3 = 2$	$f^{-1}(1) = 3 - 1 = 2$
2	$f(2) = -(2) + 3 = 1$	$f^{-1}(2) = 3 - 2 = 1$

A representação gráfica de f e f^{-1} é:



Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$.

b) Substituindo $g(x)$ por y, obtemos: $y = 2x$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 2y$

Expressando y em função de x, temos:

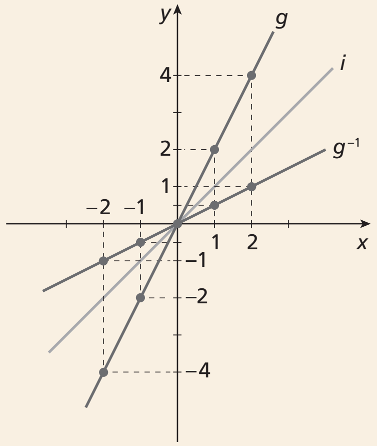
$2y = x \Rightarrow\ y = \dfrac{x}{2}$

Portanto, g^{-1} é dada por: $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de g e g^{-1}. Veja:

x	$g(x) = 2x$	$g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$
-2	$g(-2) = 2(-2) = -4$	$g^{-1}(-2) = \dfrac{-2}{2} = -1$
-1	$g(-1) = 2(-1) = -2$	$g^{-1}(-1) = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$
0	$g(0) = 2(0) = 0$	$g^{-1}(0) = 0$
1	$g(1) = 2(1) = 2$	$g^{-1}(1) = \dfrac{1}{2}$
2	$g(2) = 2(2) = 4$	$g^{-1}(2) = \dfrac{2}{2} = 1$

A representação gráfica de g e g^{-1} é:



Os gráficos de g e g^{-1} são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$.

c) Substituindo $h(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{x}{3} - 2$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{y}{3} - 2$

Expressando y em função de x, temos: $\frac{y}{3} - 2 = x \Rightarrow$

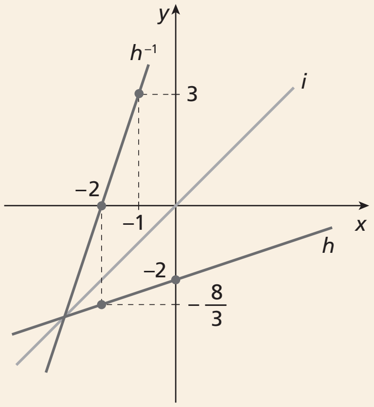
$\Rightarrow \frac{y}{3} = x + 2 \Rightarrow y = 3(x + 2) \Rightarrow y = 3x + 6$

Portanto, h^{-1} é dada por: $h^{-1}(x) = 3x + 6$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de h e h^{-1}. Veja:

x	$h(x) = \frac{x}{3} - 2$	$h^{-1}(x) = 3x + 6$
−2	$h(-2) = \frac{-2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$	$h^{-1}(-2) = 3(-2) + 6 = 0$
−1	$h(-1) = \frac{-1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$	$h^{-1}(-1) = 3(-1) + 6 = 3$
0	$h(0) = 0 - 2 = -2$	$h^{-1}(0) = 3(0) + 6 = 6$
1	$h(1) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$	$h^{-1}(1) = 3(1) + 6 = 9$
2	$h(2) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$	$h^{-1}(2) = 3(2) + 6 = 12$

A representação gráfica de h e h^{-1} é:



Os gráficos de h e h^{-1} são simétricos em relação ao gráfico de $i(x) = x$.

d) Substituindo $k(x)$ por y, obtemos: $y = 2x + 1$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 2y + 1$

Expressando y em função de x, temos:

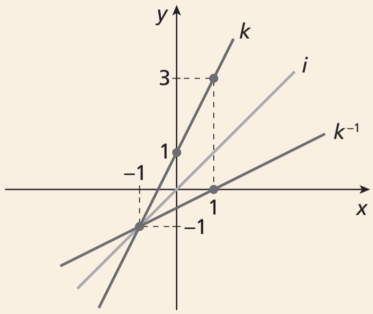
$2y + 1 = x \Rightarrow 2y = x - 1 \Rightarrow y = \frac{x - 1}{2}$

Portanto, k^{-1} é dada por: $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de k e k^{-1}. Veja:

x	$k(x) = 2x + 1$	$k^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$
−2	$k(-2) = 2(-2) + 1 = -3$	$k^{-1}(-2) = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}$
−1	$k(-1) = 2(-1) + 1 = -1$	$k^{-1}(-1) = \frac{-1-1}{2} = -1$
0	$k(0) = 2(0) + 1 = 1$	$k^{-1}(0) = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$
1	$k(1) = 2(1) + 1 = 3$	$k^{-1}(1) = \frac{1-1}{2} = 0$
2	$k(2) = 2(2) + 1 = 5$	$k^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

A representação gráfica de k e k^{-1} é:

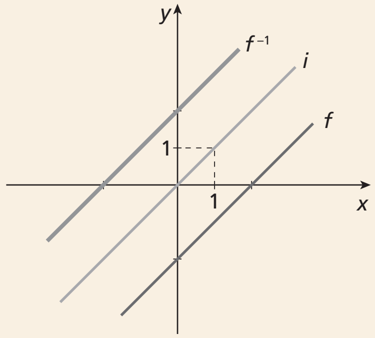


Os gráficos de k e k^{-1} são simétricos em relação ao gráfico de $i(x) = x$.

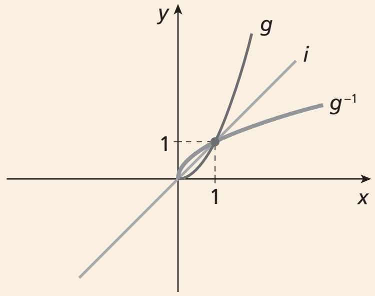
46. A função f é inversa da função g nos itens **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

47. O gráfico da função inversa é simétrico (em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares) ao gráfico da função dada.

a)

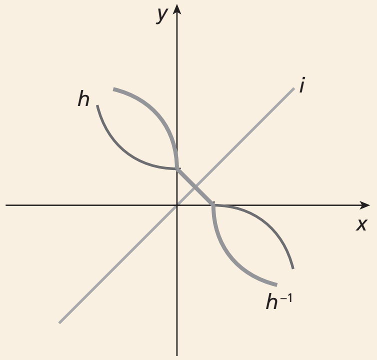


b)



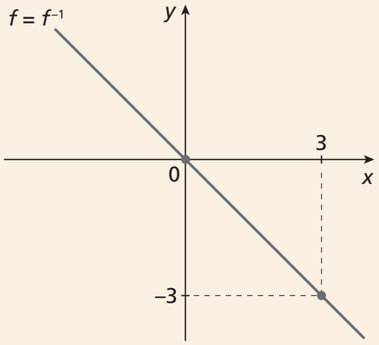
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

c)

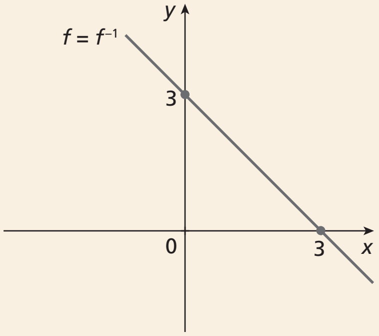


48. Considerando que uma função e a sua inversa têm gráficos que são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos:

a)



b)



Comentário: É interessante aprofundar a discussão com os alunos e concluir que toda função cujo gráfico é uma reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares tem uma função inversa com gráfico coincidente a ele.

Exercícios complementares

1. **a)** Resposta possível:

$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y = \pi x^2$

b) No par ordenado (x, y), x representa o raio do círculo e y representa a área do círculo de raio x.

c) Variável dependente: y (a área do círculo)

d) Variável independente: x (o raio do círculo)

e) Para $x = r$, temos: $f(r) = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi r^2$

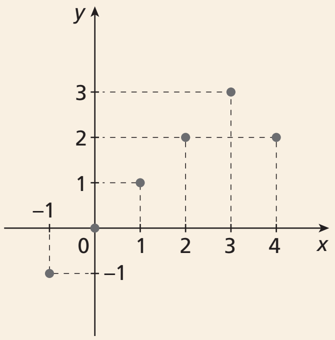
Para $x = 2r$, temos: $f(2r) = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow A' = 4\pi r^2$

Portanto, a área A' de um círculo de raio $2r$ é igual a 4 vezes a área A de um círculo de raio r.

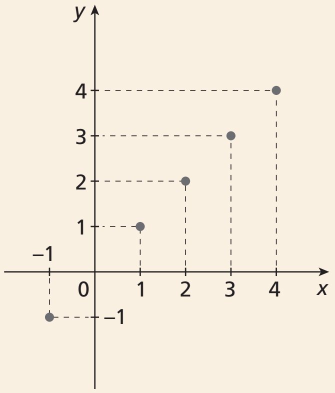
2. Ao dividir o preço do etanol pelo número de litros correspondente, percebemos que o preço é igual nos dois postos:

$\frac{7,50}{3} = \frac{5,00}{2} = 2,50$ (preço do litro do etanol)

3. **a)** Nesse caso, o gráfico pode representar uma função, pois cada reta paralela ao eixo y, traçada pelos pontos do domínio, intercepta o gráfico em um único ponto.



b) Nesse caso, o gráfico não pode representar uma função de A em B, pois o zero não possui imagem no conjunto B.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4. **a)** $f(-2) = 0$

b) Resposta possível: $f(0,5) = 3,5$ (estimativa)

c) Respostas possíveis: para $f(x) = 2$, temos $x = 1,5$; $x = -1,5$; $x = 2,5$ ou $x = -2,5$ (estimativa)

d) $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) Os zeros da função são -2 e 2 (abscissas dos pontos em que o gráfico intercepta o eixo x).

5. **a)** Resposta possível: 75 km (estimativa)

b) Das 10 às 11 horas (trecho constante do gráfico).

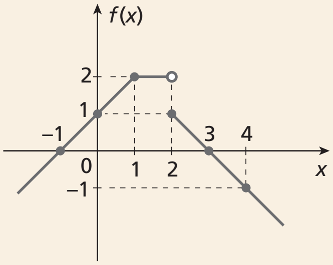
c) O par ordenado (2, 150) indica que, após 2 horas do início do movimento, ou seja, às 10 horas, Lucas havia percorrido 150 km.

d) Às 11 horas, ou seja, 3 horas depois das 8 horas, Lucas havia percorrido 150 km. Às 12 horas (4 horas depois das 8 horas), Lucas havia percorrido 200 km. Portanto, das 11 às 12 horas, Lucas percorreu 50 km.

6. Vamos primeiro construir uma tabela que contenha alguns valores do domínio de f. Veja:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-1	$f(-1) = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2$	$(2, 2)$
3	$f(3) = -3 + 3 = 0$	$(3, 0)$
4	$f(4) = -4 + 3 = -1$	$(4, -1)$

A representação gráfica de f é:



ADILSON SECCO

a) $f(x) > 0$, para $-1 < x < 3$
$f(x) = 0$, para $x = -1$ ou $x = 3$
$f(x) < 0$, para $x < -1$ ou $x > 3$

b) f é crescente em: $]-\infty, 1]$
f é constante em: $]1, 2[$
f é decrescente em: $[2, +\infty[$

c) Os zeros da função são: -1 e 3

7. a) $f(x) = \begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \text{ ou } 5 \leqslant x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leqslant x \leqslant 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leqslant 8 \end{cases}$

b) Na primeira hora, a velocidade foi igual a 50 km/h (constante). Assim, a distância percorrida foi 50 km. Nas duas horas seguintes, a velocidade foi 100 km/h (constante).
Assim, a distância percorrida foi 200 km. Logo, a distância total percorrida nas três primeiras horas foi 250 km.

c) O ônibus ficou parado nos trechos do gráfico em que a velocidade é nula, ou seja, de 3 a 5 horas e de 6 a 7 horas.
Logo, o ônibus ficou parado por 3 horas.

d) Resposta possível: não parar entre a 6ª e a 7ª hora de viagem, locomovendo-se nesse período à velocidade de 75 km/h.

8. a) A função g é crescente em $]-\infty, 0]$.

b) Os valores de x são -2 e 1, pois são as abscissas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e de g.

c) As funções f e g são simultaneamente positivas em $]-2, 2[$.

9. a) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \dfrac{x+1}{2}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \dfrac{y+1}{2}$

Expressando y em função de x, temos:

$\dfrac{y+1}{2} = x \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow y = 2x - 1$

Como $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$, então:

$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \dfrac{2-x}{x}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \dfrac{2-y}{y}$

Expressando y em função de x, temos:

$\dfrac{2-y}{y} = x \Rightarrow \dfrac{2}{y} - 1 = x \Rightarrow \dfrac{2}{y} = x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = y(x+1) \Rightarrow y = \dfrac{2}{x+1}$

Como $D(f) = \mathbb{R}^*$ e $CD(f) = B$, então:

$f^{-1}\colon B \to \mathbb{R}^*$ tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x+1}$

c) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = x^2$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = y^2$

Expressando y em função de x, temos:

$y^2 = x \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x} \Rightarrow |y| = \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$

Como $D(f) = \mathbb{R}_+$ e $CD(f) = \mathbb{R}_+$, então $y = -\sqrt{x}$ (não serve).

Logo: $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

d) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = (x - 1)^2$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = (y - 1)^2$

Expressando y em função de x, temos:

$(y-1)^2 = x \Rightarrow \sqrt{(y-1)^2} = \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow |y - 1| = \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 1 = \sqrt{x}$ ou $y - 1 = -\sqrt{x}$

Como $D(f) = A =]-\infty, 1]$ e $CD(f) = \mathbb{R}_+$, então $y - 1 = \sqrt{x}$ (não serve).

Logo: $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to A$ tal que $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

10. a) Não, pois para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.

b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.

c) Sim, pois nos 10 primeiros anos de vida a massa de Sandra aumentou aproximadamente 40 kg, um aumento superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

Comentário: Os alunos devem observar que, nessa função, não se podem traçar segmentos de reta ligando os pontos obtidos, uma vez que não se sabe o comportamento da massa da Sandra nos intervalos de 10 anos.

Esse exercício pode ser motivo também de debate sobre obesidade e sobre a prática de atividades físicas.

11. Vamos encontrar os zeros da função:

$R(x) = 0 \Rightarrow kx(P - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} kx = 0 \\ P - x = 0 \end{cases}$

$kx = 0 \Rightarrow x = 0$

$P - x = 0 \Rightarrow x = P$

Logo, a representação gráfica de R deve ser tal que intercepte o eixo x em dois pontos: $x = 0$ e $x = P$

alternativa c

12. Vamos, inicialmente, expressar h em função de b:

$V = b \cdot 2b \cdot h \Rightarrow \cancel{2} = \cancel{2}b^2h \Rightarrow h = \dfrac{1}{b^2}$ (I)

Podemos, então, calcular a área das bases superior e inferior (A_b):

$A_b = 2 \cdot 2b \cdot b \Rightarrow A_b = 4b^2$ (II)

O custo das bases superior e inferior (C_b) é dado por:

$C_b = 4 \cdot A_b \Rightarrow C_b = 4 \cdot 4b^2 \Rightarrow C_b = 16b^2$ (III)

Vamos calcular agora a área lateral (A_L):

$A_L = 2 \cdot 2b \cdot h + 2 \cdot b \cdot h \Rightarrow A_L = 6bh$ (IV)

Substituindo (I) em (IV), obtemos:

$A_L = 6b \cdot \left(\dfrac{1}{b^2}\right) \Rightarrow A_L = \dfrac{6}{b}$ (V)

O custo das bases laterais (C_L) é dado por:

$C_L = 3 \cdot A_L \Rightarrow C_L = \dfrac{18}{b}$ (VI)

Portanto, o custo C do material para a fabricação da caixa em função da largura é obtido somando as equações (III) e (VI):

$$C(b) = C_b + C_L \Rightarrow C(b) = 16b^2 + \frac{18}{b}$$

O preço de custo de uma caixa de 0,5 m de largura é dado por:

$$C = 16 \cdot (0{,}5)^2 + \frac{18}{0{,}5} \Rightarrow C = 40$$

Então, o custo é R$ 40,00.

Autoavaliação

1. De acordo com o consumo:

- $9\ \text{m}^2 \rightarrow V = 10$
  valor da conta: R$ 20,00
- $18\ \text{m}^2 \rightarrow V = 10 + (18 - 10) \cdot 1{,}20 = 19{,}60$
  valor da conta: R$ 39,20
- $36\ \text{m}^2 \rightarrow V_1 = 10 + (20 - 10) \cdot 1{,}20 = 22{,}00$
  $V_2 = V_1 + (30 - 20) \cdot 1{,}50 = 22 + 15 = 37{,}00$
  $V = 37 + (36 - 30) \cdot 2 = 37 + 12 = 49{,}00$
  valor da conta: R$ 98,00

alternativa a

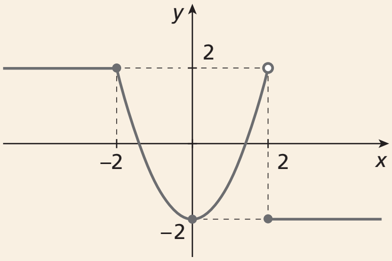
2. $D(f)$ é o domínio da função f, que é A.
$CD(f)$ é o contradomínio da função f, que é B.
O conjunto imagem de f é formado pelas ordenadas dos pontos determinados pelos pares ordenados (x, y) que obedecem à lei $y = f(x)$.
alternativa b

3. Os zeros de uma função são as abscissas dos pontos em que essa função intercepta o eixo x.
alternativa c

4. Na construção de um gráfico, x é a referência horizontal e y é a referência vertical.
alternativa b

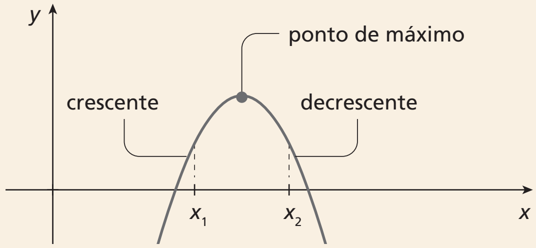
5. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$

Construindo o gráfico da função f, temos:



alternativa d

6.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Se, em um intervalo $I = [x_1, x_2]$, a função passa de crescente para decrescente, ela apresenta um ponto de máximo.
alternativa c

7. Para admitir inversa, uma função deve ser injetora e sobrejetora, ou seja, deve ser bijetora.
alternativa c

Compreensão de texto

O infográfico da seção é uma boa oportunidade para trabalhar interdisciplinarmente com Biologia. Pode-se pedir aos alunos que elaborem uma apresentação (ou uma cartilha) sobre a diferença entre o crescimento das meninas e o dos meninos, além de explorar os fatores externos no processo de crescimento.

1. Observando a idade óssea de uma pessoa, podemos perceber se seus ossos já completaram todo o processo de maturação, que deve corresponder à idade cronológica, ou seja, durante o processo de amadurecimento, ocorre a transformação do esqueleto, que resulta na estatura da pessoa.

2. Analisando as curvas, temos: dos 10 aos 12 anos, a curva de crescimento da menina é maior que a curva de crescimento do menino; a partir dos 12 anos, a curva de crescimento da menina é menor que a curva de crescimento do menino. Ou seja, até os 12 anos, as meninas, geralmente, são mais altas que os meninos, que, aos 13 anos, entram em uma fase de crescimento acelerado. Essa diferença acontece principalmente em função do desenvolvimento sexual, ou seja, as meninas sofrem os efeitos da puberdade antes dos meninos, o que interfere no crescimento.

3. a) As porcentagens apresentadas no gráfico indicam o percentual que a estatura do adolescente representa em relação à sua estatura quando adulto.

b) • altura com 16 anos:

1,36 m ——— 78,4%
x m ——— 98,2%

$$\frac{1{,}36}{x} = \frac{78{,}4}{98{,}2} \Rightarrow 78{,}4x = 1{,}36 \cdot 98{,}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{133{,}55}{78{,}4} \simeq 1{,}70$$

Então, aos 16 anos a altura do menino será de, aproximadamente, 1,70 metro.

• altura na fase adulta:

$$\frac{1{,}36}{x} = \frac{78{,}4}{100} \Rightarrow 78{,}4x = 1{,}36 \cdot 100 \Rightarrow$$

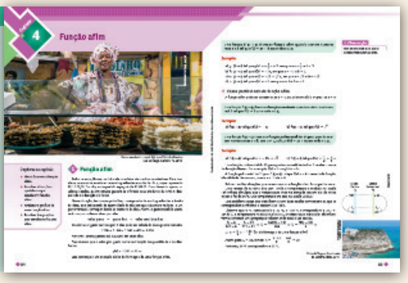
$$\Rightarrow x = \frac{136}{78{,}4} \simeq 1{,}73$$

Então, na fase adulta, a altura será de, aproximadamente, 1,73 metro.

4. Sim; a alimentação, a saúde, a higiene, a habitação e os cuidados gerais com a criança podem acelerar ou retardar o processo de crescimento.

Capítulo 4

Função afim



Os conteúdos matemáticos trabalhados com os alunos devem ser o mais significativo possível, para que percebam a importância da disciplina Matemática como instrumento de interpretação do mundo que os rodeia.

Nessa perspectiva, esse capítulo propõe a resolução de diferentes situações-problema por meio do conceito de função afim, com base na análise e na construção de gráficos.

O entendimento da função afim fornece fundamentos para o desenvolvimento dos conceitos de progressão aritmética (volume do 1º ano) e juro simples (volume do 3º ano).

Além disso, a demonstração de que o gráfico da função afim é uma reta guarda estreita relação com o estudo da reta na Geometria analítica (volume do 3º ano), uma vez que justifica a semelhança entre a lei geral da função afim e a equação de uma reta.

Nesse capítulo, como em outros, há atividades que incentivam os alunos a elaborar conclusões a respeito de determinado conceito, ou seja, propiciam a eles a participação ativa na construção do saber. Convém avaliar a oportunidade de pedir-lhes que manifestem suas conclusões verbalmente para que também a prática da oralidade seja contemplada.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. **a)** g é função afim, em que $a = 2$ e $b = 4$.

b) i não é função afim.

c) f é função afim, em que $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$.

- A função i não é afim, porque não podemos encontrar números reais a e b tais que $i(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. **a)** $f(-2) = -3 \cdot (-2) + 1 = 6 + 1 = 7$

b) $f(x) = 0$

$$-3x + 1 = 0 \Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

c) $f\left(\sqrt{2}\right) = -3 \cdot \sqrt{2} + 1 = -3\sqrt{2} + 1$

d) $f(x) = 19$

$$-3x + 1 = 19 \Rightarrow -3x = 18 \Rightarrow x = -6$$

- $f(x) > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$; $f(x) < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$
- Espera-se que os alunos respondam que sim por meio de um gráfico.

Comentário: Espera-se que, nessa questão, os alunos reflitam sobre as possibilidades de construção de um gráfico partindo-se da lei de uma função, com o objetivo de estudá-la melhor. No entanto, tal percepção não é obrigatória, já que o assunto será estudado mais adiante.

3. $f(x) = ax + \frac{1}{2}$

$f(3) = 8$

$$a \cdot 3 + \frac{1}{2} = 8 \Rightarrow 3a = 8 - \frac{1}{2} \Rightarrow 3a = \frac{15}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

4. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de função identidade, com $a = 1$ e $b = 0$.

Então, para que $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$ seja lei de uma função identidade, devemos ter:

- $p^2 - 1 = 1 \Rightarrow p^2 = 2 \Rightarrow p = \sqrt{2}$ ou $p = -\sqrt{2}$
- $2q - 6 = 0 \Rightarrow 2q = 6 \Rightarrow q = 3$

5. **a)** Se o consumidor utilizasse 82 minutos em um mês, pagaria R$ 34,50, pois não teria excedido os 100 minutos a que tinha direito.

Se o consumidor utilizasse 300 minutos no mês, pagaria R$ 34,50 pelos primeiros 100 minutos mais R$ 0,08 para cada um dos 200 outros minutos; então:

$34{,}50 + 200 \cdot 0{,}08 = 50{,}50$

Logo, ele pagaria R$ 50,50.

b) Dos R$ 52,90, foram pagos R$ 34,50 pelos primeiros 100 minutos, e os R$ 18,40 restantes, por 230 minutos $\left(\frac{18{,}40}{0{,}08}\right)$. Como $100 + 230 = 330$, esse consumidor utilizou 330 minutos.

c) Chamando de x o número de minutos utilizados pelo consumidor, a função f representará o valor que esse consumidor pagaria (em real).

Para $0 < x \leqslant 100$ minutos, temos: $f(x) = 34{,}50$

Para $x > 100$ minutos, temos:

$f(x) = 34{,}50 + 0{,}08(x - 100)$

Logo, a lei de formação dessa função é:

$$f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

d) O gasto mínimo com telefone, em um mês, era:

$3 \cdot 34{,}50 = 103{,}50$, ou seja, R$ 103,50

Comentário: É interessante pedir aos alunos que possuem assinatura de telefone residencial que comparem a forma de pagamento da sua conta com a apresentada pelo enunciado dessa questão.

6. $f(x) = 3x - 1$

a) $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

$f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$

$f(1) - f(0) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

b) $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

$f(2) - f(1) = 5 - 2 = 3$

c) $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$

$f(3) - f(2) = 8 - 5 = 3$

d) $f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

$f(4) - f(3) = 11 - 8 = 3$

- $f(1) - f(0) = f(2) - f(1) = f(3) - f(2) = f(4) - f(3) = 3$

  Em relação à função f, observa-se que o acréscimo de uma unidade nos valores de x corresponde a acréscimos de três unidades nos valores de $f(x)$.
- Pelo item anterior, sabe-se que o acréscimo de uma unidade nos valores de x acarreta o acréscimo de três unidades nos valores de $f(x)$. Logo: $f(28) - f(27) = 3$
- $g(x) = -3x - 1$

  a) $g(1) = -3 \cdot 1 - 1 = -4$

  $g(0) = -3 \cdot 0 - 1 = -1$

  $g(1) - g(0) = -4 - (-1) = -3$

b) $g(2) = -3 \cdot 2 - 1 = -7$

$g(2) - g(1) = -7 - (-4) = -7 + 4 = -3$

c) $g(3) = -3 \cdot 3 - 1 = -10$

$g(3) - g(2) = -10 - (-7) = -10 + 7 = -3$

d) $g(4) = -3 \cdot 4 - 1 = -13$

$g(4) - g(3) = -13 - (-10) = -13 + 10 = -3$

- Os valores encontrados são iguais ao coeficiente a das respectivas funções, ou seja, para a função f, os valores são iguais a 3, e a de f é igual a 3; para a função g, os valores são iguais a -3, e a de g é igual a -3.
- Espera-se que os alunos percebam que, em ambos os casos, as diferenças calculadas são o valor do coeficiente a da função, também conhecido como **taxa de variação** da função.

Comentário: A intenção dessa questão é antecipar, por meio de cálculos com números inteiros e consecutivos atribuídos a x (isto é, fazendo $\Delta x = 1$), o fato de que a taxa de variação da função afim, cuja lei é dada por $y = ax + b$, é constante e igual a a.

7. a) Vamos considerar as funções f e g dadas por:

$f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$

Com base na tabela, é possível fazer a seguinte leitura:

- função f: $f(-2) = -1$; $f(-1) = 1$; $f(0) = 3$; $f(1) = 5$; $f(2) = 7$

  Basta aplicar à lei de f duas dessas igualdades, por exemplo:

  $f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 3$ (I)

  $f(1) = 5 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 5$ (II)

  Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos:

  $a = 2$ e $b = 3$

  Logo: $f(x) = 2x + 3$

- função g: $g(-2) = 4$; $g(-1) = 3$; $g(0) = 2$; $g(1) = 1$; $g(2) = 0$

  Basta aplicar à lei de g duas dessas igualdades, por exemplo:

  $g(0) = 2 \Rightarrow c \cdot 0 + d = 2$ (III)

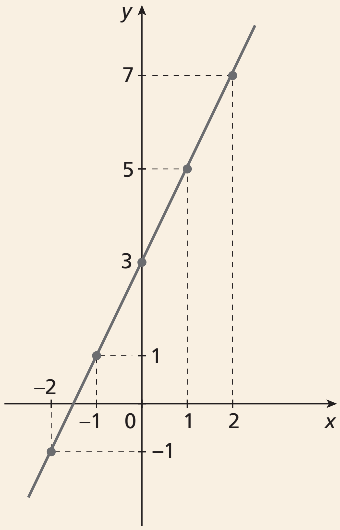
  $g(1) = 1 \Rightarrow c \cdot 1 + d = 1$ (IV)

  Resolvendo o sistema formado por (III) e (IV), obtemos:

  $c = -1$ e $d = 2$

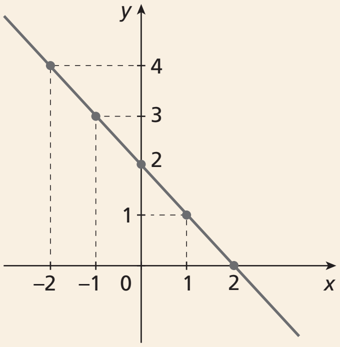
  Logo: $g(x) = -x + 2$

b) Espera-se que os alunos obtenham a seguinte reta:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

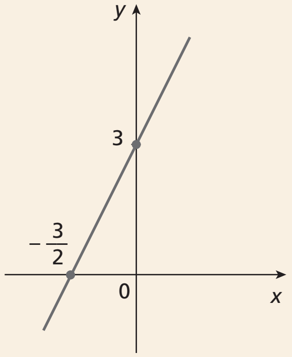
c) Espera-se que os alunos obtenham a seguinte reta:



d) Espera-se que os alunos percebam que uma função afim é representada graficamente por uma reta.

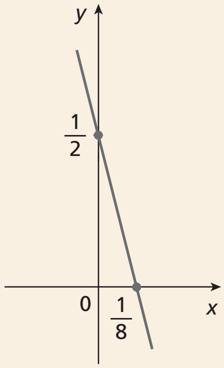
Comentário: Essa atividade leva os alunos, após localizar no plano cartesiano pontos dos gráficos de duas funções dados em uma tabela, a formular uma hipótese de como é o gráfico dessas funções. Espera-se que eles antecipem o conceito a ser estudado no item seguinte e concluam que o gráfico da função afim é uma reta.

8. a) $f(x) = 2x + 3$



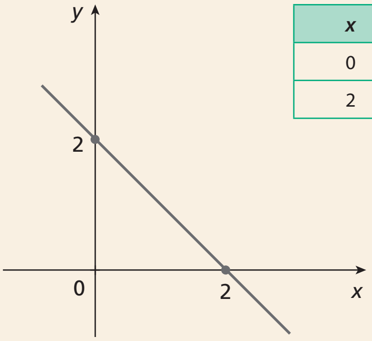
x	$f(x)$
0	3
$-\frac{3}{2}$	0

b) $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$



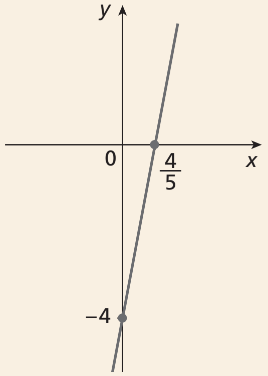
x	$g(x)$
0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{8}$	0

c) $h(x) = -x + 2$



x	$h(x)$
0	2
2	0

d) $i(x) = 5x - 4$



x	$i(x)$
0	-4
$\frac{4}{5}$	0

- Os gráficos das funções f e i têm em comum o fato de serem retas representativas de funções crescentes.
- Os gráficos das funções g e h têm em comum o fato de serem retas representativas de funções decrescentes.

Comentário: O objetivo das perguntas é propiciar a reflexão sobre a relação entre o coeficiente angular da reta correspondente e o gráfico de uma função.

Espera-se que os alunos associem o fato de o gráfico de uma função ser crescente ao coeficiente a positivo e decrescente ao coeficiente a negativo; no entanto, se isso não ocorrer, não há problema, pois o assunto será estudado mais adiante.

9.
- O gráfico da função f passa pelos pontos (0, 3) e (−3, 0). Então:
  $f(x) = ax + b$
  $3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$
  $0 = a(-3) + b \Rightarrow b = 3a$
  Como $b = 3$, temos: $a = 1$
  Portanto, $f(x) = x + 3$.
- O gráfico da função g passa pelos pontos (0, 1) e (1, 0). Então:
  $g(x) = cx + d$
  $1 = c \cdot 0 + d \Rightarrow d = 1$
  $0 = c \cdot 1 + d \Rightarrow d = -c$
  Como $d = 1$, temos: $c = -1$
  Portanto, $g(x) = -x + 1$.
- Para determinar as coordenadas do ponto P, devemos obter x tal que:
  $g(x) = f(x)$
  $-x + 1 = x + 3$
  $2x = -2$
  $x = -1$
  Para $x = -1$, temos: $f(-1) = g(-1) = 2$
  Logo, as coordenadas do ponto P são (−1, 2).

10. Observando o gráfico, percebemos que os vértices A e C têm coordenadas (−2, 0) e (0, 3), respectivamente.

O vértice B está sobre a reta de equação $y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$ e sobre a reta que passa pelos pontos C e (2, 0). Devemos determinar a equação desta última.

$C(0, 3) \rightarrow$ para $x = 0$, temos $y = 3$
Logo: $3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$
$(2, 0) \rightarrow$ para $x = 2$, temos $y = 0$
Logo: $0 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 0$
Substituindo o valor de b por 3, obtemos:

$2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

Então, a equação da reta que passa pelos pontos $C(2, 0)$ e B é: $y = -\frac{3}{2}x + 3$

Para obter as coordenadas do ponto B, devemos resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

Assim:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{cases}$$

$$-\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{5}{4}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$

E, portanto, $y = -\frac{6}{5}$.

Logo, os vértices do triângulo são:

$A(-2, 0)$, $B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ e $C(0, 3)$

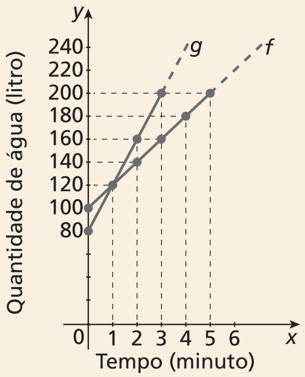
11. Os gráficos das funções f e g, tal que $f(x) = -2x + 3$ e $g(x) = 4x - 1$, são retas concorrentes; então, o gráfico da função procurada deve ser uma reta paralela a uma dessas retas.

Como as retas paralelas têm o mesmo coeficiente angular, há duas possibilidades: o coeficiente ser −2 ou 4. Assim, as funções que satisfazem essa condição, entre as alternativas, são i e p, tal que:

$i(x) = 4x + 6$ e $p(x) = -2x + 2$

Ou seja, as funções dos itens **b** e **d** satisfazem a condição.

12. A função que determina a quantidade de litros do primeiro barril em função do tempo x (em minuto) é dada por:
$f(x) = 100 + 20x$
A função que determina a quantidade de litros do segundo barril em função do tempo x (em minuto) é dada por:
$g(x) = 80 + 40x$
Construindo os gráficos das duas funções em um mesmo plano cartesiano, é possível perceber em que momento cada um transbordará:



Observando o gráfico, percebe-se que, após três minutos de escoamento da água, o segundo barril já estará transbordando, enquanto o primeiro barril transbordará após cinco minutos. Logo, o barril que possui 80 litros de água será o primeiro a transbordar.

13.
- As leis das funções f e g têm em comum o coeficiente a da variável x.
- Para encontrar um ponto de intersecção das retas correspondentes a essas funções, deve existir um valor de x de modo que:
  $f(x) = g(x)$
  $3x = 3x - 1$
  $0 = -1$ (sentença falsa)
  Logo, não existe x que satisfaça a equação $f(x) = g(x)$. Portanto, não podemos encontrar ponto comum às retas correspondentes a essas funções.
- Comparando alguns gráficos:

$f(x) = 3x$

x	$f(x)$
0	0
1	3

$g(x) = 3x - 1$

x	$g(x)$
0	−1
1	2

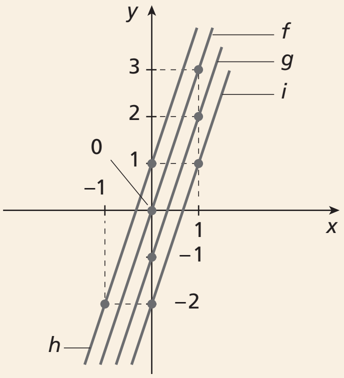
$h(x) = 3x + 1$

x	$h(x)$
0	1
−1	−2

$i(x) = 3x - 2$

x	$i(x)$
0	−2
1	2

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



- Percebemos que as retas com coeficiente angular igual a 3, correspondentes a essas funções, não apresentam pontos em comum, ou seja, são paralelas.
  Espera-se que os alunos concluam que, se duas retas têm o mesmo coeficiente angular, então elas são paralelas.

Comentário: O objetivo principal desse exercício é levar à reflexão sobre a relação entre o coeficiente angular a, comum às leis de duas funções polinomiais do 1º grau, e a posição relativa das retas que constituem seus gráficos, o que será estudado na próxima seção.

14. **a)** $f(x) = -5x + 2$

f é função decrescente, pois $a = -5$ e $-5 < 0$.

b) $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$

h é função crescente, pois $a = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} > 0$.

c) $g(x) = x - \frac{3}{4}$

g é função crescente, pois $a = 1$ e $1 > 0$.

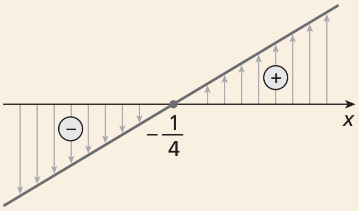
d) $f(x) = 1 - 2x$

f é função decrescente, pois $a = -2$ e $-2 < 0$.

15. **a)** $f(x) = 3x + \frac{3}{4}$

Zero de f: $3x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Como $a = 3$ e $3 > 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:



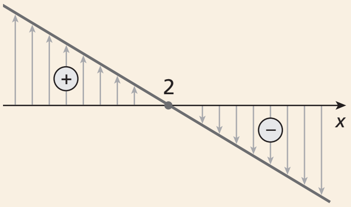
Então:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = -\frac{1}{4} \\ f(x) > 0, \text{ para } x > -\frac{1}{4} \\ f(x) < 0, \text{ para } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

Zero de g: $-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como $a = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2} < 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:



Então:

$$\begin{cases} g(x) = 0, \text{ para } x = 2 \\ g(x) > 0, \text{ para } x < 2 \\ g(x) < 0, \text{ para } x > 2 \end{cases}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

16. Como o zero da função é $-\frac{1}{2}$, então, para $y = 0$, temos $x = -\frac{1}{2}$. Logo: $0 = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b$ (I)

Como o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y é $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$, então, para $y = -\frac{3}{4}$, temos $x = 0$.

Logo: $-\frac{3}{4} = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -\frac{3}{4}$

Substituindo b por $-\frac{3}{4}$ na equação (I), obtemos:

$-\frac{a}{2} - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

Assim, a lei de formação dessa função polinomial do 1º grau é: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

17. $f(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right)x + 7$

O coeficiente de x nessa função é $\left(m - \frac{1}{2}\right)$.

A função é crescente se:

$m - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$

A função é decrescente se:

$m - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$

18. Se -4 é o zero da função f, temos:

$(-5 + k) \cdot (-4) - (3k - 2) = 0$

$20 - 4k - 3k + 2 = 0$

$-7k = -22 \Rightarrow k = \frac{22}{7}$

Como $a = -5 + \frac{22}{7} < 0$, então f é decrescente.

19. **a)** Em relação ao eixo x, a função g determina um ângulo maior do que o ângulo formado pela função h. Portanto, g tem a maior taxa de variação.

b) Sabemos que o coeficiente angular é a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Como a função g passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -1)$, temos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 0}{0 - 1} = 1$

Portanto, o coeficiente angular de g é 1.

Como a função h passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(-3, 0)$, temos:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 1}{-3 - 0} = \frac{1}{3}$

Portanto, o coeficiente angular de h é $\frac{1}{3}$.

c) A função g possui coeficiente angular igual a 1; então, $y = x + b$. Como ela passa pelo ponto $(1, 0)$, temos:

$b = -1$ e $y = x - 1$

Portanto, o coeficiente linear de g é -1.

A função h possui coeficiente angular igual a $\frac{1}{3}$; então, $y = \frac{1}{3}x + b$. Como ela passa pelo ponto $(0, 1)$, temos:

$b = 1$ e $y = \frac{1}{3}x + 1$

Portanto, o coeficiente linear de h é 1.

d) $\begin{cases} \text{função } g\text{: } y = x - 1 \\ \text{função } h\text{: } y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$x = 3$ e $y = 2$

Portanto, o ponto de intersecção é $(3, 2)$.

e) $h(x) < g(x)$

$\frac{1}{3}x + 1 < x - 1 \Rightarrow 2 < \frac{2x}{3} \Rightarrow x > 3$

Portanto, $h(x)$ é menor que $g(x)$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

Comentário: Nessa questão, pretende-se que os alunos estabeleçam uma conexão entre as abordagens algébrica e gráfica.

No item **e**, a intenção é antecipar, de maneira informal, o conceito de desigualdade aplicado na resolução de inequações, que será estudado no próximo item.

20. Pelo enunciado, temos: $\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = 4 \end{cases}$

x	$y = f(x)$
2	0
-1	4

a) A taxa de variação de f é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 4}{2 + 1} = -\frac{4}{3}$$

b) A função f é decrescente, pois a taxa de variação é negativa.

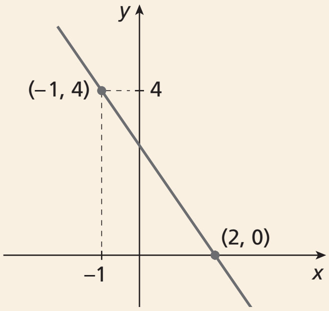
c) Como $y = ax + b$ e $a = -\frac{4}{3}$, temos: $y = -\frac{4}{3}x + b$

Como ela passa pelo ponto (2, 0), temos:

$$0 = -\frac{4}{3} \cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{8}{3}$$

Portanto, $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$.

d)



21. **a)** O salário (s_A) na loja A, em real, é:

$s_A = 900 + 0{,}02 \cdot 13.000 = 1.160$

O salário (s_B) na loja B, em real, é:

$s_B = 0{,}08 \cdot 13.000 = 1.040$

b) Na loja A: $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$

Na loja B: $s_B(x) = 0{,}08x$

c) Loja A:

$900 + 0{,}02 \cdot x = 1.600 \Rightarrow x = \frac{700}{0{,}02} = 35.000$

Loja B:

$0{,}05 \cdot x = 1.600 \Rightarrow x = 20.000$

Logo, para um funcionário ganhar R$ 1.600,00, o total de vendas na loja A deverá ser R$ 35.000,00 e na loja B, R$ 20.000,00.

d) Vamos encontrar o valor total de vendas x para o qual os valores recebidos nas lojas A e B se igualam.

$s_A = s_B \Rightarrow 900 + 0{,}02x = 0{,}08x \Rightarrow x = 15.000$

Supondo que o total de vendas seja, nas lojas A e B, R$ 15.001,00, então:

$s_A = 900 + 0{,}02 \cdot 15.001 = 1.200{,}02$

$s_B = 0{,}08 \cdot 15.001 = 1.200{,}08$

Logo, a partir de um total de vendas acima de R$ 15.000,00, é mais vantajoso trabalhar na loja B.

22. O gasto mensal do marceneiro é dado por:

$g(x) = 2.250 + 75 \cdot x$

a) Pelo enunciado, sabemos que para produzir 3 armários o marceneiro gasta:

$2.250 + 75 \cdot 3 = 2.475$

E o valor que receberá com a venda será:

$450 \cdot 3 = 1.350$

Calculando a diferença entre os valores:

$2.475 - 1.350 = 1.125$

Portanto, o marceneiro terá um prejuízo de R$ 1.125,00.

b) $v(x) = 450x$

$g(x) = 2.250 + 75x$

$l(x) = 450x - (2.250 + 75x) \Rightarrow l(x) = 375x - 2.250$

c) $v(x) = g(x) \Rightarrow 450x = 2.250 + 75x \Rightarrow$

$\Rightarrow 375x = 2.250 \Rightarrow x = 6$

Portanto, se o marceneiro vender 6 armários, não terá lucro nem prejuízo.

d) $l(x) = 375x - 2.250 \Rightarrow 1.500 = 375x - 2.250 \Rightarrow$

$\Rightarrow 375x = 3.750 \Rightarrow x = 10$

Logo, ele deve vender 10 armários.

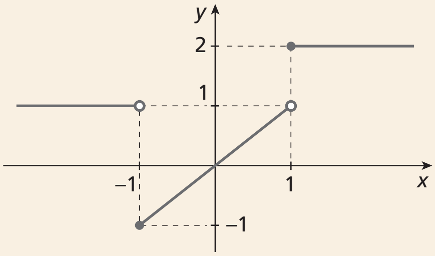
e) $l(15) = 375 \cdot 15 - 2.250 \Rightarrow$

$\Rightarrow l(15) = 3.375$

Logo, o lucro será R$ 3.375,00.

f) Não, porque o domínio dessas funções não é $\mathbb{R}$.

23. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ x, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$



Observando o gráfico, temos:

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ ou } y = 2\}$

24. Temos que, para $x \leqslant -1$, o gráfico obedece à lei de formação $y = ax + b$ e passa pelos pontos $(-5, -3)$ e $(-1, 1)$. Então:

- para $x = -5$, temos $y = -3$
  Logo: $-3 = a \cdot (-5) + b$ (I)
- para $x = -1$, temos $y = 1$
  Logo: $1 = a \cdot (-1) + b$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos $a = 1$ e $b = 2$. Assim, para $x \leqslant -1$, o gráfico obedece à lei $y = x + 2$.

Para o intervalo $-1 < x < 1$, a função é constante e igual a 1.

Para o intervalo $x \geqslant 1$, a função passa pelos pontos (1, 1) e (3, 3) e obedece à lei $y = ax + b$.

Então:

- para $x = 1$, temos $y = 1$
  Logo: $1 = a \cdot 1 + b$ (III)
- para $x = 3$, temos $y = 3$
  Logo: $3 = a \cdot 3 + b$ (IV)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (III) e (IV), encontramos $a = 1$ e $b = 0$. Assim, para $x \geqslant 1$, o gráfico obedece à lei $y = x$.

Portanto, a lei de formação da função correspondente é:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Observe que podemos escrever a lei de formação dessa função de outras maneiras, por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x < -1 \\ 1, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

25. a) O gráfico é uma reta; então, a função horária do movimento é do tipo: $s(t) = s_0 + vt$

Observando o gráfico, percebemos que $s_0 = 10$; então, $s(t) = 10 + vt$. Como $s(1) = 90$, temos:

$10 + v \cdot 1 = 90 \Rightarrow v = 80$

Portanto, a função horária do movimento é:

$s(t) = 10 + 80t$

b) Observando o gráfico, temos:

$D(s) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 0\} = \mathbb{R}_+$

$Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 10\}$

c) Para $t = 4$, temos: $s(4) = 10 + 80 \cdot 4 = 330$

A posição será 330 quilômetros.

d) $s(t) = 250 \Rightarrow 10 + 80t = 250 \Rightarrow 80t = 240 \Rightarrow t = 3$

Após 3 horas.

26. a) Tecnologia: R$ 6,00 + R$ 7,00 = R$ 13,00

Modernidade: R$ 5,00 + R$ 10,00 = R$ 15,00

b) Chamando de x a quantidade de horas, vamos determinar as leis das funções m e t que representam o gasto (considerando o transporte) para utilizar a internet, respectivamente, na *lan house* Modernidade e na *lan house* Tecnologia:

- $m(x) = 2{,}50 + 10{,}00 = 12{,}50$, se $0 < x \leqslant 0{,}5$
  $m(x) = 5 + 7(x - 1) + 10 \Rightarrow m(x) = 7x + 8$, se $x > 0{,}5$
- $t(x) = 3{,}00 + 7{,}00 = 10{,}00$, se $0 < x \leqslant 0{,}5$
  $t(x) = 6 + 8(x - 1) + 7 \Rightarrow t(x) = 8x + 5$, se $x > 0{,}5$

Para ser vantajoso usar a *lan house* Modernidade, devemos ter:

$m(x) < t(x)$, para $x > 0{,}5$

$7x + 8 < 8x + 5 \Rightarrow -1x < -3 \Rightarrow x > 3$

Logo, é mais vantajoso usar a *lan house* Modernidade se Isadora permanecer mais de 3 horas.

27. a) $3x - 12 \leqslant 0 \Rightarrow 3x \leqslant 12 \Rightarrow x \leqslant 4$

Logo, o conjunto solução da inequação é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

b) $5(-x + 1) + 2(3x - 4) > -1 \Rightarrow -5x + 5 + 6x - 8 > -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 3 > -1 \Rightarrow x > 2$

Logo, o conjunto solução da inequação é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $\dfrac{-x + 3}{2} < \dfrac{2x + 5}{3} \Rightarrow \dfrac{3(-x + 3)}{6} < \dfrac{2(2x + 5)}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x + 9 < 4x + 10 \Rightarrow -3x - 4x < 10 - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow -7x < 1 \Rightarrow x > -\dfrac{1}{7}$

Assim, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$$

28. a) Observando o gráfico, verifica-se que $f(x) = g(x)$ para $x = -5$.

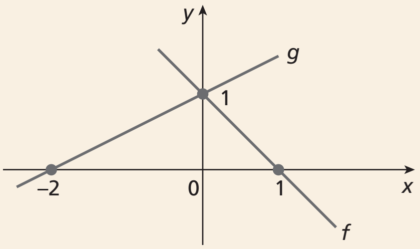
b) O conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$ é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

c) O conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$ é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

29. $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$



x	g(x)
0	1
–2	0

x	f(x)
0	1
1	0

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

a) Pelo gráfico, podemos observar que, para $x > 0$, temos $f(x) < g(x)$.

b) Vamos resolver a inequação $f(x) < g(x)$:

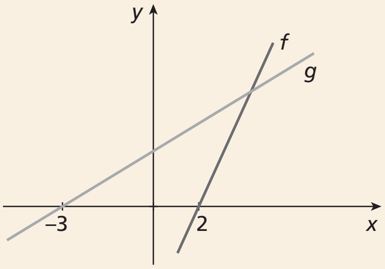
$-x + 1 < \dfrac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}x + x > 1 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2}x > 0 \Rightarrow x > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Portanto, o intervalo encontrado como solução da inequação $f(x) < g(x)$ é o mesmo intervalo encontrado pela análise do gráfico.

30.



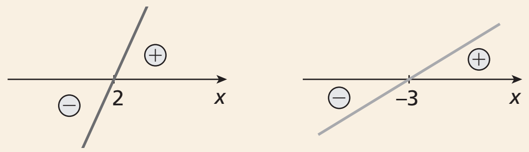
a) Analisando o gráfico, temos:

- $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$
- $f(x) > 0 \Rightarrow x > 2$
- $f(x) < 0 \Rightarrow x < 2$

b) Analisando o gráfico, temos:

- $g(x) = 0 \Rightarrow x = -3$
- $g(x) > 0 \Rightarrow x > -3$
- $g(x) < 0 \Rightarrow x < -3$

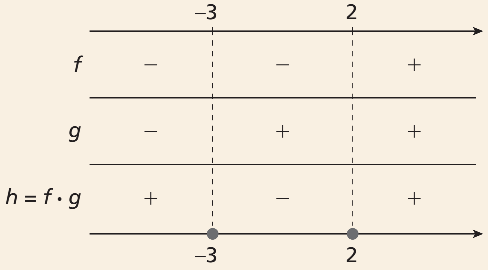
c) Estudo dos sinais:



Sinal de *f*

Sinal de *g*

Quadro de sinais



	$x < -3$	$-3 < x < 2$	$x > 2$
f	–	–	+
g	–	+	+
$h = f \cdot g$	+	–	+

Assim, temos:

- $x < -3 \Rightarrow h(x)$ positiva
- $-3 < x < 2 \Rightarrow h(x)$ negativa
- $x > 2 \Rightarrow h(x)$ positiva

d) Observando o quadro de sinais do item anterior: $h(x) \geqslant 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

e) Espera-se que os alunos percebam que é necessário fazer o estudo do sinal de cada função e depois verificar o sinal do produto das duas funções nos intervalos definidos pelas raízes de cada uma delas. Em seguida, devem observar qual dos intervalos satisfaz a inequação.

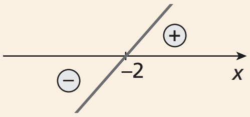
Comentário: Essa é mais uma questão em que os alunos são instigados a trabalhar e a estabelecer uma relação entre as linguagens algébrica e gráfica. Eles têm a possibilidade de, com um colega, elaborar estratégias de resolução e antecipar, com base em um caso particular, a obtenção do conjunto solução de uma inequação-produto.

31. a) $(x+2)\cdot\left(-\frac{1}{2}+3x\right)>0$

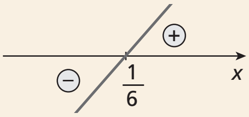
Vamos considerar $f(x)=x+2$ e $g(x)=-\frac{1}{2}+3x$.
Zero de f: $x+2=0\Rightarrow x=-2$

Zero de g: $-\frac{1}{2}+3x=0\Rightarrow x=\frac{1}{6}$

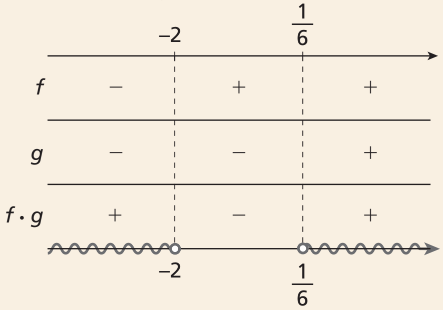
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



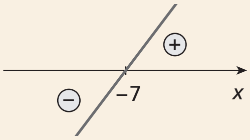
f	−	+	+
g	−	−	+
$f\cdot g$	+	−	+

Logo, $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-2 \text{ ou } x>\frac{1}{6}\right\}$.

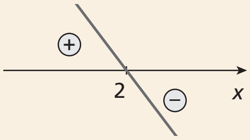
b) $\frac{x+7}{2-x}<0$

Vamos considerar $f(x)=x+7$ e $g(x)=2-x$.
Zero de f: $x+7=0\Rightarrow x=-7$
Zero de g: $2-x=0\Rightarrow x=2$

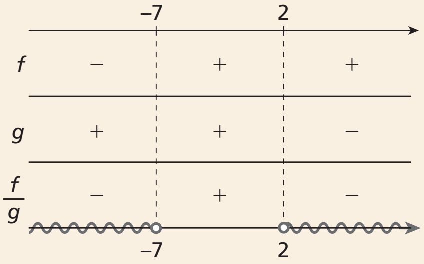
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



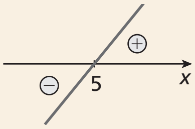
f	−	+	+
g	+	+	−
$\frac{f}{g}$	−	+	−

Logo, $S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-7 \text{ ou } x>2\}$.

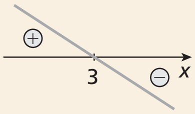
c) $(x-5)\cdot(-x+3)\cdot(2x+1)\leqslant 0$
Vamos considerar $f(x)=x-5$, $g(x)=-x+3$ e $h(x)=2x+1$.
Zero de f: $x-5=0\Rightarrow x=5$
Zero de g: $-x+3=0\Rightarrow x=3$

Zero de h: $2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

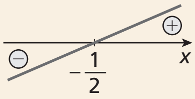
Sinal de f



Sinal de g

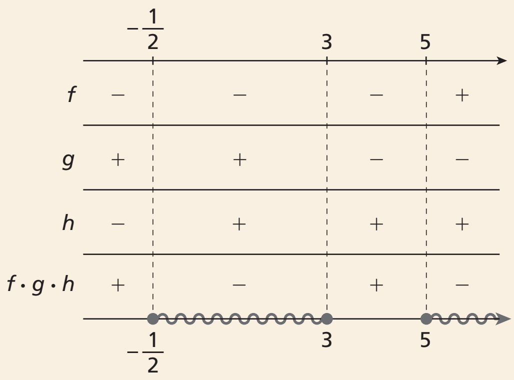


Sinal de h



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Quadro de sinais



f	−	−	−	+
g	+	+	−	−
h	−	+	+	+
$f\cdot g\cdot h$	+	−	+	−

Logo, $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3 \text{ ou } x\geqslant 5\right\}$.

Comentário: É importante ressaltar a necessidade do quadro de sinais para a resolução de uma inequação-produto ou inequação-quociente, bem como o estudo de sinais de cada função.

d) $\frac{-1}{x+2}+\frac{2x}{x+2}\geqslant -2\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{-1}{x+2}+\frac{2x}{x+2}+2\geqslant 0\Rightarrow$

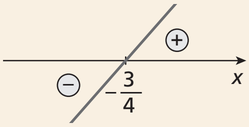
$\Rightarrow\frac{-1+2x+2(x+2)}{x+2}\geqslant 0\Rightarrow\frac{4x+3}{x+2}\geqslant 0$

Vamos considerar $f(x)=4x+3$ e $g(x)=x+2$.

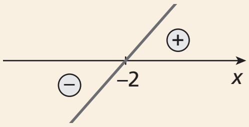
Zero de f: $4x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{4}$

Zero de g: $x+2=0\Rightarrow x=-2$

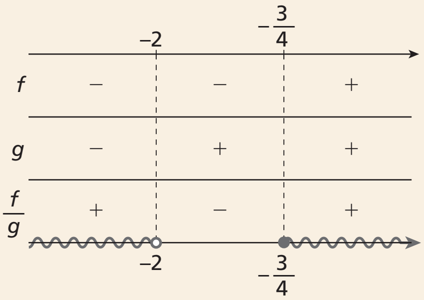
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

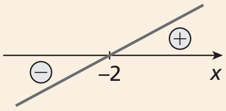


f	−	−	+
g	−	+	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+

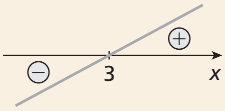
Logo, $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-2 \text{ ou } x\geqslant-\frac{3}{4}\right\}$.

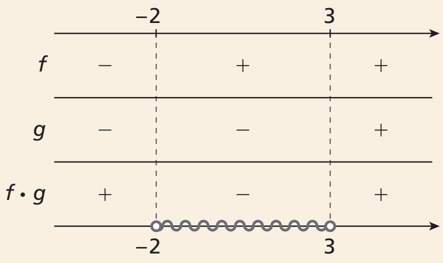
e) $x^2-x-6<0\Rightarrow(x+2)(x-3)<0$
Vamos considerar $f(x)=x+2$ e $g(x)=x-3$.
Zero de f: $x+2=0\Rightarrow x=-2$
Zero de g: $x-3=0\Rightarrow x=3$

Sinal de f



Sinal de g



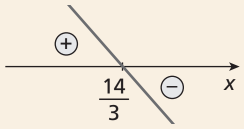

Quadro de sinais

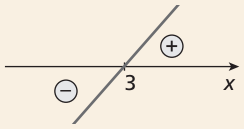
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$.

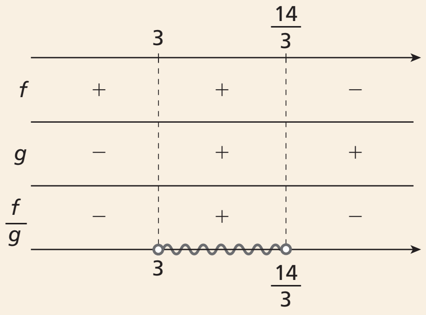
32. $\frac{5}{x-3} > 3 \Rightarrow \frac{5}{x-3} - 3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5-3(x-3)}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{-3x+14}{x-3} > 0$

Vamos considerar $f(x) = -3x + 14$ e $g(x) = x - 3$.


Sinal de f


Sinal de g


Quadro de sinais

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < \frac{14}{3}\right\}$.

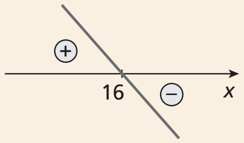
Assim, o maior número inteiro que satisfaz a inequação dada é o número 4, que é múltiplo de 2.

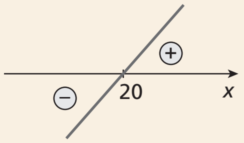
alternativa a

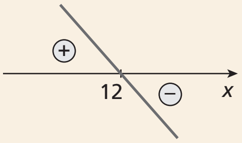
33. $\frac{1}{x-20} \leqslant \frac{1}{12-x} \Rightarrow \frac{1}{x-20} - \frac{1}{12-x} \leqslant 0 \Rightarrow$

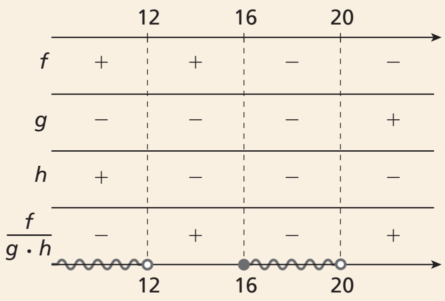
$\Rightarrow \frac{12-x-(x-20)}{(x-20)(12-x)} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-2x+32}{(x-20)(12-x)} \leqslant 0$

Vamos considerar $f(x) = -2x + 32$, $g(x) = x - 20$ e $h(x) = 12 - x$.


Sinal de f


Sinal de g


Sinal de h


Quadro de sinais

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 12 \text{ ou } 16 \leqslant x < 20\}$.

Os números inteiros e estritamente positivos que satisfazem a sentença dada são:

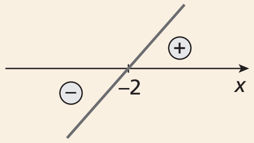
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18 e 19.

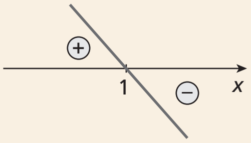
Portanto, temos 15 números.

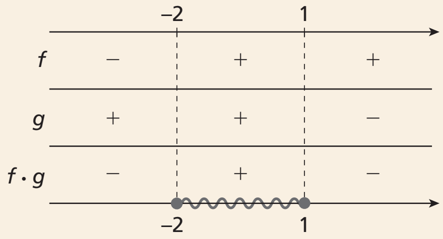
alternativa b

34. $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -x + 1$

$f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \Rightarrow (x + 2)(-x + 1) \geqslant 0$


Sinal de f


Sinal de g


Quadro de sinais

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Os números inteiros que satisfazem a sentença são -2, -1, 0 e 1.

Soma: $-2 - 1 + 0 + 1 = -2$

alternativa a

35. **a)** Pelo quadro de sinais, observamos que o zero da função f é -1 e que o zero da função g é $-\frac{1}{3}$, pois são os pontos que determinam a mudança de sinal das funções, respectivamente.

b) A função f passa de valores negativos para positivos; portanto, é crescente. A função g passa de valores positivos para negativos; portanto, é decrescente.

c) Se fosse uma inequação-produto, o intervalo da solução seria aberto em ambas as raízes ou fechado em ambas. Como o intervalo apresentado como solução é aberto em uma raiz e fechado em outra, concluímos que é uma inequação-quociente.

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

e) Como a expressão apresentada deve ser estritamente menor que zero, sua solução terá apenas intervalos abertos. Portanto, o intervalo apresentado no quadro de sinais não é sua solução.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

f) Espera-se que os alunos percebam que as possíveis inequações são encontradas a partir das raízes dadas. Além disso, o intervalo da solução é aberto em $-\frac{1}{3}$ e fechado em -1. Isso nos leva a concluir que a equação de raiz $-\frac{1}{3}$ deve ficar no denominador. Assim, uma resposta possível é $\frac{x+1}{-3x-1} \leqslant 0$.

Comentário: Essa atividade propicia a reversibilidade procedimental das atividades imediatamente anteriores, levando os alunos a refletir sobre os porquês dos procedimentos de resolução de inequação-produto e de inequação-quociente.

36. a) $5 \leqslant 3x - 4 < x + 2$

(I) $3x - 4 \geqslant 5 \Rightarrow$

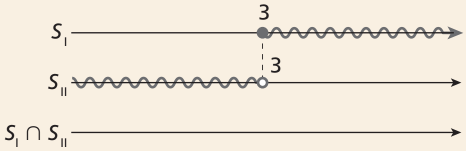
$\Rightarrow 3x \geqslant 9 \Rightarrow x \geqslant 3$

Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

(II) $3x - 4 < x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.



Logo, $S = \varnothing$.

b) $\frac{3x}{5} \leqslant \frac{5x+2}{4} \leqslant \frac{-x+1}{2}$

(I) $\frac{3x}{5} \leqslant \frac{5x+2}{4} \Rightarrow \frac{3x}{5} - \frac{5x+2}{4} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12x - 25x - 10}{20} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-13x - 10}{20} \leqslant 0 \Rightarrow$

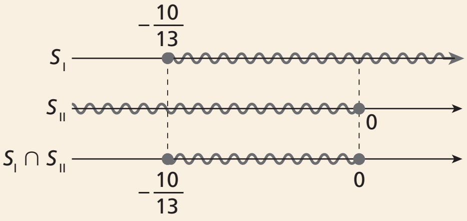
$\Rightarrow -13x - 10 \leqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{10}{13}$

Portanto, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{10}{13}\right\}$.

(II) $\frac{5x+2}{4} - \frac{-x+1}{2} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5x + 2 + 2x - 2}{4} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{7x}{4} \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$.



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leqslant x \leqslant 0\right\}$.

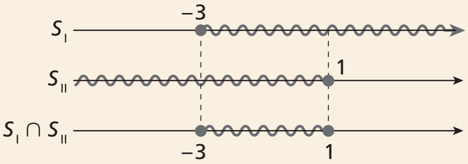
c) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ 4x - 7 \leqslant x - 4 \end{cases}$

(I) $x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3$

Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

(II) $4x - 7 \leqslant x - 4 \Rightarrow 3x \leqslant 3 \Rightarrow x \leqslant 1$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$.



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$.

d) $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leqslant 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$

(I) $5x - 2 > 4 - x \Rightarrow x > 1$

Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

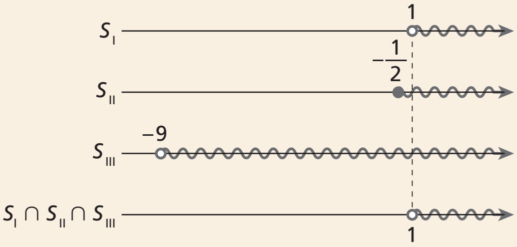
(II) $14 - 2x \leqslant 10x + 20 \Rightarrow -12x \leqslant 6 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

Portanto, $S_{II} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$.

(III) $2 - 12 - 6x < 6 + 2 - 4x \Rightarrow -2x < 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > -9$

Portanto, $S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -9\}$.



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

37. a) Plano Azul: $p_A(x) = 140 + 50x$

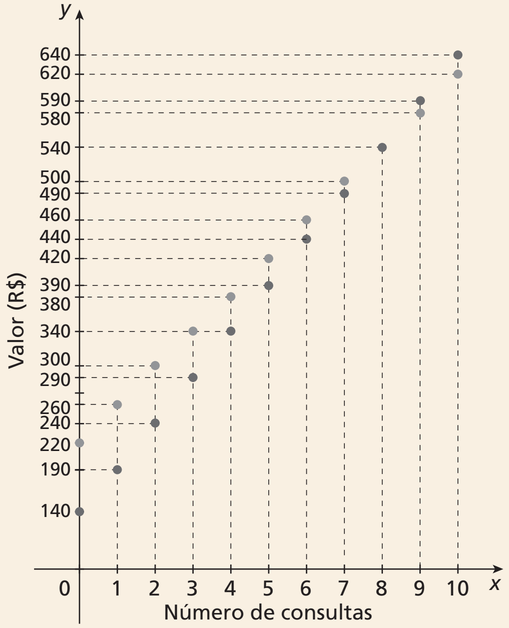
b) Plano Laranja: $p_L(x) = 220 + 40x$

c) $p_A(x) = p_L(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 140 + 50x = 220 + 40x \Rightarrow 10x = 80 \Rightarrow x = 8$

Assim, para 8 consultas, o valor total a ser pago no decorrer de um ano é igual para ambos os planos.

d) Observe abaixo o esboço dos gráficos de $p_A(x)$ e de $p_L(x)$ em um mesmo plano cartesiano, em que os pontos cinza-claro representam o Plano Laranja e os pontos cinza-escuro representam o Plano Azul.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

No gráfico, observamos que, para qualquer quantidade de consultas maior que 8, o Plano Laranja é mais vantajoso para o cliente, em particular para um número de consultas x tal que $8 < x < 18$.

e) Da mesma forma, observando o gráfico percebemos que, para um número de consultas x tal que $4 < x < 7$, o Plano Azul é o mais vantajoso para o cliente.

Comentário: Questões como essa (há outras no decorrer do livro) oferecem aos alunos um instrumento de análise e de tomada de decisão, em uma situação do dia a dia, promovendo o exercício da cidadania.

38. Sabemos que o valor é dado pela diferença entre o valor das vendas e o dos gastos. Assim, pelo enunciado:

a) $V_s(x) = 2x - 10.000$

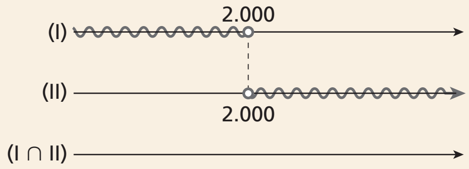
b) $V_f(x) = 3x - 12.000$

c) $V_s(x) = V_f(x) \Rightarrow 2x - 10.000 = 3x - 12.000 \Rightarrow x = 2.000$

Portanto, $V_s = V_f$ para 2.000 quilogramas.

d) $\begin{cases} V_s(x) > V_f(x) \\ V_s(x) < V_f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 10.000 > 3x - 12.000 \\ 2x - 10.000 < 3x - 12.000 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x > -2.000 \\ -x < -2.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2.000 \quad \text{(I)} \\ x > 2.000 \quad \text{(II)} \end{cases}$



ADILSON SECCO

Logo, $S = \varnothing$.

e) Supondo uma produção de 10.000 quilogramas, temos:

$V_s(x) = 2 \cdot 10.000 - 10.000 = 10.000,00$

$V_f(x) = 3 \cdot 10.000 - 12.000 = 18.000,00$

Portanto, o agricultor terá mais lucro na cultura de feijão.

f) Analisando o esquema do item **d**, verificamos que $V_f(x) > V_s(x)$ para $x > 2.000$. Logo, a quantidade mínima de feijão é de 2.001 quilogramas.

39. a) $j(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$

Como o índice da raiz é ímpar, não há restrições para o radicando.

Logo, $D(j) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

Devemos ter: $2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$.

c) $h(x) = \dfrac{-2x + 3}{\sqrt{1 - x}}$

Devemos ter: $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

Logo, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

d) $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

Devemos ter: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Logo, $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

e) $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + 1}}$

Devemos ter: $\sqrt[3]{x + 1} \neq 0 \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Logo, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

Exercícios complementares

1. a) $y = 5(x - 1) - 4(x - 3) \Rightarrow y = x + 7$

$y = x + 7$ é lei de uma função afim, com $a = 1$ e $b = 7$.

b) $y = \dfrac{1}{x}$ não é lei de uma função afim.

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ não é uma função afim.

d) $f(x) = \dfrac{3 - x}{4}$

$f(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{4}$

f é uma função afim, com $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{3}{4}$.

2. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$

$f(p) = \dfrac{2}{3} \cdot 10^8 - \dfrac{1}{3}$

$f(q) = \dfrac{2}{3} \cdot 10^{10} - \dfrac{1}{3}$

$$\frac{f(p) - f(q)}{q - p} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 10^8 - \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 10^{10} + \cancel{\frac{1}{3}}}{10^{10} - 10^8} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(10^8 - 10^{10})}{-(10^8 - 10^{10})} = -\frac{2}{3}$$

3. $f(x) = 4x - 5$

Para $f(x) = -3$, temos:

$4x - 5 = -3 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Para $f(x) = 3$, temos:

$4x - 5 = 3 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

Como f é crescente, os valores do domínio de f que produzem $\text{Im}(f) = [-3, 3]$ pertencem ao seguinte conjunto: $D(f) = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ou $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

4. Sabemos que o preço m, em real, de n quilogramas do produto é dado por $m = 1{,}75n$. Então, o gráfico é uma reta que contém o ponto (1; 1,75).

alternativa e

5. $f(x) = 3 - 5x$

a) O gráfico é uma reta oblíqua aos eixos x e y.

b) O coeficiente a de x é -5, ou seja, negativo; então, a função dada é decrescente.

c) No ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo x, temos:

$f(x) = 0 \Rightarrow 3 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

Logo, o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo x é $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$.

O ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y é $(0, b)$, em que b é o coeficiente linear da função f. Logo, esse ponto é (0, 3).

d) Zero de f: $3 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

e) Como f está definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$. Como f é uma função afim de domínio real, a imagem de f é $\mathbb{R}$.

f) No ponto de intersecção, temos:

$f(x) = g(x) \Rightarrow 3 - 5x = 2x - 4 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$

E, daí: $f(1) = g(1) = -2$

Logo, o ponto é $P(1, -2)$.

6. Uma função polinomial do 1º grau tem a forma:

$y = ax + b$

Como o gráfico passa pelo ponto $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$, para $x = -1$, temos $y = \frac{4}{3}$. Logo:

$\frac{4}{3} = a \cdot (-1) + b \quad \text{(I)}$

Como o gráfico passa pelo ponto $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$, para $x = -2$, temos $y = -\frac{5}{3}$. Logo:

$-\frac{5}{3} = a \cdot (-2) + b$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos $a = 3$ e $b = \frac{13}{3}$.

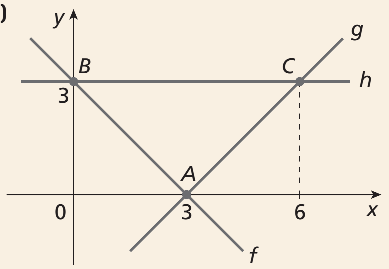
Portanto, a lei da função é $y = 3x + \frac{13}{3}$.

7. a) Sabemos que:
$f(x) = -x + 3$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = 3$

- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de f e de g, temos:
  $f(x) = g(x) \Rightarrow -x + 3 = x - 3 \Rightarrow x = 3$
  $f(3) = g(3) = 0$
  Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de f e de g é $A(3, 0)$.
- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de f e de h, temos:
  $f(x) = h(x) \Rightarrow -x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$
  $f(0) = h(0) = 3$
  Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de f e de h é $B(0, 3)$.
- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de g e de h, temos:
  $g(x) = h(x) \Rightarrow x - 3 = 3 \Rightarrow x = 6$
  $g(6) = h(6) = 3$
  Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de g e de h é $C(6, 3)$.

Portanto, os vértices desse triângulo são: $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ e $C(6, 3)$

b)



c) f é decrescente ($a = -1 < 0$);
g é crescente ($a = 1 > 0$);
h é constante ($a = 0$).

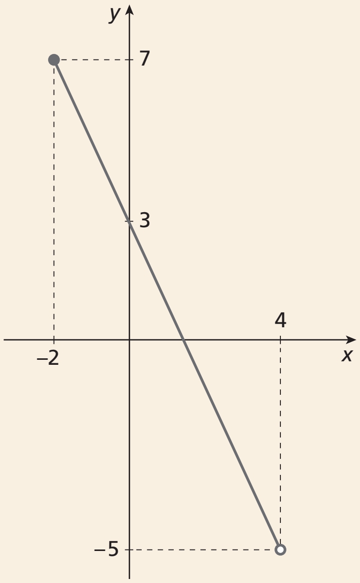
8. a) Na venda de x ingressos, o faturamento, por sessão, será dado por $f(x) = 50 \cdot x$.

b) Para que uma apresentação não tenha prejuízo, devemos ter:
$50x = 5.000 \Rightarrow x = 100$
Logo, o número mínimo de pagantes deve ser 100.

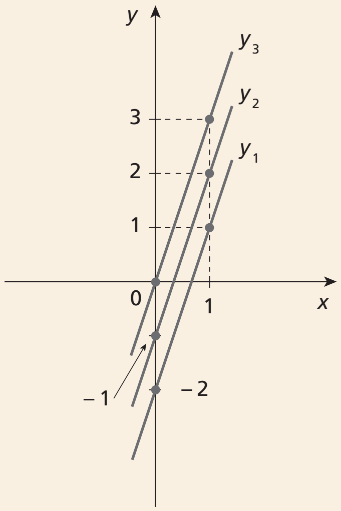
c) 100 pagantes por apresentação, ou seja, 400 pagantes por semana.

d) O lucro máximo ocorre quando há 180 pagantes, ou seja, $y = 50 \cdot 180 = 9.000$.
O faturamento é R$ 9.000,00, mas o custo de uma apresentação é R$ 5.000,00. Portanto, o lucro máximo por apresentação é R$ 4.000,00.

9. f, tal que $f(x) = -2x + 3$, está definida em $A = [-2, 4[$.
Para $x = -2$, temos $f(-2) = 7$.
Para $x = 4$, temos $f(4) = -5$.
Como f é decrescente, temos $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leqslant 7\}$.

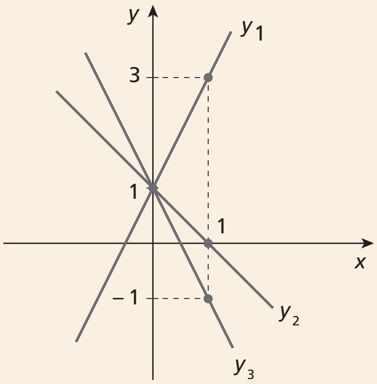


10. a) $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 3x - 1$ e $y_3 = 3x$



Como os coeficientes a de x de cada função são iguais, os gráficos correspondentes são retas paralelas, ou seja, não existe ponto de intersecção entre as retas correspondentes às funções y_1, y_2 e y_3.

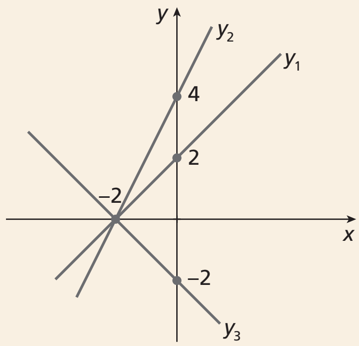
b) $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x + 1$ e $y_3 = -2x + 1$



Como os coeficientes a de x de cada função são diferentes entre si, as retas correspondentes têm ponto de intersecção. Como os coeficientes lineares, b, de cada função são iguais, todas as retas interceptam o eixo y no mesmo ponto (0, 1). Assim, as três retas interceptam-se no ponto (0, 1).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

c) $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x + 4$ e $y_3 = -x - 2$



Nesse caso, os coeficientes a e b das funções são diferentes, mas todas as funções têm o mesmo zero. Portanto, as três retas cruzam o eixo x no mesmo ponto, que é o zero das funções.

11. O gráfico da função passa pelos pontos $(-2, 0)$ e $(0, 3)$.
Para $x = -2$, temos $y = 0$. Logo:
$0 = a \cdot (-2) + b$ (I)
Para $x = 0$, temos $y = 3$. Logo:
$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$
Substituindo b por 3 em (I), obtemos:

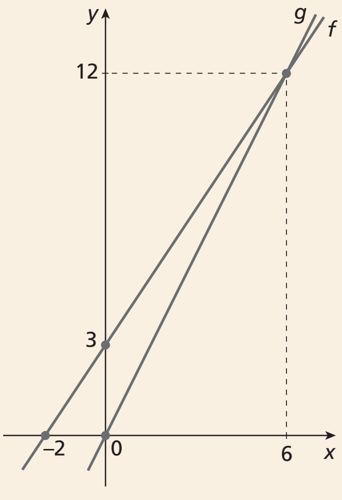
$$-2a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Portanto, a lei de formação é $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$.

- Para que o gráfico dessa função intercepte o gráfico de $g(x) = 2x$, deve existir um valor de x de modo que as imagens desse valor, pelas duas funções, coincidam, ou seja, que $f(x) = g(x)$. Então:

$$\frac{3}{2}x + 3 = 2x \Rightarrow x = 6$$

Para $x = 6$, temos $f(6) = g(6) = 12$.
Logo, o ponto de intersecção é $(6, 12)$.
Outro modo de verificar a existência de intersecção é pelo traçado dos gráficos das duas funções em um mesmo plano cartesiano:



No gráfico, observamos que o ponto de intersecção das retas correspondentes aos gráficos de f e de g é $(6, 12)$.

12. a) Como o gráfico da função passa pelo ponto $(0, 0)$, para $m = 0$, temos $v = 0$. Logo:
$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$
Como o gráfico da função passa pelo ponto $(40, 50)$, para $m = 40$, temos $v = 50$. Logo:
$50 = a \cdot 40 + b$
Substituindo b por 0, obtemos:

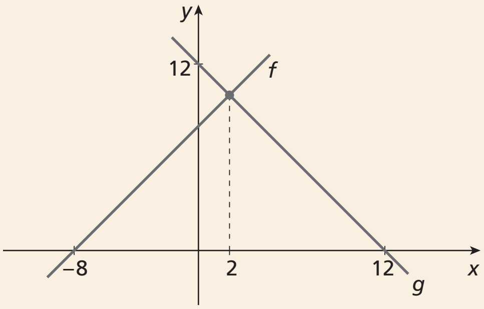
$$40a + 0 = 50 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

Portanto, a lei da função apresentada é $v(m) = \frac{5}{4}m$, com v representando o volume (em centímetro cúbico) e m representando a massa (em grama).

b) $v = 30 \Rightarrow \frac{5}{4}m = 30 \Rightarrow m = 24$

Portanto, a massa correspondente a $30\ cm^3$ é 24 g.

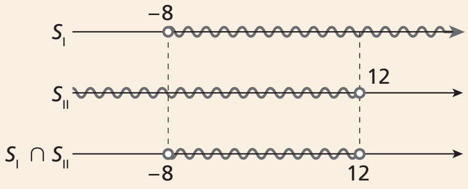
13.



Devemos encontrar os valores de x para que as funções f e g sejam simultaneamente positivas e não nulas. Para isso, devemos ter $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$.
Analisando os gráficos, temos:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x < 12 \end{cases}$$

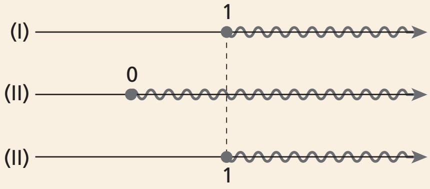
Logo: $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 12\}$



Então, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$.
Portanto, para $-8 < x < 12$, as funções f e g são simultaneamente positivas e não nulas.

14. Para que a indústria não tenha prejuízo, pela expressão, temos:
$LT(q) \geqslant 0 \Rightarrow 5q - (2q + 12) \geqslant 0 \Rightarrow 3q \geqslant 12 \Rightarrow q \geqslant 4$
Portanto, a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar é 4.
alternativa d

15. a) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{x}$
(I) $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$
(II) $x \geqslant 0$



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

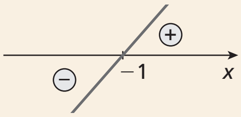
b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{-2x + 3}}$

Devemos ter: $\dfrac{x + 1}{-2x + 3} \geqslant 0$

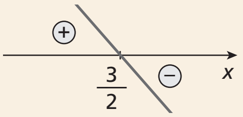
Vamos considerar $g(x) = x + 1$ e $h(x) = -2x + 3$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

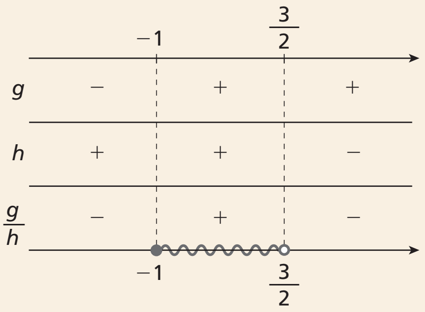
Sinal de g



Sinal de h



Quadro de sinais



		-1		$\frac{3}{2}$	
g	−		+		+
h	+		+		−
$\frac{g}{h}$	−		+		−

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$.

16. Seja f a função que determina quanto um usuário paga pelo uso do estacionamento em x horas; então:
$f(x) = 3(x - 1) + 6 \Rightarrow f(x) = 3x + 3$
A função f mostra que cada usuário paga R$ 3,00 por hora e mais R$ 3,00 de taxa. Seja n o número de usuários necessário para que o estacionamento tenha lucro; logo:
$3x + 3n > 320$
Para $x = 80$, temos:
$3 \cdot 80 + 3n > 320 \Rightarrow n > 26{,}66...$
Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 27$.
alternativa c

17. f é positiva para:

- $x > 0$ e $2p + 3 > 0 \Rightarrow p > -\frac{3}{2}$
- $x < 0$ e $2p + 3 < 0 \Rightarrow p < -\frac{3}{2}$

18. A reta s passa pelos pontos $(-3, 0)$ e $(0, 2)$, e a lei da função correspondente a essa reta é $s(x) = \frac{2}{3}x + 2$.
A reta r passa pelos pontos $(-3, 2)$ e $(0, -4)$, e a lei da função correspondente a essa reta é $r(x) = -2x - 4$.
No ponto P, temos $s(x) = r(x)$; então:

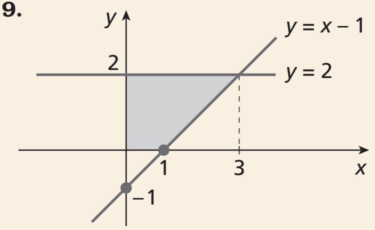
$$\frac{2}{3}x + 2 = -2x - 4 \Rightarrow \frac{2}{3}x + 2x = -4 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}x = -6 \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

Assim, $s\left(-\frac{9}{4}\right) = r\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Portanto, as coordenadas do ponto P são $\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

19.



$$\text{Área} = \frac{(3 + 1) \cdot 2}{2} = 4$$

alternativa c

Autoavaliação

1. Como uma função afim é aquela cuja lei de formação obedece à forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, a sentença correta é $f(x) = -5 + x$.
alternativa b

2. $f(m) = m - 0{,}15m$
$f(m) = 0{,}85m$
alternativa b

3. Como $y = ax + b$ e passa por $(0, 0)$ e $(-1, -1)$, temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ -1 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Assim, $y = x$.
Portanto, é uma função linear, polinomial do 1º grau e identidade. Não é uma função constante.
alternativa a

4. As retas correspondentes a essas funções são concorrentes, pois:
$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$
$f(0) = g(0) = -1$
Os gráficos de f e de g interceptam-se no ponto $(0, -1)$.
alternativa c

5. Vaptvupt: $v(x) = 10 + 1 \cdot x$
Ligeirinho: $l(x) = 15 + 0{,}75x$
$v(x) < l(x) \Rightarrow 10 + x < 15 + 0{,}75x \Rightarrow 0{,}25x < 5 \Rightarrow x < 20$
alternativa d

6. $f(x)$ intercepta o eixo x quando $f(x) = 0$; então:
$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$
$f(x)$ intercepta o eixo y quando $x = 0$; então:
$f(0) = ax + b = a \cdot 0 + b = b$
Portanto, no ponto $(0, b)$ o gráfico da função intercepta o eixo y.
alternativa a

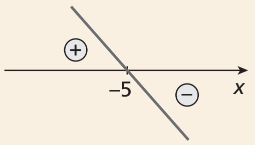
7. Observando o gráfico, percebemos que a função é decrescente e que $y > 0$ para $x < 2$ e $y < 0$ para $x > 2$.
alternativa b

8.
$$\frac{x - 1}{x + 2} \leq 2 \Rightarrow \frac{x - 1}{x + 2} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x - 1 - 2(x + 2)}{x + 2} \leq 0 \Rightarrow$$

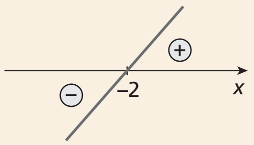
$$\Rightarrow \frac{-x - 5}{x + 2} \leq 0$$

Vamos considerar $f(x) = -x - 5$ e $g(x) = x + 2$.

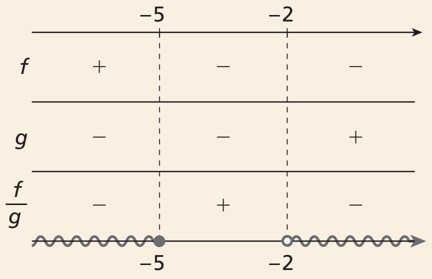
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



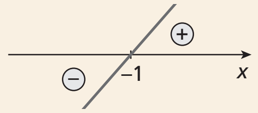
		-5		-2	
f	+		−		−
g	−		−		+
$\frac{f}{g}$	−		+		−

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x > -2\}$.
alternativa c

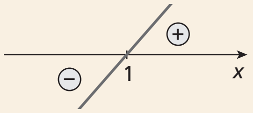
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

9. Nesse exercício, precisamos resolver item a item. Para resolver os itens **a** e **b**, vamos considerar $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$.

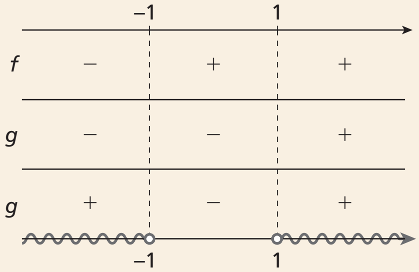
Sinal de f



Sinal de g

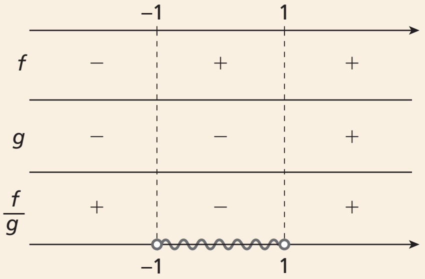


a)



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

b)



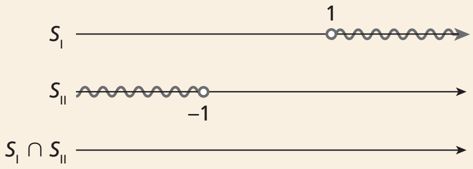
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

c) $x + 2 > x + 1 > x$

$x + 2 > x + 1$, para $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$x + 1 > x$, para $\forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$



$S = S_I \cap S_{II} = \varnothing$

alternativa d

10. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

Domínio de f: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$g(x) = \sqrt{x - 3}$

Domínio de g: $x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$ e $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

alternativa a

Pesquisa e ação

Essa atividade tem caráter interdisciplinar, pois utiliza conceitos da Física e também valoriza a prática de atividades físicas, podendo contribuir com a disciplina de Educação Física.

É importante que todos os alunos participem, até mesmo os portadores de necessidades especiais, como pessoas com problemas físicos ou visuais. A colaboração dos colegas deve permitir a inclusão de todos na atividade.

Na execução da atividade, o professor poderá considerar o uso de instrumentos de medida não convencionais, como o passo, auxiliando os alunos na coleta de dados com esse recurso, e, depois, trabalhar a conversão para metro, se julgar necessário.

Destacamos que, como o espaço percorrido por todos os integrantes de um mesmo grupo é igual, o professor pode avaliar se a construção dos gráficos foi feita corretamente.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 5

Função quadrática

Complementando o estudo das funções polinomiais, esse capítulo trabalha a função quadrática e seu emprego em diversas áreas do conhecimento. Entre os inúmeros exemplos de aplicação dessa importante função matemática estão o estudo do movimento de um corpo em queda livre, o lançamento de um projétil ou a desaceleração de um móvel, no campo da Física, assim como o cálculo da área máxima de um terreno de características peculiares, na Geometria, ou a modelagem do lucro de uma empresa em função do tempo determinando as condições para uma arrecadação máxima, na Economia.

O conhecimento da parábola — gráfico da função quadrática — e de seus elementos facilita a compreensão e a visualização dessas aplicações, bem como a resolução de outras situações-problema.

O estudo da função quadrática traz importantes subsídios para o desenvolvimento dos conceitos de progressão geométrica (volume do 1º ano) e juro composto (volume do 3º ano). Além disso, serve de base para o estudo das cônicas (elipse, parábola e hipérbole) na Geometria analítica (volume do 3º ano).

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. **a)** g é função quadrática, com $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.

b) h é função quadrática, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = \sqrt{7}$.

c) i não é função quadrática.

d) m não é função quadrática.

2. **a)** $f(-1) = -(-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 6$

$f(-1) = -1 - 5 + 6$

$f(-1) = 0$

b) $f\left(\sqrt{2}\right) = -\left(\sqrt{2}\right)^2 + 5 \cdot \sqrt{2} + 6$

$f\left(\sqrt{2}\right) = -2 + 5\sqrt{2} + 6$

$f\left(\sqrt{2}\right) = 4 + 5\sqrt{2}$

c) $f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 6$

$f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{25} - 4 + 6 = \frac{34}{25}$

d) $-x^2 + 5x + 6 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1$ ou $x = 6$

e) $-x^2 + 5x + 6 = \frac{49}{4} \Rightarrow -4x^2 + 20x - 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

f) $-x^2 + 5x + 6 = 20 \Rightarrow -x^2 + 5x - 14 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-14) = -31$

Como $\Delta < 0$, não existe x real que satisfaça a equação $f(x) = 20$.

- Analisando esses valores, não podemos determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente.
- A construção do gráfico dessa função facilitaria sua análise.

Comentário: O objetivo das perguntas apresentadas logo após os itens é propiciar uma reflexão sobre a análise de uma função a partir de alguns pontos e conectar esse conteúdo com o que será explorado adiante.

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = c = -4 \Rightarrow c = -4$

$f(3) = 9a + 3b - 4 = 8 \Rightarrow 9a + 3b = 12$

$f(-2) = 4a - 2b - 4 = 4 \Rightarrow 4a - 2b = 8$

$$\begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18a + 6b = 24 \\ 12a - 6b = 24 \end{cases}$$

$30a + 0b = 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{48}{30} = \frac{8}{5}$ e $b = -\frac{4}{5}$

$f(x) = \frac{8}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 4$

$f(-3) = \frac{8}{5}(-3)^2 - \frac{4}{5}(-3) - 4 = \frac{64}{5}$

4. a) $f(x) = (2p - 3)x^2 + 7xp + 2$

Para f ser uma função quadrática, devemos ter:

$(2p - 3) \neq 0 \Rightarrow p \neq \frac{3}{2}$

b) $g(x) = [(3p + 5)(p + 7)]x^2 + 3x + 11$

Para g ser uma função quadrática, devemos ter:

$(3p + 5)(p + 7) \neq 0 \Rightarrow 3p + 5 \neq 0$ e $p + 7 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

5. a) Grupo de 2 pessoas: 2 e-mails

Grupo de 3 pessoas: 6 e-mails $(3 \cdot 2)$

Grupo de 4 pessoas: 12 e-mails $(4 \cdot 3)$

Grupo de 10 pessoas: 90 e-mails $(10 \cdot 9)$

b)

Número de pessoas do grupo	E-mails enviados
2	$2 \cdot (2 - 1)$
3	$3 \cdot (3 - 1)$
4	$4 \cdot (4 - 1)$
10	$10 \cdot (10 - 1)$

c) Cada integrante do grupo envia um e-mail para todos os integrantes desse grupo, menos para ele próprio, ou seja, sendo n o número de pessoas do grupo, o número de e-mails enviados será: $n \cdot (n - 1)$

d) $n \cdot (n - 1) = 132$

$n^2 - n = 132$

$n^2 - n - 132 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$n = \frac{1 \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n = 12$ ou $n = -11$ (não serve)

Portanto, no grupo há 12 integrantes.

Comentário: Essa atividade, assim como os exercícios **7** e **8**, conduzem os alunos, de maneira informal, ao raciocínio combinatório por meio da aplicação do princípio multiplicativo. A resolução da equação do 2º grau para a obtenção do zero de uma função quadrática, que modela uma situação da Combinatória, passa a ser vista pelos alunos como ferramenta útil na resolução de problemas.

6. a) A área A do piso compreende a área de quatro quadrados de lado x, de dois retângulos de largura x e comprimento 12 m e de dois retângulos de largura x e comprimento 20 m. Então:

$A = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 12 \cdot x + 2 \cdot 20 \cdot x$

$A = 4x^2 + 64x$

b) Para $x = 3$, temos:

$A = 4 \cdot 3^2 + 64 \cdot 3 \Rightarrow A = 228$

Portanto, a área será 228 m².

7. Seja x o número de times.

Como cada time jogou duas vezes com cada um dos outros, temos que a expressão que representa o número de jogos é: $x \cdot (x - 1)$

Sabendo que houve 56 jogos, temos:

$x \cdot (x - 1) = 56 \Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 8$ ou $x = -7$ (não serve)

Portanto, eram 8 times.

8.

Número de lados do polígono (n)	Número de diagonais do polígono (d)
3	0
4	2
5	5
6	9
⋮	⋮
n	$\frac{n \cdot (n - 1)}{2} - n$

$d = \frac{n \cdot (n - 1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n - 1) - 2n}{2} =$

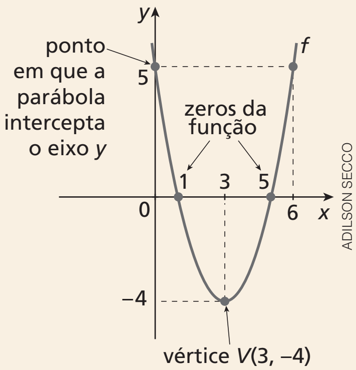
$= \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

Logo: $d = \frac{n \cdot (n - 1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

9. a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

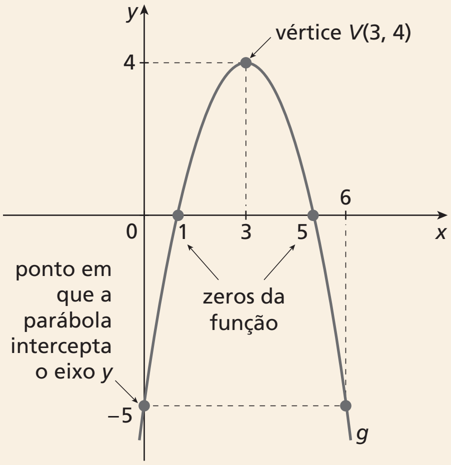
Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

x	$y = f(x)$
0	5
1	0
3	−4
5	0
6	5



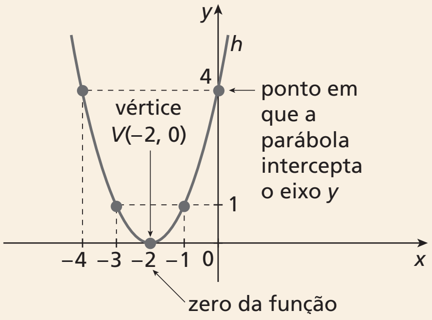
b) $g(x) = -x^2 + 6x - 5$
Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

x	$y = g(x)$
0	−5
1	0
3	4
5	0
6	−5



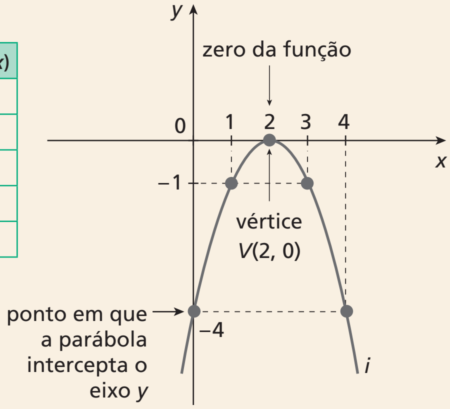
c) $h(x) = x^2 + 4x + 4$
Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

x	$y = h(x)$
0	4
−1	1
−2	0
−3	1
−4	4



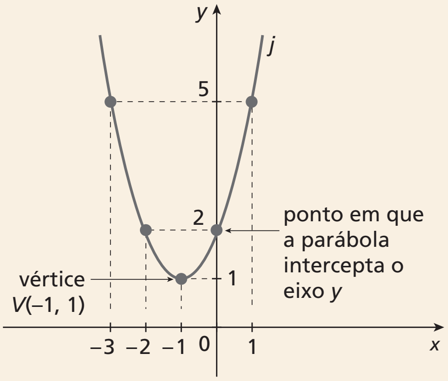
d) $i(x) = -x^2 + 4x - 4$
Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

x	$y = i(x)$
0	−4
1	−1
2	0
3	−1
4	−4



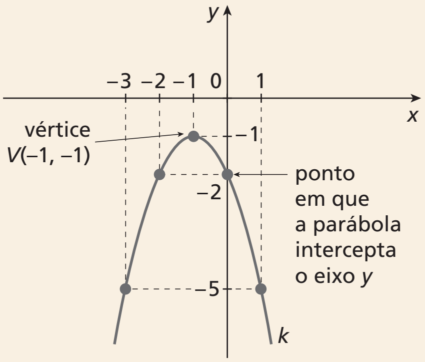
e) $j(x) = x^2 + 2x + 2$
Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

x	$y = j(x)$
−3	5
−2	2
−1	1
0	2
1	5



f) $k(x) = -x^2 - 2x - 2$
Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

x	$y = k(x)$
−3	−5
−2	−2
−1	−1
0	−2
1	−5



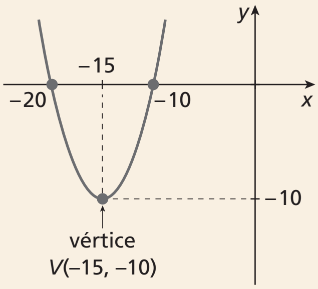
-

Concavidade voltada para cima ($a > 0$)	Concavidade voltada para baixo ($a < 0$)
f, *h* e *j*	*g*, *i* e *k*

Dois zeros da função	Um zero da função	Nenhum zero da função
f e *g*	*h* e *i*	*j* e *k*

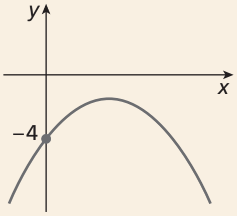
Comentário: Ao final do exercício, incentivar os alunos a pensar sobre o máximo e o mínimo de uma função quadrática, explorados durante a determinação do vértice.

10. a)

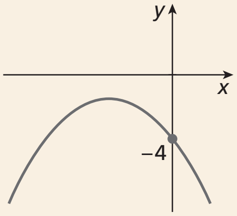


Concavidade voltada para cima.

b)



ou



Concavidade voltada para baixo.
Observe que, como passa por $(0, -4)$, se a concavidade fosse voltada para cima, a função apresentaria dois zeros, o que não é o caso.

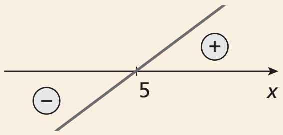
11. a) $f(x) = kx^2 - 2x + 10$
Para o gráfico ter a concavidade voltada para cima, o coeficiente de x^2 deve ser positivo: $k > 0$
Para o gráfico ter a concavidade voltada para baixo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo: $k < 0$

b) $f(x) = \left(\dfrac{k-5}{k+1}\right)x^2 - 20$

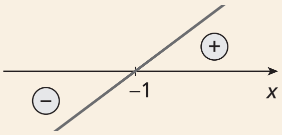
Concavidade para cima:
$$\frac{k-5}{k+1} > 0$$
Concavidade para baixo:
$$\frac{k-5}{k+1} < 0$$
Sejam $f(k) = k - 5$ e $g(k) = k + 1$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

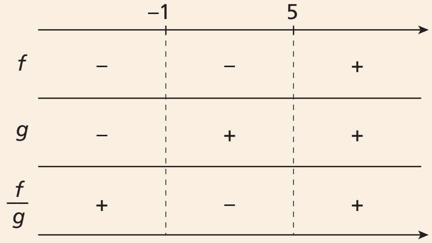
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



f	–	–	+
g	–	+	+
$\frac{f}{g}$	+	–	+

Então:

- se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
- se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

Comentário: No item **b**, pode-se retomar o conceito de inequação-quociente.

12. Respostas possíveis:

a) Esses pontos não são suficientes, pois, por eles, não visualizamos a região da parábola próxima do vértice nem a concavidade da parábola.

b) Vamos determinar os pontos em que $f(x) = 2$:

$$\frac{1}{100}x^2 - 2x + 2 = 2$$

$$\frac{1}{100}x^2 - 2x = 0$$

$$x\left(\frac{x}{100} - 2\right) = 0$$

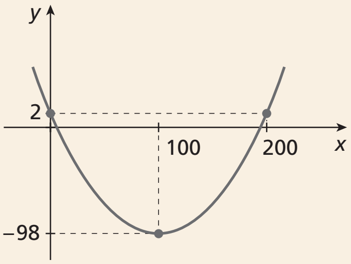
$x = 0$ ou $x = 200$

Vamos determinar o ponto em que $x = 100$:

$$f(100) = \frac{1}{100} \cdot 100^2 - 2 \cdot 100 + 2$$

$f(100) = -98$

x	$y = f(x)$
0	2
100	−98
200	2



c) Esses pontos foram escolhidos porque os pontos de ordenada $y = c$ têm abscissas 0 e $-\frac{b}{a}$, cuja média aritmética é a abscissa do vértice.

d) Se os zeros da função fossem conhecidos, bastaria saber onde é o vértice e o ponto $(0, c)$, no qual a parábola intercepta o eixo y.

Comentário: Espera-se que os alunos, ao resolver essas questões, percebam a não eficiência do processo de atribuir pontos aleatoriamente para a construção do gráfico de algumas funções quadráticas. É importante que investiguem, atribuindo outros pontos, para descobrir se existem pontos convenientes e se estes auxiliam na construção da parábola procurada.

13. **a)** $f(x) = -2x^2 + x - 1$

A parábola intercepta o eixo y quando $x = 0$.

$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$

Logo, a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -1)$.

b) $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

$f(0) = \frac{0^2}{3} - \frac{0}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

As coordenadas do ponto no qual a parábola intercepta o eixo y são $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

c) $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(0) = 0^2 + 0 = 0$

As coordenadas do ponto no qual a parábola intercepta o eixo y são $(0, 0)$.

- resposta pessoal

Comentário: A pergunta apresentada no fim da questão tem por objetivo fazer com que os alunos percebam a importância do ponto $(0, c)$, que intercepta o eixo y, pois ele pode ser usado como referência para a obtenção do vértice da parábola.

14. **a)** $g(x) = x^2 + 3x + 2$

Vamos resolver a equação: $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ e } x_2 = -1$$

Os zeros da função são -2 e -1.

b) $g(x) = 2x^2 + x + 1$

Vamos resolver a equação: $2x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7 < 0$

Como $\Delta < 0$, a função não tem zeros reais.

c) $g(x) = -9x^2 + 6x - 1$

Vamos resolver a equação: $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$$

O zero da função é $\frac{1}{3}$.

- resposta pessoal

Comentário: Espera-se que os alunos percebam a importância dos zeros da função na construção do respectivo gráfico.

15. Para que uma função não tenha zeros, seu discriminante deve ser negativo.

a) $h(x) = kx^2 - x + 25$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot k \cdot 25 = 1 - 100k$

$1 - 100k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{100}$

b) $h(x) = 2x^2 - 5x + k$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 25 - 8k$

$25 - 8k < 0 \Rightarrow k > \frac{25}{8}$

16. $f(x) = ax^2 + bx + 3$

a) Como 1 e 3 são zeros da função, temos que os pontos em que a parábola intercepta o eixo x são $(1, 0)$ e $(3, 0)$. Assim:

$f(1) = 0$ e $f(3) = 0$

$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 \Rightarrow a + b + 3 = 0$ (I)

$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 \Rightarrow 9a + 3b + 3 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -4$$

b) Como -1 e -3 são zeros da função, temos que os pontos em que a parábola intercepta o eixo x são $(-1, 0)$ e $(-3, 0)$. Assim:

$f(-1) = 0$ e $f(-3) = 0$

$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b + 3 = 0$ (I)

$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 3 \Rightarrow$

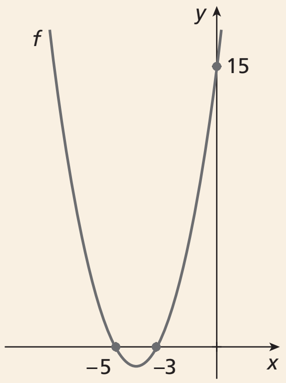
$\Rightarrow 9a - 3b + 3 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a - 3b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 4$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

17. a)



A parábola intercepta o eixo y no ponto (0, 15). Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo:

$f(x) = ax^2 + bx + 15$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Notamos também que a parábola intercepta o eixo x nos pontos $(-5, 0)$ e $(-3, 0)$. Então:

$f(-5) = 0$ e $f(-3) = 0$

$f(-5) = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25a - 5b + 15 = 0$ (I)

$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 15 \Rightarrow$

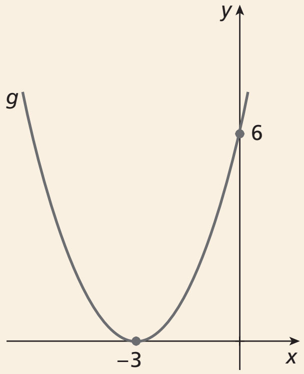
$\Rightarrow 9a - 3b + 15 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} 25a - 5b + 15 = 0 \\ 9a - 3b + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 8$$

Portanto, a lei da função é $f(x) = x^2 + 8x + 15$.

b)



A parábola intercepta o eixo y no ponto (0, 6). Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo:

$g(x) = ax^2 + bx + 6$, com $a, b \in \mathbb{R}$

A parábola intercepta o eixo x em um único ponto, de coordenadas $(-3, 0)$; então, -3 é o zero da função.

$g(-3) = 0$

$g(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9a - 3b + 6 = 0$ (I)

Como a parábola intercepta o eixo x em um único ponto, temos $\Delta = 0$. Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot 6 = 0 \Rightarrow b^2 = 24a \Rightarrow a = \dfrac{b^2}{24}$ (II)

Substituindo a equação (II) na equação (I), obtemos:

$$9 \cdot \left(\frac{b^2}{24}\right) - 3b + 6 = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}b^2 - 3b + 6 = 0$$

Resolvendo essa equação, encontramos $b = 4$.

Pela equação (II), temos: $a = \dfrac{4^2}{24} = \dfrac{2}{3}$

Portanto, a lei da função é: $g(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

18. Como a parábola tangencia o eixo x, a função f, tal que $f(x) = 2x^2 - cx + (c - 2)$, tem um zero real duplo; então:

$\Delta = 0$

$\Delta = c^2 - 8(c - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 - 8c + 16 = 0 \Rightarrow (c - 4)^2 = 0 \Rightarrow c = 4$

Logo, $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ e

$f(2) = 8 - 8 + 2 = 2$.

Portanto, $f(f(2)) = f(2) = 2$.

19. Os gráficos de f e g não têm pontos comuns se $f(x) = g(x)$ não admitir soluções ($\Delta < 0$).

$x^2 - 5x + b = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 7x + b - 1 = 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow 49 - 4(b - 1) < 0 \Rightarrow b > \dfrac{53}{4}$

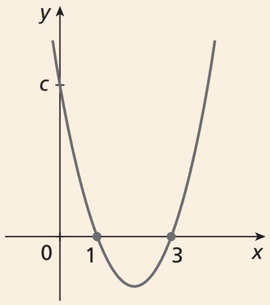
20. $f(x) = -mx^2 + 2m^2$

- Como o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo, sabemos que o coeficiente de x^2 é negativo, ou seja:
  $-m < 0 \Rightarrow m > 0$
- O gráfico de f intercepta o eixo y em (0, 18); então, o coeficiente $c = 2m^2$ é igual a 18. Logo:
  $2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow$
  $\Rightarrow m = 3$ ou $m = -3$
  Como $m > 0$, temos $m = 3$.
- Como $m = 3$, $f(x) = -3x^2 + 18$. O gráfico intercepta o eixo x quando $y = 0$; então:
  $-3x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$
  Portanto, os pontos são $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{6}, 0\right)$.

21. Na primeira pergunta, é importante os alunos perceberem que o ponto de intersecção da parábola com o eixo y tem não só ordenada igual ao coeficiente c, mas abscissa nula, ou seja, $f(0) = c$. Por isso, o procedimento justifica-se.

Respostas possíveis para os itens I, II e III:

I.



$f(x) = x^2 - 4x - c$

II. Observando o gráfico, a parábola cruza o eixo y quando $x = 0$.

III. $f(x) = x^2 - 4x + c$
$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + c$
$f(0) = c$

Comentário: Espera-se que os alunos percebam que a ordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y é o coeficiente c da lei da função quadrática que corresponde a essa parábola.

A princípio, essa é uma questão aberta, uma vez que se pede aos alunos que argumentem livremente sobre o ponto de intersecção do eixo y com o gráfico de uma função quadrática qualquer. Depois, os alunos são conduzidos a seguir passos procedimentais para confrontar a argumentação que fizeram anteriormente com a conclusão decorrente desses passos, isto é, que o ponto de intersecção é $(0, c)$.

22. Como essa atividade é de caráter investigativo, muitas são as relações possíveis para o estabelecimento de conclusões. A seguir, são apresentados exemplos de argumentos.

a) Sabendo que não há zeros da função e a parábola intercepta o eixo y no ponto (0, 5), concluímos que toda a parábola está acima do eixo x. Ou seja, para qualquer valor real de x, temos $f(x)$ positivo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Sabendo que $(-5, 0)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo x e a concavidade da parábola é voltada para baixo, concluímos que toda a parábola, com exceção do ponto $(-5, 0)$, está abaixo do eixo x. Ou seja, não há valor real de x para o qual o valor de $f(x)$ seja positivo.

c) Se $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x e $(0, 3)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que qualquer x real que esteja no intervalo $]-3, 3[$ tem o valor de $f(x)$ correspondente positivo.

d) Se $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x e $(0, -2)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que $f(x)$ é positivo para $-2 < x < -1$.

e) A função cuja lei é $f(x) = x^2 - 6x + 13$ não tem zeros reais $(\Delta < 0)$ e, como a parábola dessa função intercepta o eixo y no ponto $(0, 13)$, concluímos que a concavidade é voltada para cima. Então, para qualquer x real, o valor de $f(x)$ correspondente é positivo.

Comentário: O objetivo aqui é apresentar um problema em que os alunos sintam a necessidade de aprender os procedimentos do estudo do sinal de uma função, que será o próximo assunto.

23. a) $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$

Primeiro, determinamos os zeros da função g:

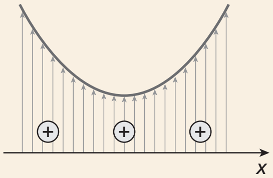
$2x^2 + 3x + 7 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47 < 0$

Como o discriminante é negativo, a parábola não intercepta o eixo x.

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Esboço do gráfico



Então, $g(x) > 0$ para qualquer valor de x real.

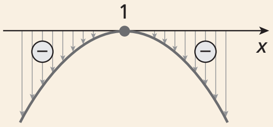
b) $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

Zeros da função h:

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico



$$\text{Então: } \begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$$

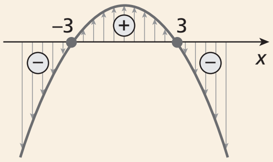
c) $i(x) = -x^2 + 9$

Zeros da função i:

$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Esboço do gráfico



$$\text{Então: } \begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

Comentário: Ao chegar a essa parte do capítulo, os alunos já trabalharam bastante com gráficos de função quadrática; assim, seria interessante, se possível, que eles experimentassem um *software* de construção de gráficos.

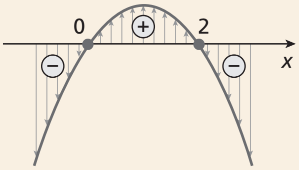
24. a) $f(x) = -x^2 + 2x$

Zeros da função f:

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico



Então, f é positiva para $0 < x < 2$.

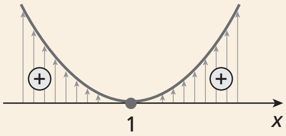
b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$

Zeros da função g:

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Rightarrow x = 1$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Esboço do gráfico



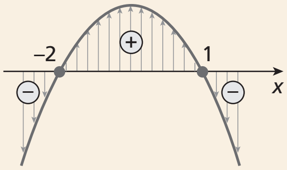
Logo, a função g é positiva para qualquer $x \neq 1$.

25. a) $y > 0$ para $-2 < x < 1$ (gráfico acima do eixo x)

$y = 0$ para $x = -2$ ou $x = 1$ (pontos de intersecção com o eixo x)

$y < 0$ para $x < -2$ ou $x > 1$ (gráfico abaixo do eixo x)

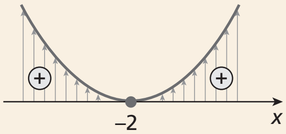
Esboço do gráfico



b) $y > 0$ para $x \neq -2$ (gráfico acima do eixo x)

$y = 0$ para $x = -2$ (ponto de intersecção com o eixo x)

Esboço do gráfico



26. Respostas possíveis:

a) $j_1(x) = x^2 - 3$

$j_2(x) = 2x^2 + 2$

$j_3(x) = -2x^2 - 1$

$j_4(x) = x^2 + 1$

$j_5(x) = x^2 - 1$

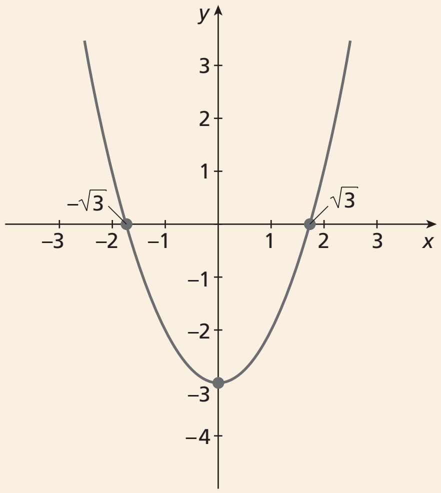
$j_6(x) = -x^2 + 1$

$j_7(x) = -x^2 - 1$

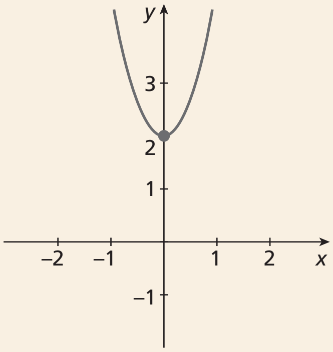
$j_8(x) = -3x^2 + 3$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

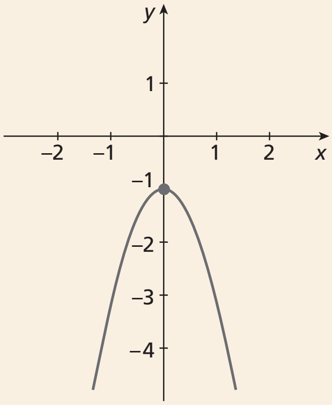
b) $j_1(x) = x^2 - 3$



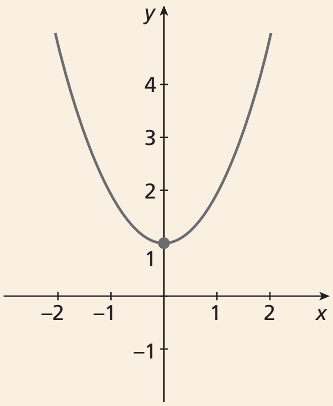
$j_2(x) = 2x^2 + 2$



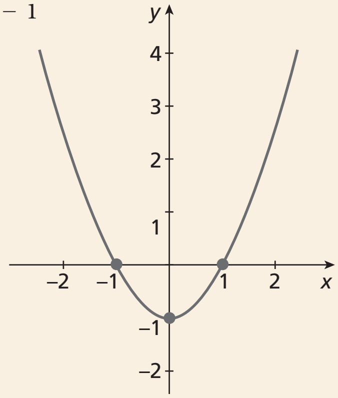
$j_3(x) = -2x^2 - 1$



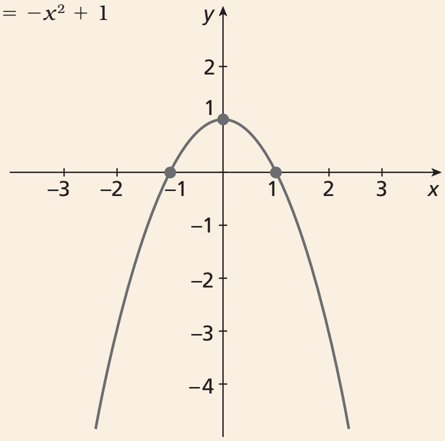
$j_4(x) = x^2 + 1$



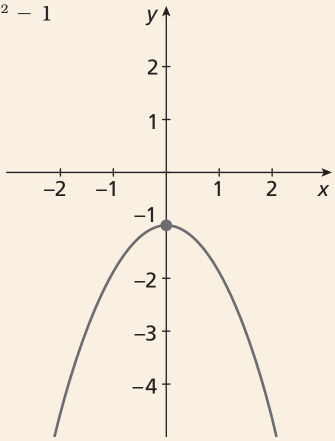
$j_5(x) = x^2 - 1$



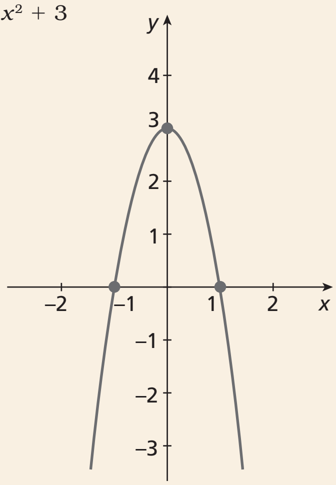
$j_6(x) = -x^2 + 1$



$j_7(x) = -x^2 - 1$



$j_8(x) = -3x^2 + 3$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

c) Comparando cada uma das leis com seu respectivo gráfico, percebe-se que uma função do tipo da função *j* tem dois zeros reais quando os coeficientes a e c possuem sinais distintos.

d) Da mesma forma, percebe-se que uma função do tipo da função *j* não tem zeros quando os coeficientes a e c possuem sinais iguais.

e) Espera-se que os alunos percebam que uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, tem o seguinte comportamento:

$a > 0$	
$c > 0$	$c < 0$
Nesse caso, a função *j* é estritamente positiva.	Considerando que x_1 e x_2 são raízes de *j*, com $x_1 < x_2$, a função *j* é: • positiva nos intervalos $]-\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$; • negativa no intervalo $]x_1, x_2[$. Exemplo: casos $j_1(x)$ e $j_5(x)$ do item **b**.

$a < 0$	
$c < 0$	$c > 0$
Nesse caso, a função *j* é estritamente negativa.	Considerando que x_1 e x_2 são raízes de *j*, com $x_1 < x_2$, a função *j* é: • negativa nos intervalos $]-\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$; • positiva no intervalo $]x_1, x_2[$. Exemplo: casos $j_6(x)$ e $j_8(x)$ do item **b**.

Comentário: Esse exercício pode ser feito em duplas. A troca dos gráficos esboçados tem como objetivo levar os alunos à percepção da relação entre os coeficientes a e c da lei da função quadrática dada por $j(x) = ax^2 + c$ e seu gráfico. A troca de respostas e a discussão de estratégias para realizar o estudo do sinal de uma função permite aos alunos praticar a oralidade e desenvolver a habilidade de argumentação.

27. a) $h(x) = -x^2 - 2x + 8$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (8) = 4 + 32 = 36$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = -1$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = 9$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-1, 9)$.

b) $i(x) = x^2 - 2x - 8$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(1, -9)$.

c) $j(x) = x^2 + 2x - 3$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 1} = -4$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-1, -4)$.

d) $k(x) = x^2 - 4x + 4$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-0}{4} = 0$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(2, 0)$.

28. a) Como a função *h* tem concavidade voltada para baixo, seu valor máximo é o $y_V = 9$. Como as funções *i*, *j* e *k* têm concavidade voltada para cima, não possuem valor máximo.

b) Como as funções *i*, *j* e *k* têm concavidade voltada para cima, seus valores mínimos são seus *y* do vértice, que são, respectivamente, -9, -4 e 0. A função *h* não tem valor mínimo, pois sua concavidade está voltada para baixo.

c) Para que a função tenha valor máximo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo ($a < 0$).

Para que a função tenha valor mínimo, o coeficiente de x^2 deve ser positivo ($a > 0$).

Comentário: Pela análise das funções apresentadas no exercício anterior, espera-se que os alunos identifiquem as características das parábolas que permitirão responder a essas questões. Essa atividade introduz os conceitos de valor máximo e valor mínimo, assuntos que serão explorados adiante.

No item **c**, espera-se que os alunos percebam que:

- a concavidade determinará se a função terá valor mínimo ($a > 0$) ou valor máximo ($a < 0$);
- o valor máximo ou mínimo será igual a y_V em cada função.

29. a) Um dos zeros é $x_1 = 0$.

Sabe-se que x_V é equidistante dos zeros da função e, nesse caso, $x_V = 4$.

Assim: $x_V - x_1 = x_2 - x_V \Rightarrow 4 - 0 = x_2 - 4 \Rightarrow x_2 = 8$

Logo, os zeros da função são $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$.

b) Seja $h(x) = ax^2 + bx + c$

$h(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (I)

$h(8) = 0 \Rightarrow 64a + 8b + c = 0 \Rightarrow 64a + 8b = 0$ (II)

$h(4) = 5 \Rightarrow 16a + 4b + c = 5 \Rightarrow 16a + 4b = 5$ (III)

Dividindo a equação (II) por 8, obtemos:

$8a + b = 0 \Rightarrow b = -8a$

Substituindo b por $-8a$ na equação (III), obtemos:

$$16a + 4 \cdot (-8a) = 5 \Rightarrow -16a = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{16}$$

Como $b = -8a$, então: $b = -8 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right) \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

Assim, a lei dessa função é $h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$.

30. $f(x) = -(m - 1)x^2 + 2x + n$

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (2, 5)$$

$$x_V = \frac{-2}{-2(m-1)} = 2 \Rightarrow 2(m-1) = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

Então, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + n$.

Agora:

$$y_V = \frac{-\left(4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot n\right)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = 5 \Rightarrow \frac{4 + 2n}{2} = 5 \Rightarrow n = 3$$

Logo, devemos ter $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$.

31. **a)** Uma característica comum entre as coordenadas do vértice das duas funções é que $x_V = 0$. É interessante que os alunos percebam, com esse caso particular, que em uma função do tipo $h(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$, sempre ocorrerá $x_V = 0$ e $y_V = c$.

b) Temos: $h(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ e $b = 0$

Assim: $x_V = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow x_V = 0$, pois $b = 0$

Para encontrar y_V, basta calcular $f(x_V)$. Nesse caso:
$h(0) = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow h(0) = c$
Portanto, o vértice tem coordenadas $(0, c)$.

32. **a)** $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

Como $a > 0$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima. Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)]}{4 \cdot 2} = -\frac{81}{8}$$

Assim, $-\dfrac{81}{8}$ é o mínimo da função f.

b) $h(x) = -\sqrt{5}\,x^2 - 5x + 1$

Como $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo. Portanto, a função tem valor máximo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-5)^2 - 4 \cdot \left(-\sqrt{5}\right) \cdot 1\right]}{4 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)} = \frac{5\sqrt{5} + 4}{4}$$

Assim, $\dfrac{5\sqrt{5} + 4}{4}$ é o valor máximo da função h.

c) $n(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{4}$

Como $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{7}{18}$$

Assim, $\dfrac{7}{18}$ é o valor mínimo da função n.

33. **a)** $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(25 - 4)}{4 \cdot 1} = -\dfrac{21}{4}$

A concavidade está voltada para cima; portanto, y_V é ponto de mínimo. Então:

$$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$$

b) $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(9 + 56)}{4 \cdot (-2)} = \dfrac{65}{8}$

A concavidade está voltada para baixo; portanto, y_V é ponto de máximo. Então:

$$\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{65}{8}\right\}$$

c) $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(0 + 96)}{4 \cdot (-3)} = 8$

A concavidade está voltada para baixo; portanto, y_V é ponto de máximo. Então:
$\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

34. **a)** $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 16\}$
A imagem indica que $y \leqslant 16$; então, concluímos que a função tem valor máximo.

b) Se a função tem valor máximo, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

c) $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = 16$
$-\Delta = 64a$
$-(64 - 48a) = 64a$
$a = -4$

d) $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$
$g(x) = -4x^2 + 8x + 12$
$x_V = \dfrac{-8}{-8} = 1$ e $y_V = 16$
Logo, $V(1, 16)$.

35. $f(x) = 3x^2 + 2mx + m$

Se $\dfrac{4}{3}$ é o valor mínimo da função, então a parábola tem concavidade voltada para cima e $y_V = \dfrac{4}{3}$. Assim:

$$\frac{4}{3} = \frac{-\Delta}{4a}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{-[(2m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m]}{4 \cdot 3}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{-4m^2 + 12m}{12}$$
$m^2 - 3m + 4 = 0$
O discriminante dessa equação é -7, ou seja, é negativo.

Logo, não existe m real tal que $\dfrac{4}{3}$ seja o valor mínimo de f.

36. Como os vértices das parábolas são simétricos em relação aos eixos, temos:

$V_g = \left(2, \dfrac{3}{2}\right)$; $V_f = \left(-2, \dfrac{3}{2}\right)$; $V_h = \left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ e

$V_i = \left(2, -\dfrac{3}{2}\right)$

Distância entre V_g e V_i: $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = 3$

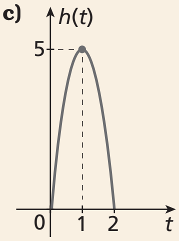
Distância entre V_g e V_f: $2 + 2 = 4$

Portanto: $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h = 3 \cdot 4 = 12$

37. **a)** $y_V = 5$ (valor máximo atingido)
$y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$
Mas, como $c = 0$, temos:
$y_V = \dfrac{-b^2}{4a} = 5 \Rightarrow -b^2 = 20a \Rightarrow b^2 = -20a$ (I)
$x_V = 1$ (tempo para atingir a altura máxima)
$x_V = \dfrac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$ (II)
Substituindo (II) em (I), obtemos:
$(-2a)^2 = -20a \Rightarrow 4a^2 + 20a = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a \cdot (a + 5) = 0 \Rightarrow a = -5$ ou $a = 0$ (não serve)
Portanto, $a = -5$ e $b = 10$, e a lei dessa função é $h(t) = -5t^2 + 10t$.

b) $h(2) = -5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 0$
A altura é 0 m.

c)



ADILSON SECCO

d) Pelo gráfico, percebemos que o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

Comentário: É interessante trabalhar uma questão interdisciplinar como essa (há outras ao longo da obra, como os exercícios **41** e **42**) com o professor de Física. Assim, os alunos atingem uma dimensão superior no entendimento desse e de outros fenômenos físicos.

38. **a)** O custo de produção de 100 t de balas é dado por:

$$c(100) = \frac{100^2}{10.000} - \frac{100}{10} + 30 \Rightarrow c(100) = 21$$

Logo, o custo é igual a R$ 21,00 por quilograma.

b) Da mesma forma:

$$c(200) = \frac{200^2}{10.000} - \frac{200}{10} + 30 \Rightarrow c(200) = 14$$

Logo, o custo é igual a R$ 14,00 por quilograma.

c) Espera-se que os alunos percebam que essa afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de um quilograma de balas está relacionado com o número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.

d) Como a função que determina o custo é quadrática, com $a > 0$, o custo mínimo é dado por x_V. Assim:

$$x_V = \frac{-\left(-\frac{1}{10}\right)}{2 \cdot \frac{1}{10.000}} \Rightarrow x_V = 500$$

Logo, o custo mínimo, por quilograma, é obtido quando se produzem 500 toneladas de balas.

e) O valor do custo mínimo é dado por:

$$c(500) = \frac{500^2}{10.000} - \frac{500}{10} + 30 \Rightarrow c(500) = 5$$

Logo, o custo mínimo é igual a R$ 5,00.

39. **a)** $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$

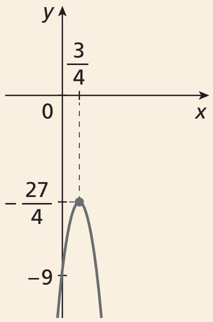
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -108 < 0$.

Coeficiente c: -9

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-4)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-108)}{4 \cdot (-4)} = -\frac{108}{16} = -\frac{27}{4}$$

Vértice: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{4}\right)$



b) $g(x) = x^2 + 6x$

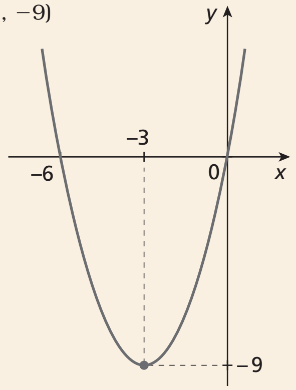
Zeros da função: -6 e 0

Coeficiente c: 0

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$$

Vértice: $(-3, -9)$



c) $h(x) = \frac{3x^2}{5} + x + 5$

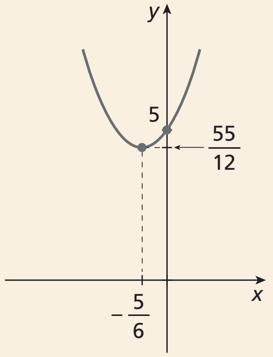
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -11 < 0$.

Coeficiente c: 5

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{3}{5}} = -\frac{5}{6}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-11)}{4 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{55}{12}$$

Vértice: $\left(-\frac{5}{6}, \frac{55}{12}\right)$



d) $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$

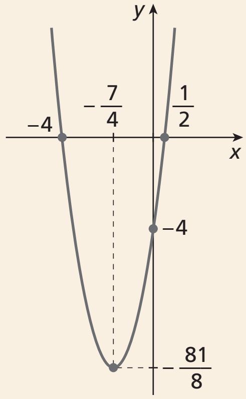
Zeros da função: -4 e $\frac{1}{2}$

Coeficiente c: -4

$$x_V = \frac{-b}{2a} = -\frac{7}{4}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{81}{8}$$

Vértice: $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{81}{8}\right)$



e) $j(x) = x^2 + 3$

Zeros da função: não há, pois $\Delta = -12 < 0$.

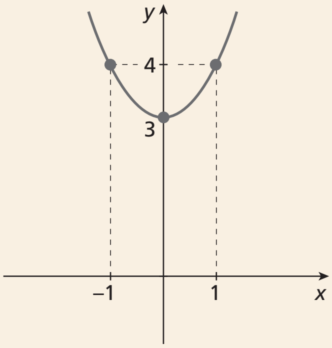
Coeficiente c: 3

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2} = 0$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-12)}{4} = 3$$

Até agora temos apenas o vértice $V(0, 3)$.

Nesse caso, vamos determinar as coordenadas de mais dois pontos, $j(1)$ e de seu simétrico $j(-1)$: $j(1) = j(-1) = 4$. Logo, a parábola passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(-1, 4)$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

f) $l(x) = -2x^2 - 2$

Zeros da função: não há, pois $\Delta = -16 < 0$.

Coeficiente c: -2

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-2)} = 0$$

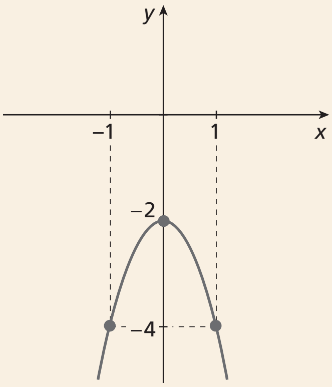
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-16)}{4(-2)} = -2$$

Até agora temos apenas o vértice $V(0, -2)$.

Vamos determinar as coordenadas de mais dois pontos, $l(1)$ e de seu simétrico $l(-1)$:

$l(1) = l(-1) = -4$

Logo, a parábola passa pelos pontos $(1, -4)$ e $(-1, -4)$.



40. a) Seja x o valor do aumento, em real. Então, a sentença que apresenta o número de usuários em função da quantidade de reais que se aumenta na mensalidade é $60.000 - 400x$.

b) Sendo x o valor do aumento, então a sentença que determina o valor de uma mensalidade, em real, em função do aumento é $75 + x$.

c) Atualmente, a empresa arrecada um total de 4.500.000 reais $(60.000 \cdot 75)$ com as mensalidades.

Indicando por x o aumento (em real) na mensalidade, sabemos que a empresa perderá $400x$ assinantes. Assim, a função que determina o faturamento mensal (em real) é dada por:

$y = (60.000 - 400x) \cdot (75 + x)$

$y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

d) Para determinar o aumento do faturamento máximo, devemos calcular o valor x_V dessa função:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-30.000}{2 \cdot (-400)} = 37{,}5$$

Logo, o aumento deve ser de R$ 37,50 para que a arrecadação mensal seja máxima.

e) Arrecadação máxima: $y_V = f(37{,}50)$

$f(37{,}50) = 4.500.000 + 30.000 \cdot 37{,}50 - 400(37{,}50)^2$

$f(37{,}50) = 5.062.500$

A arrecadação máxima, em um mês, será R$ 5.062.500,00.

f) Valor da mensalidade com o aumento:

$p = 75{,}00 + 37{,}50 = 112{,}50$

Número de assinantes para arrecadação máxima:

$$\frac{5.062.500}{112{,}50} = 45.000$$

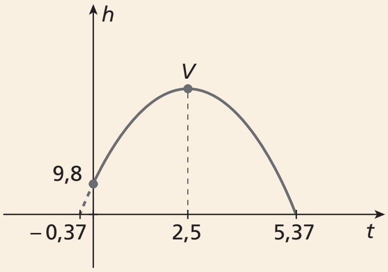
Logo, a empresa deverá ter 45.000 assinantes.

41. Vamos construir o gráfico correspondente à função $h(t) = -4{,}9t^2 + 24{,}5t + 9{,}8$

Zeros da função: $-0{,}37$ e $5{,}37$ (aproximadamente)

Coeficiente c: $9{,}8$

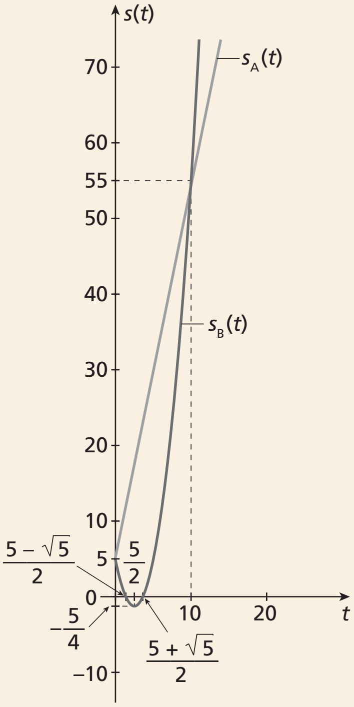
$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-24{,}5}{2 \cdot (-4{,}9)} = 2{,}5$$



Portanto, o projétil está subindo no intervalo de 0 s a 2,5 s e descendo no intervalo de 2,5 s a 5,37 s, aproximadamente.

42. Esboçando os gráficos de $s_A(t)$ e $s_B(t)$, para $t \geqslant 0$, em um mesmo plano cartesiano é possível visualizar algumas informações importantes.

$s_A(t) = 5 + 5t$ e $s_B(t) = 5 - 5t + t^2$



$s_A(t)$ intercepta $s_B(t)$ em dois pontos, correspondentes a $s_A(t) = s_B(t)$. Vamos determiná-los:

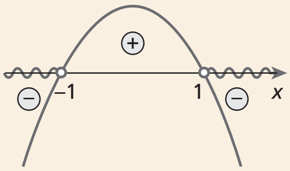
$s_A(t) = s_B(t) \Rightarrow 5 + 5t = 5 - 5t + t^2 \Rightarrow t^2 - 10t = 0$

Resolvendo essa última equação, encontramos $t = 0$ e $t = 10$, que são os valores de t para os quais os dois móveis estão emparelhados. Ou seja, os móveis estão no mesmo ponto no instante de partida e 10 s após ela, quando o móvel B passa à frente do móvel A. Para $0 < t < 10$, temos $s_A(t) > s_B(t)$. Portanto, o móvel A fica à frente do móvel B no intervalo $]0, 10[$.

43. a) $\underbrace{-x^2 + 1}_{f(x)} < 0$

Zeros de f:

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

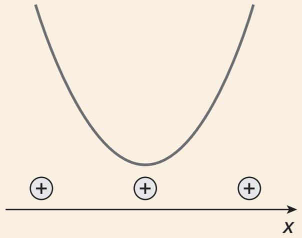


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) $\underbrace{2x^2 + 3x + 7}_{f(x)} \leq 0$

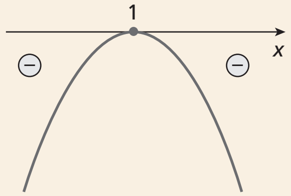
Zeros de f:
$2x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow \nexists\ x \in \mathbb{R}$, pois $\Delta = -47 < 0$



$S = \varnothing$

c) $\underbrace{-x^2 + 2x - 1}_{f(x)} \geq 0$

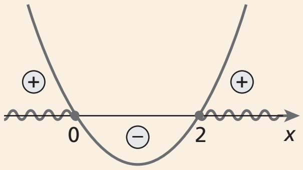
Zeros de f:
$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



$S = \{1\}$

d) $x^2 + 2(x - 4) - 1 \leq 2x^2 - 9 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x}_{f(x)} \geq 0$

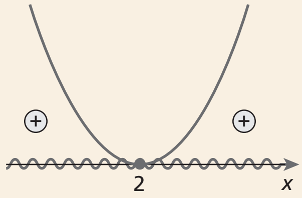
Zeros de f:
$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$

e) $x^2 - 4x \geq -4 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de f:
$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$



$S = \mathbb{R}$

f) $(-2x + 1)^2 > 0 \Rightarrow -2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{1}{2}\right\}$

Comentário: Nesse item, os alunos devem lembrar que qualquer número real ou expressão real, elevado ao quadrado, será sempre positivo ou nulo.

44. $f(x) = 2x^2 + 1$ — $g(x) = x^2 + 2x + 1$

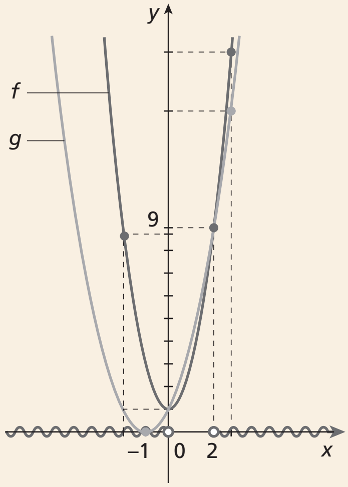
Zeros de f: não há — Zero de g: -1

Coeficiente c de f: 1 — Coeficiente c de g: 1

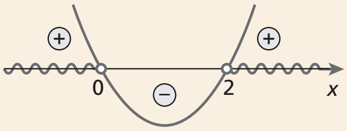
Vértice de f: (0, 1) — Vértice de g: $(-1, 0)$

Ponto de encontro entre f e g: $f(x) = g(x)$

$$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 1 \\ \text{ou} \\ x = 2 \text{ e } y = 9 \end{cases}$$



Do gráfico, temos:
$f(x) > g(x)$, quando $x < 0$ ou $x > 2$, com $x \in \mathbb{R}$
Por outro lado:
$f(x) > g(x) \Rightarrow 2x^2 + 1 > x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x > 0$
$h(x) = x^2 - 2x$ (zeros de h: 0 e 2)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$
Dessa forma, percebemos que as soluções são iguais.

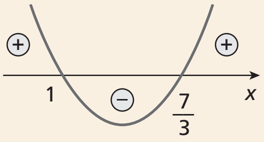
45. Nessa questão, é importante relembrar a necessidade do quadro de sinais para a resolução das inequações-produto e inequações-quociente, assim como a importância de estabelecer o domínio da função para a inequação-quociente.

a) $\overbrace{(3x^2 - 10x + 7)}^{f(x)}\overbrace{(-x^2 + 4x)}^{g(x)} \geq 0$

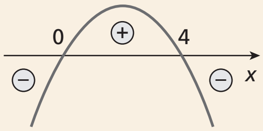
Zeros de f: 1 e $\dfrac{7}{3}$

Zeros de g: 0 e 4

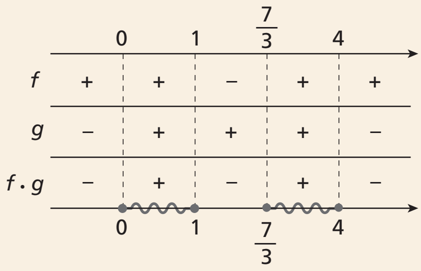
Sinal de f



Sinal de g



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO


Quadro de sinais

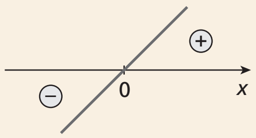
		0		1		$\frac{7}{3}$		4	
f	+		+		−		+		+
g	−		+		+		+		−
f · g	−		+		−		+		−

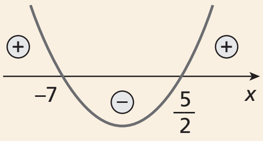
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$$

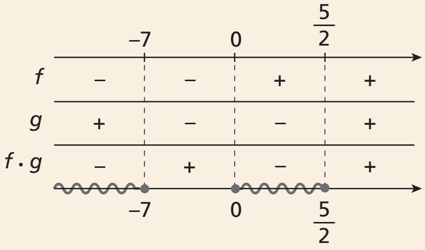
b) $2x^3 + 9x^2 - 35x \leqslant 0 \Rightarrow \overbrace{x}^{f(x)}\overbrace{(2x^2 + 9x - 35)}^{g(x)} \leqslant 0$

Zero de f: 0

Zeros de g: $\frac{5}{2}$ e -7


Sinal de f


Sinal de g


Quadro de sinais

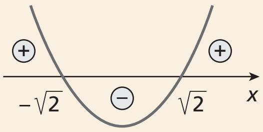
		−7		0		$\frac{5}{2}$	
f	−		−		+		+
g	+		−		−		+
f · g	−		+		−		+

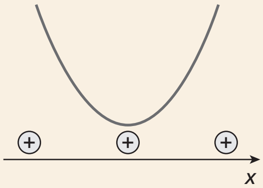
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$$

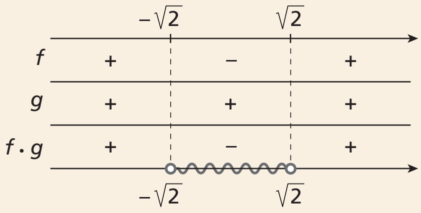
c) $x^4 - 4 < 0 \Rightarrow \overbrace{(x^2 - 2)}^{f(x)} \cdot \overbrace{(x^2 + 2)}^{g(x)} < 0$

Zeros de f: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

g não tem zeros


Sinal de f


Sinal de g


Quadro de sinais

		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f	+		−		+
g	+		+		+
f · g	+		−		+

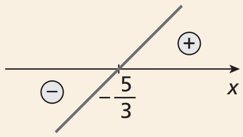
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$$

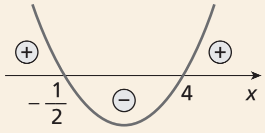
d) $\dfrac{\overbrace{3x + 5}^{f(x)}}{\underbrace{2x^2 - 7x - 4}_{g(x)}} \leqslant 0$

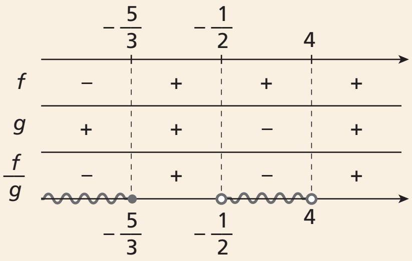
Zero de f: $-\frac{5}{3}$

Zeros de g: $-\frac{1}{2}$ e 4

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$ e $x \neq 4$


Sinal de f


Sinal de g


Quadro de sinais

		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{1}{2}$		4	
f	−		+		+		+
g	+		+		−		+
$\frac{f}{g}$	−		+		−		+

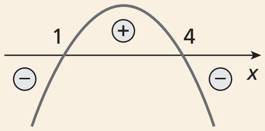
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\right\}$$

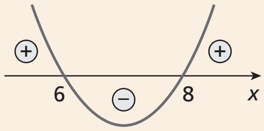
e) $\dfrac{\overbrace{-x^2 + 5x - 4}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 - 14x + 48}_{g(x)}} \geqslant 0$

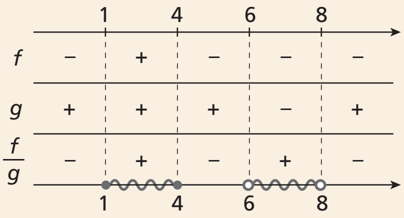
Zeros de f: 1 e 4

Zeros de g: 6 e 8

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 6$ e $x \neq 8$


Sinal de f


Sinal de g


Quadro de sinais

		1		4		6		8	
f	−		+		−		−		−
g	+		+		+		−		+
$\frac{f}{g}$	−		+		−		+		−

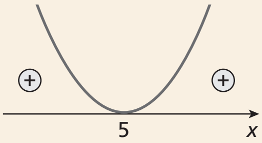
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

f) $-\dfrac{(x - 5)^2}{(-x + 5)^2} > 0 \Rightarrow \dfrac{\overbrace{(x - 5)^2}^{f(x)}}{\underbrace{(-x + 5)^2}_{g(x)}} < 0$

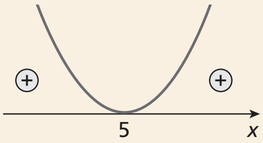
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Zero de f: 5
Zero de g: 5
Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		5	
f	+		+
g	+		+
$\frac{f}{g}$	+	○	+
		5	

S = ∅

Outra forma de resolver o item **f** é:
Note que: $(-x+5)^2 = [(-1)\cdot(x-5)]^2 = (x-5)^2$
Então:

$$-\frac{(x-5)^2}{(-x+5)^2} > 0 \Rightarrow -\frac{(x-5)^2}{(x-5)^2} > 0$$

Como D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$, temos:
$-1 > 0$ (falso)
Portanto, $S = \varnothing$.

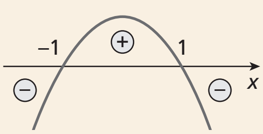
46. a) $-\frac{6}{x^2-4} \leqslant 2 \Rightarrow -\frac{6}{x^2-4} - 2 \leqslant 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-6-2(x^2-4)}{x^2-4} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-6-2x^2+8}{x^2-4} \leqslant 0 \Rightarrow$$

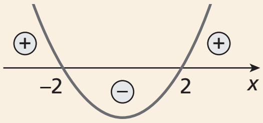
$$\Rightarrow \frac{\overbrace{2-2x^2}^{f(x)}}{\underbrace{x^2-4}_{g(x)}} \leqslant 0$$

Zeros de f: -1 e 1
Zeros de g: -2 e 2
Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ e $x \neq 2$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		−2		−1		1		2	
f	−		−		+		−		−
g	+		−		−		−		+
$\frac{f}{g}$	−	○	+	●	−	●	+	○	−
		−2		−1		1		2	

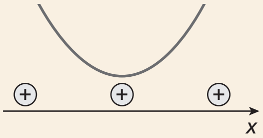
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $\frac{1}{-x} < \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow$

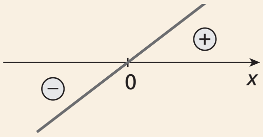
$$\Rightarrow \frac{x^2+2+2x}{2x} > 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{x^2+2x+2}^{f(x)}}{\underbrace{2x}_{g(x)}} > 0$$

f não tem zeros
Zero de g: 0
Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

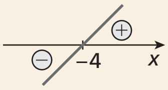
		0	
f	+		+
g	−		+
$\frac{f}{g}$	−	○	+
		0	

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

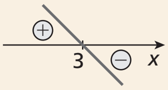
47. $$\frac{\overbrace{(2x+8)}^{f(x)}\overbrace{(-x+3)}^{g(x)}}{\underbrace{-x^2+1}_{h(x)}} \leqslant 0$$

Zero de f: -4
Zero de g: 3
Zeros de h: -1 e 1

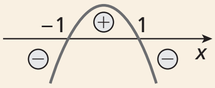
Sinal de f



Sinal de g



Sinal de h



Quadro de sinais

		−4		−1		1		3	
f	−		+		+		+		+
g	+		+		+		+		−
h	−		−		+		−		−
$\frac{f \cdot g}{h}$	+	●	−	○	+	○	−	●	+
		−4		−1		1		3	

Nos intervalos reais acima, o menor número natural que satisfaz a inequação é 2.

48. a) $f(x) = ax + b$ e o gráfico mostra que $f(2) = 0$ e $f(0) = 1$.
Então:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Portanto, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

$g(x) = ax^2 + bx + c$ e o gráfico mostra que $g(2) = 0$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$ e $g(0) = 4$, ou seja, $c = 4$. Então:

$g(x) = ax^2 + bx + 4$

$g(2) = 4a + 2b + 4 = 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 4 = \frac{9}{2}$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = \frac{9}{2} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + 2b = 2 \end{cases}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Resolvendo o sistema, obtemos:
$a = -2$ e $b = 2$
Portanto, $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

b) Os gráficos interceptam-se em $f(x) = g(x)$. Então:

$$-\frac{1}{2}x + 1 = -2x^2 + 2x + 4$$

$$4x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Se $x = 2$, temos: $y = 0$

Se $x = -\dfrac{3}{4}$, temos: $y = \dfrac{11}{8}$

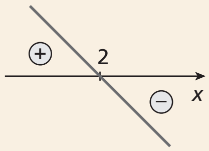
Portanto, os gráficos interceptam-se em $(2, 0)$ e $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{11}{8}\right)$.

c) Sabemos que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$.
Observando o gráfico, temos $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ em $[-1, 2]$ e $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$ em $[2, +\infty[$.
Logo, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ se $x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant -1$.

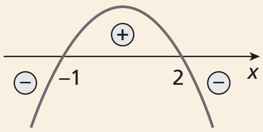
d) $$\overbrace{\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)}^{f(x)}\overbrace{(-2x^2 + 2x + 4)}^{g(x)} \geqslant 0$$

Zero de f: 2
Zeros de g: -1 e 2

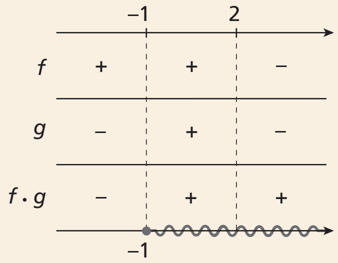
Sinal de f



Sinal de g



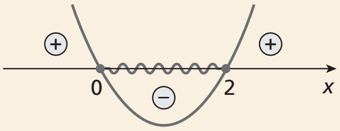
Quadro de sinais



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$
Como previsto no item **c**, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para valores reais de $x \geqslant -1$.

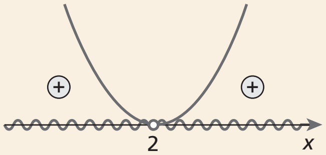
49. a) $$\underbrace{2x \leqslant \overbrace{-x^2 + 4x < 4}^{\text{(II)}}}_{\text{(I)}}$$

(I) $2x \leqslant -x^2 + 4x \Rightarrow x^2 - 2x \leqslant 0$

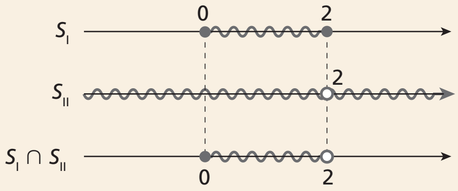


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

(II) $-x^2 + 4x < 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 0$



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

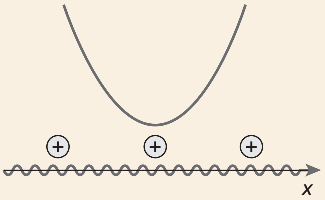


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$

b) $$\underbrace{-4 < \overbrace{\frac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8}^{\text{(II)}}}_{\text{(I)}}$$

(I) $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{2} > -4 \Rightarrow x^2 + 8x + 24 > 0$

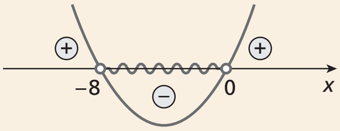
$f(x) = x^2 + 8x + 24$ (f não tem zeros)



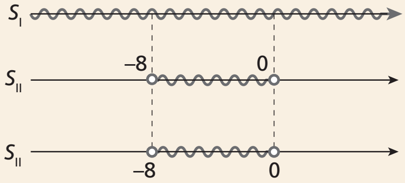
$S_I = \mathbb{R}$

(II) $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8 \Rightarrow x^2 + 8x < 0$

$g(x) = x^2 + 8x$ (zeros de g: -8 e 0)



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$



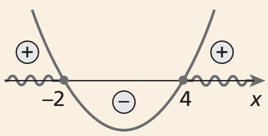
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

c) $$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 2x + 8 < 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

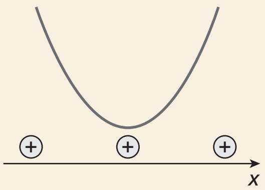
$f(x) = x^2 - 2x - 8$ (zeros de f: -2 e 4)
$g(x) = x^2 - 2x + 8$ (g não tem zeros)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

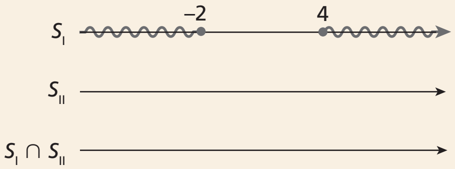
Sinal de f



Sinal de g



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$ $S_{II} = \varnothing$

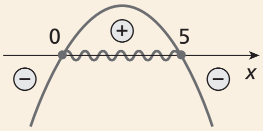


$S = \varnothing$

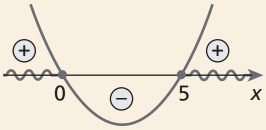
d) $\begin{cases} -x^2 + 5x \geqslant 0 \\ x^2 - 4x \geqslant x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x \geqslant 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 5x \geqslant 0 & \text{(II)} \end{cases}$

$f(x) = -x^2 + 5x$ (zeros de f: 0 e 5)
$g(x) = x^2 - 5x$ (zeros de g: 0 e 5)

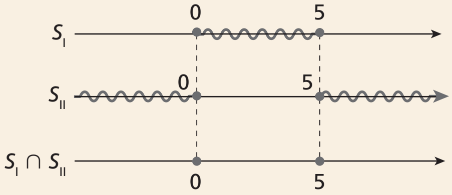
Sinal de f



Sinal de g

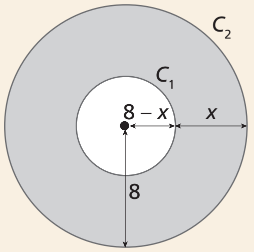


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$ $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 5\}$



$S = \{0, 5\}$

50.



A área de um círculo com raio de medida r é πr^2.

Pela figura, temos:

C_1: círculo de raio de medida $8 - x$

C_2: círculo de raio de medida 8

a) A área $A(x)$ é $A_{C_2} - A_{C_1}$.

$A(x) = \pi \cdot 8^2 - \pi \cdot (8 - x)^2$
$A(x) = 64\pi - \pi \cdot (64 - 16x + x^2)$
$A(x) = 64\pi - 64\pi + 16\pi x - \pi x^2$
$A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

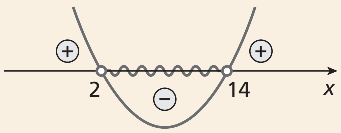
b) Devemos resolver a inequação:

$$28\pi < 16\pi x - \pi x^2 < 65\pi \Rightarrow \underbrace{28 < \mathrlap{\overbrace{\phantom{16x - x^2 < 65}}^{\text{(II)}}}16x - x^2}_{\text{(I)}} < 65$$

Além disso, devemos ter: $0 < x < 8$ (III)

(I) $28 < 16x - x^2 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 < 0$
$f(x) = x^2 - 16x + 28$ (zeros de f: 14 e 2)

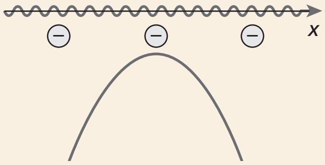
Sinal de f



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 14\}$

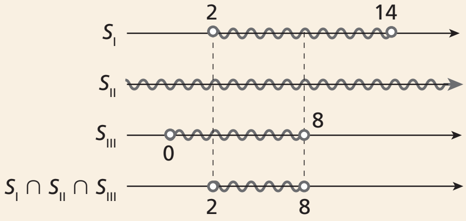
(II) $16x - x^2 < 65 \Rightarrow -x^2 + 16x - 65 < 0$
$g(x) = -x^2 + 16x - 65$ (g não tem zeros)

Sinal de g



$S_{II} = \mathbb{R}$

(III) $S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 8\}$



$S = S_I \cap S_{II} \cap S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 8\}$
Logo, x deve estar entre 2 e 8 para que a área $A(x)$ esteja entre 28π e 65π.

51. a) Observando os gráficos, percebemos que:
- $f(x) > 0$ para $x > 4$
- $g(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ ou $x > 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

b) Observando os gráficos, percebemos que:
- $f(x) < 0$ para $x < 4$ e $x \neq 2$
- $g(x) < 0$ para $x < -2$ ou $1 < x < 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$.

c) Observando os gráficos, percebemos que:
- $f(x) < 0$ para $x < 4$
- $g(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ ou $x > 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$.

d) Observando os gráficos, percebemos que:
- $f(x) > 0$ para $x > 4$
- $g(x) < 0$ para $x < -2$ ou $1 < x < 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \varnothing$.

Comentário: Pode-se aproveitar este momento para explicar que a reta vertical tracejada que passa por $x = 4$ é uma **assíntota** do gráfico de f, ou seja, quanto mais perto o valor de x estiver de 4, mais perto o gráfico estará dessa reta, pela direita ou pela esquerda dela, mas nunca vai “encostar” nela ou “ultrapassá-la”, pois o domínio da função f é $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$.

52. a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$

Devemos ter: $\underbrace{x^2 - 4x}_{f(x)} \neq 0$

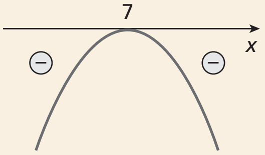
Zeros da função: $x = 4$ ou $x = 0$
Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$

Devemos ter: $\underbrace{-x^2 + 14x - 49}_{f(x)} \geqslant 0$

Zero da função: $x = 7$

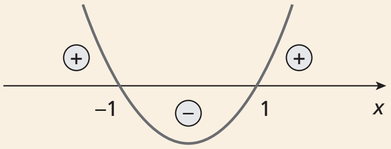


Portanto, D = {7}.

c) $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Devemos ter: $\underbrace{x^2 - 1}_{f(x)} > 0$

Zeros da função: $x = \pm 1$

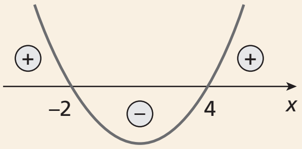


Portanto, D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

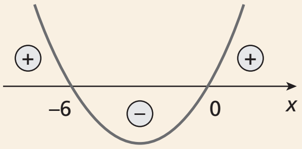
d) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x}}$

Devemos ter: $\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x - 8}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 + 6x}_{g(x)}} \geqslant 0$

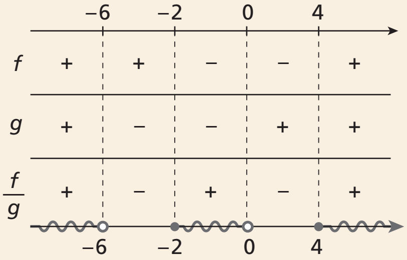
(I) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (-2 e 4 são os zeros de f):



(II) $g(x) = x^2 + 6x$ (0 e -6 são os zeros de g):



Quadro de sinais



		−6		−2		0		4	
f	+		+		−		−		+
g	+		−		−		+		+
$\frac{f}{g}$	+		−		+		−		+
		−6		−2		0		4	

Portanto, D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant 4\}$.

53. a) $f(x) = \dfrac{-3}{(x^2 - 2x)(x - 5)}$

Devemos ter:

$$(x^2 - 2x)(x - 5) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \neq 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ e } x \neq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

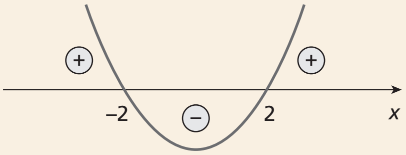
A função f não está definida para $x = 0$, $x = 2$ e $x = 5$, ou seja, seu domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$.

b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 3) \cdot (x^2 - x)}$

Devemos ter: $x^2 - 4 \geqslant 0$ (I) e $(x - 3) \cdot (x^2 - x) \neq 0$ (II)

(I) $\underbrace{x^2 - 4}_{f(x)} \geqslant 0$

Zeros de f: -2 e 2

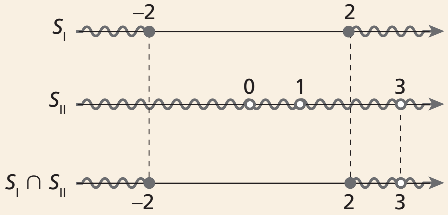


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

(II) $(x - 3) \cdot (x^2 - x) \neq 0$

$$\begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$$

$S_{II} = \mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$



Logo, D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$.

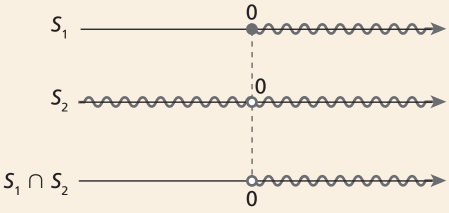
c) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2}$

Devemos ter $x^2 \geqslant 0$ (numerador) e $x^2 \neq 0$ (denominador). A segunda condição é satisfeita para $x \neq 0$. Logo, o domínio da função g é $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

d) $i(x) = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{x}}{\dfrac{2}{3}}$

Devemos ter:

- $x \geqslant 0$ (numerador); então: $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- $x \neq 0$ (denominador); então: $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$



Logo, D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

54. **a)** Analogamente ao que foi feito no exercício **51**, vamos observar o gráfico para encontrar as soluções das inequações.

Nesse exercício, também temos $x = 4$ como uma assíntota do gráfico de f, e seu domínio é $D = \mathbb{R} - \{4\}$.

(I) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geqslant 0$

Queremos, então, saber os valores de x para que $f(x) \geqslant 0$ e, pelo gráfico, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 2 \text{ ou } x > 4\}$

(II) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

Nesse caso, queremos saber os valores de x para que $f(x) < 0$ e, pelo gráfico, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Comentário: Se os alunos quiserem resolver as inequações desse exercício sem o auxílio do gráfico, ou seja, utilizando o estudo dos sinais, eles vão encontrar as mesmas soluções e poderão consultar o gráfico somente para conferir suas respostas. O objetivo dessas questões é apresentar o gráfico de f e analisar os sinais.

Exercícios complementares

1. **a)** Não é uma função quadrática, pois não é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

b) É uma função quadrática, pois é na forma

$y = ax^2 + bx + c$, com $a = \dfrac{1}{3}$, $b = 0$ e $c = -7$.

c) $y = (x - 2)(x + 3) \Rightarrow y = x^2 + x - 6$

É uma função quadrática, pois é na forma

$y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$.

d) Não é uma função quadrática, pois não é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

e) É uma função quadrática, pois é na forma

$y = ax^2 + bx + c$, com $a = -3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{5}$.

f) $y = x(x - 3) \Rightarrow y = x^2 - 3x$

É uma função quadrática, pois é na forma

$y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = -3$ e $c = 0$.

2. **a)** $p = 12d - 0{,}05d^2$

Para $d = 50$, temos:

$p = 12 \cdot 50 - 0{,}05 \cdot 50^2 \Rightarrow p = 475$

Logo, o valor do acre será R$ 475,00.

b) Para $p = 400$, temos:

$12d - 0{,}05d^2 = 400 \Rightarrow 12d - 0{,}05d^2 - 400 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$d = 40$ ou $d = 200$ (não serve, pois $20 < d < 80$)

Portanto, são necessários 40 dias após o plantio.

3. Se uma parábola é gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

- $\Delta > 0$: a parábola intercepta o eixo x em dois pontos;
- $\Delta = 0$: a parábola intercepta o eixo x em um único ponto;
- $\Delta < 0$: a parábola não intercepta o eixo x.

a) $y = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow \Delta = -11 < 0$

A parábola não intercepta o eixo x.

b) $y = 2x^2 - 5x - 3 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

A parábola intercepta o eixo x em dois pontos.

c) $y = -x^2 + x + 1 \Rightarrow \Delta = 5 > 0$

A parábola intercepta o eixo x em dois pontos.

d) $y = 3x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 1 \Rightarrow \Delta = 0$

A parábola intercepta o eixo x em um único ponto.

Portanto, as parábolas referentes aos itens **b**, **c** e **d** interceptam o eixo x.

4. Pelas fórmulas do vértice, temos:

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8]}{4 \cdot 2} = -\frac{9}{2}$$

Logo, $V = \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$.

b) $y = -x^2 + 5$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{-2} = 0$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[0 + 20]}{4(-1)} = 5$$

Logo, $V = (0, 5)$.

5. **a)** $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$

$V = \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$ e a concavidade da parábola está voltada para cima. Então:

$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\dfrac{9}{2}\right\}$

b) $g(x) = -x^2 + 5$

$V = (0, 5)$ e a concavidade da parábola está voltada para baixo. Então:

$\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

6. Sabemos que: $y = x^2 - mx + 3n$, $f(3) = -1$ e $f(2) = -5$.

Substituindo os valores conhecidos na lei da função, obtemos:

$$\begin{cases} 9 - 3m + 3n = -1 \\ 4 - 2m + 3n = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m - 3n = 10 \\ -2m + 3n = -9 \end{cases}$$
$$m = 1$$

Substituindo m por 1 em uma das equações, obtemos:

$n = -\dfrac{7}{3}$

Então:

$y = x^2 - x - 7$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$$

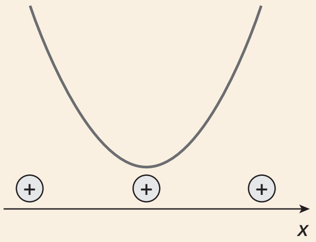
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[1 + 28]}{4} = -\frac{29}{4}$$

$$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$$

7. $y = x^2 - x + 8$

Zeros da função: não há, pois $\Delta = -31 < 0$.

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.



ADILSON SECCO

a) Falsa, pois a função é positiva para todo x real.

b) Falsa, pois a função não tem zero.

c) verdadeira

d) Falsa, pois a função não tem zeros reais.

e) verdadeira

8. A parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, 4)$.
Então, a lei da função quadrática a ela associada é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + 4$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
Também notamos que a parábola intercepta o eixo x nos pontos $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$. Isso significa que -2 e -1 são os zeros da função.
Substituindo as coordenadas dos pontos $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ na lei da função, obtemos:
$f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a - 2b + 4 = 0 \quad \text{(I)}$
$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 4 = 0 \Rightarrow a = b - 4 \quad \text{(II)}$
Substituindo a por $b - 4$ em (I), obtemos:
$4 \cdot (b - 4) - 2b + 4 = 0 \Rightarrow 2b - 12 = 0 \Rightarrow b = 6$
Substituindo b por 6 em (II), obtemos:
$a = 6 - 4 = 2$
Portanto, a lei da função é $y = 2x^2 + 6x + 4$.

9. $y = (k + 2)x^2 + (k^2 - 3)x + 5$
Para que a função admita valor máximo, a concavidade da parábola deve estar voltada para baixo. Então:
$(k + 2) < 0 \Rightarrow k < -2$
Sabemos que $x_V = 3$; logo:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-(k^2 - 3)}{2(k + 2)} = 3 \Rightarrow k^2 + 6k + 9 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (k + 3)^2 = 0 \Rightarrow k = -3$ (menor que -2)
Assim, $k = -3$.
$g(x) = -x^2 + 6x + 5$
$y_V = g(3) = -9 + 18 + 5 = 14$

10. $f(x) = (6 - 4t)x^2 + 4x - 6$
Para que a função tenha valor máximo, a concavidade da parábola deve estar voltada para baixo. Então:

$$6 - 4t < 0 \Rightarrow t > \frac{3}{2}$$

Sabemos que $x_V = 1$; logo:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-4}{2(6 - 4t)} = 1 \Rightarrow t = 2$$

Logo, $f(x) = -2x^2 + 4x - 6$.
Assim: $y_V = f(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 6 = -4$

11. Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo. Sabemos que o perímetro é 48; logo:
$2x + 2y = 48 \Rightarrow x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$
Cálculo da área:
$S = x \cdot y = x(24 - x) = -x^2 + 24x$
$S(x) = -x^2 + 24x$ é máxima em x_V. Assim:

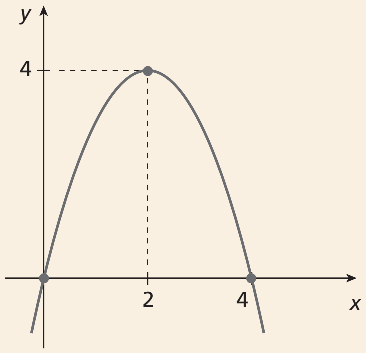
$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{-2} = 12$$

$y_V = S(12) = -(12)^2 + 24 \cdot 12 = -144 + 288 = 144$
Logo, a área máxima é 144 cm².

12. a) $y = -x^2 + 4x$
Zeros da função: 0 e 4
Como $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.
Coeficiente c: 0

$$x_V = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2 \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-16}{4 \cdot (-1)} = 4$$

Pontos de intersecção com os eixos: $(0, 0)$ e $(4, 0)$
Vértice: $(2, 4)$



b) $y = 2x^2 - 5x + 2$
Zeros da função: 2 e $\frac{1}{2}$

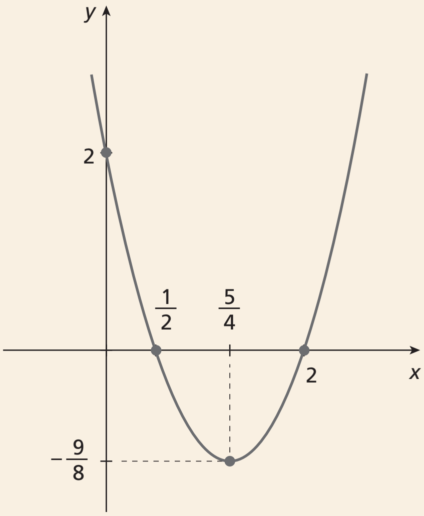
Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.
Coeficiente c: 2

$$x_V = \frac{5}{4} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{9}{8}$$

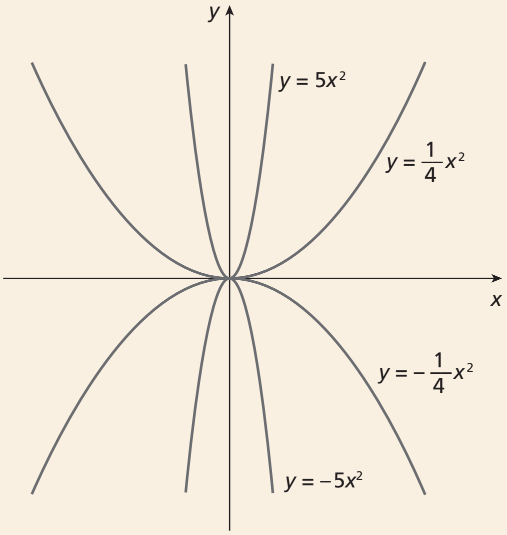
Pontos de intersecção com os eixos:

$(2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(0, 2)$

Vértice: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$



13. Em um *software* de construção de gráficos obtemos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

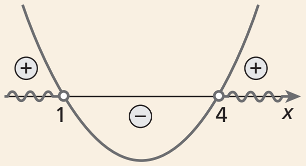
Pode-se observar, pelos gráficos, que:

- quanto maior o valor absoluto do coeficiente de x^2, menor é a "abertura" da parábola;
- para $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- para $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo;
- para valores simétricos de a, as parábolas são simétricas em relação ao eixo x.

14. a) $x^2 - 5x + 4 > 0$

$f(x) = x^2 - 5x + 4$

Zeros de f: 1 e 4



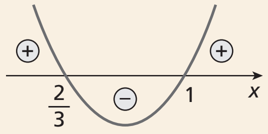
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$.

b) $\overbrace{(3x^2 - 5x + 2)}^{f(x)} \cdot \overbrace{(-x^2 + 4x - 4)}^{g(x)} \geqslant 0$

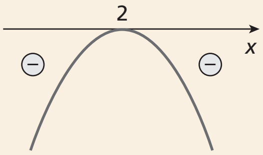
Zeros de f: $\frac{2}{3}$ e 1

Zero de g: 2

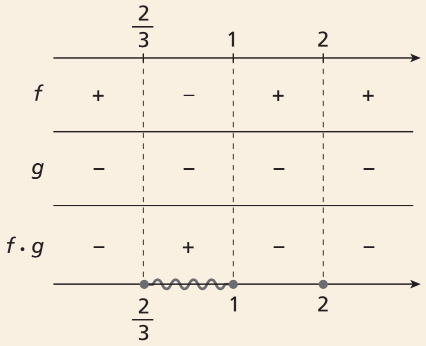
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x = 2\right\}$.

c) $\dfrac{\overbrace{4x^2 + 3x - 1}^{f(x)}}{\underbrace{1 - x^2}_{g(x)}} \leqslant 0$

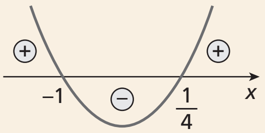
Zeros de f: -1 e $\frac{1}{4}$

Zeros de g: -1 e 1

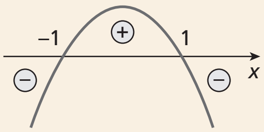
Condição de existência:

$1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq -1$

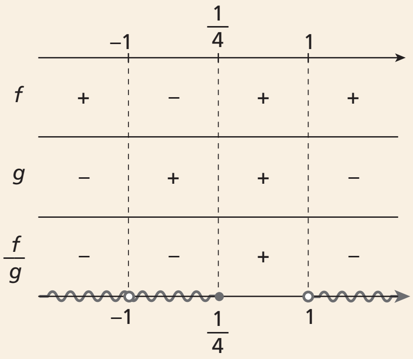
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1 \text{ ou } x > 1\right\}$.

d) $\frac{2}{x^2 - 1} \leqslant \frac{x}{x - 1} \Rightarrow \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2 - x(x + 1)}{x^2 - 1} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{\overbrace{-x^2 - x + 2}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 - 1}_{g(x)}} \leqslant 0;$

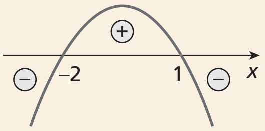
Zeros de f: -2 e 1

Zeros de g: 1 e -1

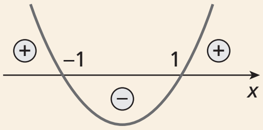
Condição de existência:

$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq -1$

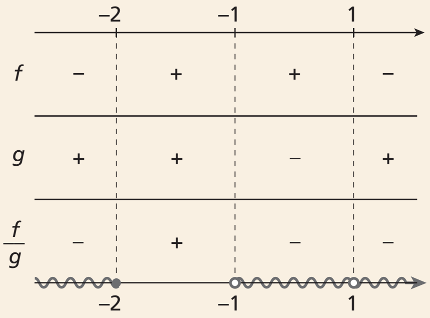
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



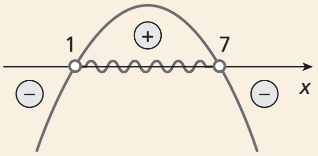
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$.

15. $L(x) = -x^2 + 8x - 7$

a) Queremos $L(x) > 0$; então, vamos resolver a inequação:

$-x^2 + 8x - 7 > 0$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



$1 < x < 7$

Logo, o lucro é positivo para x entre 1 milhar e 7 milhares de unidades vendidas.

b) Basta determinar o valor de x_V da parábola associada à função $L(x)$:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} = 4$$

Para obter o lucro máximo devem ser vendidos 4 milhares de unidades, ou seja, 4.000 unidades.

c) Basta determinar o valor de y_V da parábola associada à função $L(x)$:

$y_V = L(x_V) = L(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 - 7 = 9$

O lucro máximo será R$ 9.000,00.

16. a) ① $A_1 = 270 \cdot 90 \cdot 2 = 48.600 \Rightarrow A_1 = 48.600 \text{ mm}^2$

② $A_2 = 180 \cdot 90 \cdot 2 = 32.400 \Rightarrow A_2 = 32.400 \text{ mm}^2$

③ $A_3 = 180 \cdot 270 \cdot 2 = 97.200 \Rightarrow A_3 = 97.200 \text{ mm}^2$

b) $A_1 = 2 \cdot x \cdot \left(\frac{450 - x}{2}\right) = 450x - x^2$

$$A_2 = 2 \cdot \left(\frac{450 - x}{2}\right) \cdot \left(\frac{90 + x}{2}\right) = \frac{40.500 + 360x - x^2}{2}$$

$$A_3 = 2 \cdot x \cdot \left(\frac{90 + x}{2}\right) = 90x + x^2$$

$A(x) = A_1 + A_2 + A_3$

$$A(x) = \frac{40.500 + 360x - x^2}{2} + 450x - x^2 + 90x + x^2$$

$$A(x) = \frac{40.500 + 1.440x - x^2}{2}$$

Como $x > 0$, a função só está definida para o intervalo $0 < x < 450$.

Portanto, $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 450\}$.

17. $f(x) = (p^2 - 1)x^2 + 2(p - 1)x + 1$

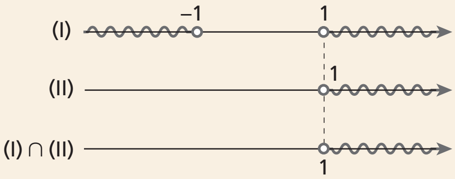
Para que $f(x)$ seja positiva para todo x real, devemos ter:

$$\begin{cases} p^2 - 1 > 0 & \text{(I)} \\ \Delta < 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $p^2 - 1 > 0 \Rightarrow p < -1$ ou $p > 1$

(II) $\Delta < 0 \Rightarrow [2(p - 1)]^2 - 4 \cdot (p^2 - 1) \cdot 1 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 - 8p < 0 \Rightarrow p > 1$



Logo, $f(x) > 0$ para $p > 1$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

18. a) Falsa, pois os elementos simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola têm sempre mesma imagem.

b) Falsa, pois o conjunto imagem de uma função quadrática nunca é o conjunto $\mathbb{R}$, que é o contradomínio da função.

c) Falsa, pois qualquer função quadrática não é injetora nem sobrejetora.

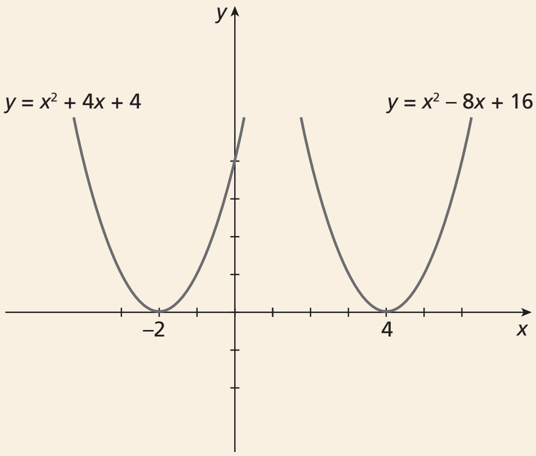
19. $y = x^2 + mx + 8 - m$

Queremos que o gráfico dessa função seja tangente ao eixo x, ou seja, que exista apenas um zero da função; então, o discriminante deve ser nulo. Assim:

$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - m) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - 32 + 4m = 0 \Rightarrow m = -8$ ou $m = 4$

- Para $m = -8$, temos: $y = x^2 - 8x + 16$
- Para $m = 4$, temos: $y = x^2 + 4x + 4$



20. Ao verificar o que determina que o vértice da parábola esteja à esquerda ou à direita do eixo y, estamos, na verdade, estudando as possibilidades para x_V.

a) $x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2}$

Nesse caso, percebemos que o sinal de x_V (e, portanto, a posição do vértice) depende somente do sinal do coeficiente b.

Então, em relação ao eixo y, o vértice estará:

- à direita, se $b < 0$.
- à esquerda, se $b > 0$.

b) $x_V = \frac{-b}{2a}$

Nesse caso, percebemos que o sinal de x_V depende dos sinais dos coeficientes a e b.

Então, em relação ao eixo y, o vértice estará:

- à direita, se $\begin{cases} b > 0 \text{ e } a < 0 \text{ ou} \\ b < 0 \text{ e } a > 0 \end{cases}$
- à esquerda, se $\begin{cases} b > 0 \text{ e } a > 0 \text{ ou} \\ b < 0 \text{ e } a < 0 \end{cases}$

Autoavaliação

1. Dada uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, se o coeficiente a, de x^2, for nulo, então a lei da função equivalerá a $y = bx + c$, que não representa uma função quadrática. Logo, devemos ter o coeficiente de x^2 não nulo.
alternativa c

2. Para a concavidade da parábola estar voltada para cima, devemos ter:

$-m + 1 > 0 \Rightarrow m < 1$

alternativa b

3. Os zeros da função $y = -x^2 + 9$ são as raízes da equação $-x^2 + 9 = 0$. Logo:

$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = +3$ ou $x = -3$

Portanto, os zeros da função são 3 e −3.

alternativa c

4. A função dada por $y = x^2 + \sqrt{3}$ tem $a = 1 > 0$; logo, seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

Ainda temos:

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = -4\sqrt{3} < 0$

Como $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo x; então, todos os pontos dela estão acima desse eixo. Portanto, os valores de y são sempre positivos.

alternativa d

5. Analisando o gráfico, temos:

a) Falsa, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

b) Falsa, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

c) Verdadeira, pois $f(x_V) = y_V > f(x_2)$.

d) Falsa, pois $f(x_V) > f(x_1)$.

alternativa c

6. A função dada por $y = x^2 - 4x + 3$ tem $a = 1 > 0$; logo, tem um valor mínimo que é a ordenada −1 do vértice. Logo, o conjunto imagem da função é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$.

alternativa b

7. $s(t) = 4t - 2t^2$. Observa-se que a concavidade da parábola está voltada para baixo.

O instante em que o carro para e altera o sentido do movimento é a abscissa (t) do vértice da parábola.

$$t_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$$

alternativa d

8. Consideramos um retângulo de dimensões x e y. Então:

$2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$

Cálculo da área: $S = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$

Logo, $S(x) = 50x - x^2$.

A área é máxima para x_V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2(-1)} = 25$$

$y_V = S(x_V) = 50 \cdot 25 - 25^2 = 625$

alternativa a

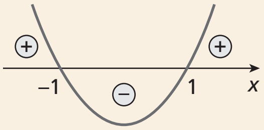
9. $\dfrac{x^2 - 1}{x} \leq 0$

Condição de existência: $x \neq 0$

- $f(x) = x^2 - 1$

  Zeros de f: 1 e −1

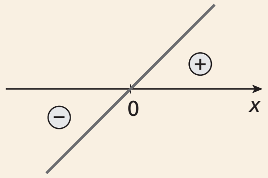
Sinal de f



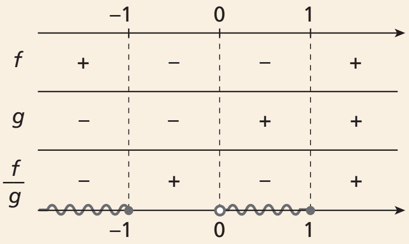
- $g(x) = x$

  Zero de g: 0

Sinal de g



Quadro de sinais



f	+	−	−	+
g	−	−	+	+
$\frac{f}{g}$	−	+	−	+

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $0 < x \leq 1\}$.

alternativa a

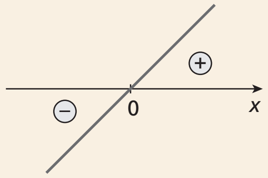
10. $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 15} \geq 0$

Condição de existência: $x \neq -5$ e $x \neq 3$

- $h(x) = x$

  Zero de h: 0

Sinal de h

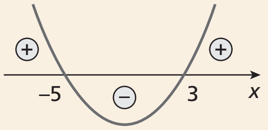


- $g(x) = x^2 + 2x - 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow$

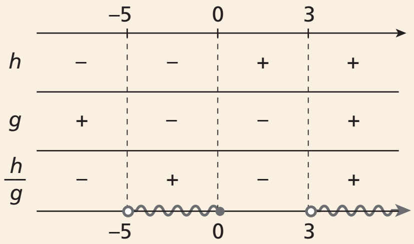
$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$$

Zeros de g: 3 e −5

Sinal de g



Quadro de sinais



h	−	−	+	+
g	+	−	−	+
$\frac{h}{g}$	−	+	−	+

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 0$ ou $x > 3\}$.

alternativa b

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 6

Função modular

O conceito de módulo, ou valor absoluto de um número real, é essencial no desenvolvimento de outras noções matemáticas, como a definição de desvio médio, na Estatística (volume do 3º ano); o cálculo da distância entre um ponto e uma reta, na Geometria analítica (volume do 3º ano); o estudo dos números complexos (volume do 3º ano) e de sua representação como vetor, que é determinado por direção, sentido e módulo (comprimento).

O conhecimento da função modular e de seu gráfico facilita a resolução tanto de inequações modulares quanto de situações-problema relacionadas com a ideia de valor absoluto.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. a) $|-3+2| + |7-10| - |5-8| =$
$= |-1| + |-3| - |-3| =$
$= 1 + 3 - 3 = 1$

b) $|10-5+1| - |-14-18| + |10-48| =$
$= |6| - |-32| + |-38| =$
$= 6 - 32 + 38 = 12$

c) $|x|^2 - |x| + |x| =$
$= |-4|^2 - |-4| + |-4| =$
$= 4^2 - 4 + 4 = 16$

d) $|x^2| = |(-4)^2| = |16| = 16$
$|x|^2 = |-4|^2 = 4^2 = 16$

2. a) $|x| = 16 \Rightarrow x = 16$ ou $x = -16$

b) $x = |-8| \Rightarrow x = 8$

c) $|x| = \dfrac{49}{80} \Rightarrow x = \dfrac{49}{80}$ ou $x = -\dfrac{49}{80}$

d) $|x| = -1 \Rightarrow$ Não existe $x$ real.

3. a) Para $x > 5$, temos que $x - 5 > 0$ e $x - 4 > 0$; então:
$|x-5| + |x-4| = x - 5 + x - 4 =$
$= 2x - 9$

b) Para $2 < x < 5$, temos que $x - 2 > 0$ e $x - 5 < 0$; então:
$|x-2| + |x-5| = x - 2 + (-x + 5) =$
$= x - 2 - x + 5 = 3$

c)
- Se $x < 4$, então: $|x-4| - |x-6| =$
$= -x + 4 - (-x + 6) = -x + 4 + x - 6 = -2$
- Se $4 \leqslant x < 6$, então: $|x-4| - |x-6| =$
$= x - 4 - (-x + 6) = x - 4 + x - 6 = 2x - 10$
- Se $x \geqslant 6$, então: $|x-4| - |x-6| =$
$= x - 4 - (x - 6) = x - 4 - x + 6 = 2$

4. a) O maior valor da expressão $5 - |x|$ é obtido quando $|x| = 0$, ou seja:
$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ e $5 - |x| = 5 - |0| = 5$

b) O maior valor da expressão $10 - |x-1|$ é obtido quando $|x-1| = 0$, ou seja:
$|x-1| = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
$10 - |x-1| = 10 - |0| = 10$

5. Sabemos que: $f(x) = \dfrac{|4-3x|}{7}$

Então:

$$f(1) = \frac{|4-3|}{7} = \frac{1}{7}$$

$$f(9) = \frac{|4-27|}{7} = \frac{23}{7}$$

$$\frac{f(1)-f(9)}{1-9} = \frac{\frac{1}{7} - \frac{23}{7}}{-8} = -\frac{22}{7} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{11}{28}$$

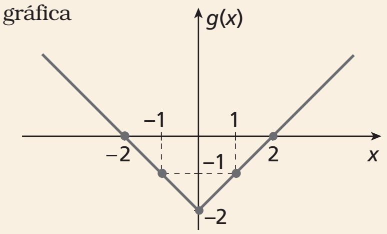
6. a) $g(x) = |x| - 2$

$$g(x) = |x| - 2 = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x - 2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores do domínio da função g:

$x$	$g(x) = \|x\| - 2$	$(x, g(x))$
-2	$g(-2) = \|-2\| - 2 = 2 - 2 = 0$	$(-2, 0)$
-1	$g(-1) = \|-1\| - 2 = 1 - 2 = -1$	$(-1, -1)$
$0$	$g(0) = \|0\| - 2 = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
$1$	$g(1) = \|1\| - 2 = 1 - 2 = -1$	$(1, -1)$
$2$	$g(2) = \|2\| - 2 = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$

A representação gráfica de g é:



Observe que $\text{Im}(g) = [-2, +\infty[$.

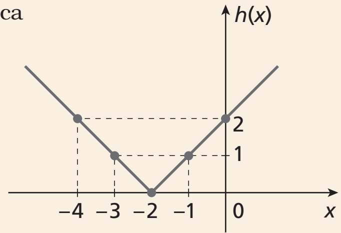
b) $h(x) = |x + 2|$

$$h(x) = |x+2| = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \geqslant -2 \\ -x - 2, \text{ se } x < -2 \end{cases}$$

Vamos construir uma tabela com alguns valores do domínio da função h:

$x$	$h(x) = \|x + 2\|$	$(x, h(x))$
-4	$h(-4) = \|-4 + 2\| = \|-2\| = 2$	$(-4, 2)$
-3	$h(-3) = \|-3 + 2\| = \|-1\| = 1$	$(-3, 1)$
-2	$h(-2) = \|-2 + 2\| = \|0\| = 0$	$(-2, 0)$
-1	$h(-1) = \|-1 + 2\| = \|1\| = 1$	$(-1, 1)$
$0$	$h(0) = \|0 + 2\| = \|2\| = 2$	$(0, 2)$

A representação gráfica de h é:



Observe que $\text{Im}(h) = [0, +\infty[$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

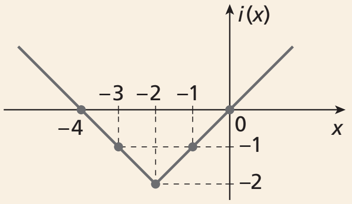
c) $i(x) = |x + 2| - 2$

$$i(x) = |x + 2| - 2 = \begin{cases} x + 2 - 2 = x, \text{ se } x \geqslant -2 \\ -x - 2 - 2 = -x - 4, \text{ se } x < -2 \end{cases}$$

Vamos construir uma tabela com alguns valores do domínio da função *i*:

x	$i(x) = \lvert x + 2\rvert - 2$	$(x, i(x))$
-4	$i(-4) = \lvert -4 + 2\rvert - 2 = 0$	$(-4, 0)$
-3	$i(-3) = \lvert -3 + 2\rvert - 2 = -1$	$(-3, -1)$
-2	$i(-2) = \lvert -2 + 2\rvert - 2 = -2$	$(-2, -2)$
-1	$i(-1) = \lvert -1 + 2\rvert - 2 = -1$	$(-1, -1)$
0	$i(0) = \lvert 0 + 2\rvert - 2 = 0$	$(0, 0)$

A representação gráfica de *i* é:



Observe que $\text{Im}(i) = [-2, +\infty[$.

- O gráfico de *g* é igual ao gráfico de *f* transladado duas unidades para baixo.
  O gráfico de *h* é igual ao gráfico de *f* transladado duas unidades para a esquerda.
  O gráfico de *i* é igual ao gráfico de *f* transladado duas unidades para a esquerda e duas unidades para baixo.

Comentário: Novamente temos uma situação em que um *software* de construção de gráficos permite aos alunos comparar vários casos de deslocamentos horizontais e/ou verticais do gráfico da função dada por $f(x) = |x|$.

7. a) $g(x) = |x - 3| + |x - 1|$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x \geqslant 3 \\ -x + 3, \text{ se } x < 3 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

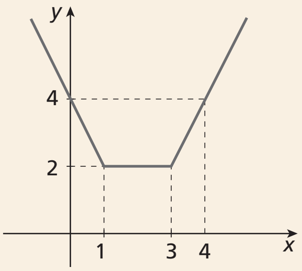
Então:

- Se $x < 1 \Rightarrow g(x) = -x + 3 - x + 1 = -2x + 4$
- Se $1 \leqslant x < 3 \Rightarrow g(x) = -x + 3 + x - 1 = 2$
- Se $x \geqslant 3 \Rightarrow g(x) = x - 3 + x - 1 = 2x - 4$

Logo, temos a função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 4, \text{ se } x < 1 \\ 2, \text{ se } 1 \leqslant x < 3 \\ 2x - 4, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

A representação gráfica de *g* é:



A função *g* é crescente para $x \geqslant 3$ e decrescente para $x \leqslant 1$.

b) $q(x) = \begin{cases} |x + 5|, \text{ se } x < -1 \\ -2x, \text{ se } -1 \leqslant x < 2 \\ -1, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, \text{ se } x \geqslant -5 \\ -x - 5, \text{ se } x < -5 \end{cases}$$

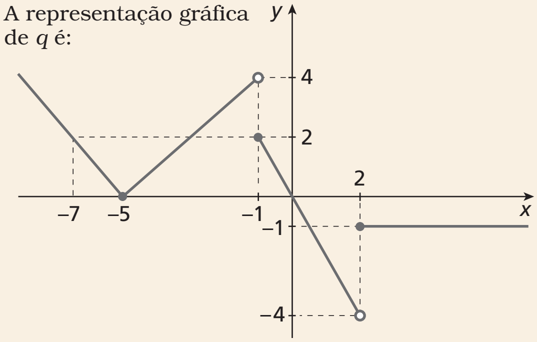
Como $x < -1$, temos:

$$|x + 5| = \begin{cases} -x - 5, \text{ se } x < -5 \\ x + 5, \text{ se } -5 \leqslant x < -1 \end{cases}$$

Então, a função é definida por:

$$q(x) = \begin{cases} -x - 5, \text{ se } x < -5 \\ x + 5, \text{ se } -5 \leqslant x < -1 \\ -2x, \text{ se } -1 \leqslant x < 2 \\ -1, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

A representação gráfica de *q* é:

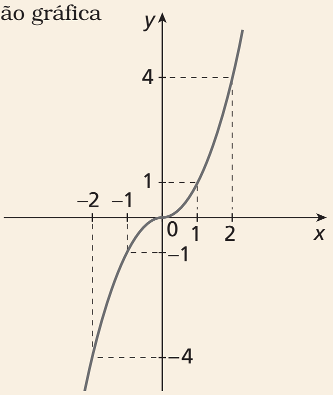


A função *q* é crescente para $-5 \leqslant x < -1$ e decrescente para $x \leqslant -5$ e $-1 \leqslant x < 2$.

c) $p(x) = x \cdot |x|$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow p(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x^2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

A representação gráfica de *p* é:

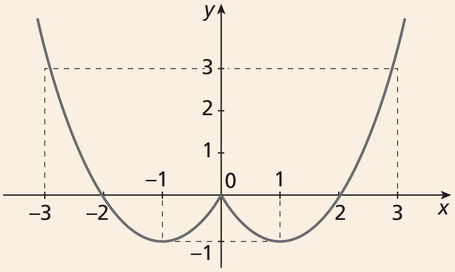


A função *p* é crescente em ℝ.

d) $i(x) = x^2 - 2 \cdot |x|$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow i(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ x^2 + 2x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

A representação gráfica de *i* é:



A função *i* é crescente para $-1 \leqslant x \leqslant 0$ e $x \geqslant 1$ e decrescente para $x \leqslant -1$ e $0 \leqslant x \leqslant 1$.

8. a) Espera-se que os alunos percebam que, para determinar a abscissa dos pontos de intersecção, basta resolver a igualdade $f(x) = g(x)$.

Nesse caso: $|x| = 2 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Logo, os pontos de intersecção são $(2, 2)$ e $(-2, 2)$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Precisamos encontrar x de modo que $f(x) = g(x)$.

$-3 = -|x - 3| + 1 \Rightarrow |x - 3| = 4 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -1$

Logo, os pontos de intersecção são $(-1, -3)$ e $(7, -3)$.

Comentário: Além da possível resolução algébrica por meio da igualdade $f(x) = g(x)$, avaliar a conveniência de promover uma discussão sobre uma resolução geométrica.
No item **a**, por exemplo, observar que nos gráficos de f e de g aparecem dois triângulos retângulos e isósceles com catetos de medida 2. Essa medida, consideradas as orientações dos eixos cartesianos, fornece as coordenadas dos pontos de intersecção.
No item **b**, a estratégia de resolução é a mesma, porém com uma dificuldade adicional: para obter os dois triângulos retângulos e isósceles, estes com medida 4, é necessário traçar uma reta vertical pelo ponto (3, 1).
A estratégia acima também permite e facilita a resolução do exercício **9**.

9. Área do triângulo do item **a**: $A = \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$

Logo, a área é igual a 4 unidades de área.

Área do triângulo do item **b**: $A = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16$

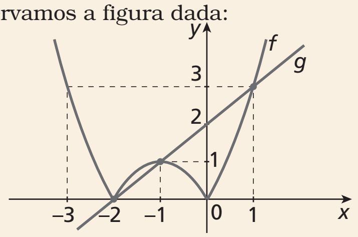
Logo, a área é igual a 16 unidades de área.

10. $f(x) = |x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + 2x, \text{ se } x^2 + 2x \geqslant 0 \\ -x^2 - 2x, \text{ se } x^2 + 2x < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, \text{ se } x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 0 \\ -x^2 - 2x, \text{ se } -2 < x < 0 \end{cases}$

$g(x) = x + 2$

a) Observamos a figura dada:



ADILSON SECCO

Os gráficos interceptam-se em $(-2, 0)$, $(-1, 1)$ e $(1, 3)$.

b) Observa-se pelo gráfico que $f(x) < g(x)$ no intervalo $-1 < x < 1$.

c) Observa-se pelos gráficos que $f(x) \geqslant g(x)$ para $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$.

d) $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$, se $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$.
Como $f(x)$ é sempre positiva ou nula, a condição para $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ é somente $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$. Pelo gráfico, isso ocorre se $x \geqslant -2$.
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$.

11. a) $|8x - 3| = |2x - 4| \Rightarrow \begin{cases} 8x - 3 = 2x - 4 & \text{(I)} \\ 8x - 3 = -(2x - 4) & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $8x - 3 = 2x - 4 \Rightarrow 6x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{6}$

(II) $8x - 3 = -(2x - 4) \Rightarrow 8x - 3 = -2x + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{10}$

Logo, $S = \left\{-\dfrac{1}{6}, \dfrac{7}{10}\right\}$.

b) $20 \cdot |8x + 3| = 10$

$|8x + 3| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 3 = \dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ 8x + 3 = -\dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $8x + 3 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 8x = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{5}{16}$

(II) $8x + 3 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 8x = -\dfrac{7}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{7}{16}$

Logo, $S = \left\{-\dfrac{5}{16}, -\dfrac{7}{16}\right\}$.

c) Condição inicial: $x - 7 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 7$

$|x| = x - 7 \Rightarrow \begin{cases} x = x - 7 & \text{(I)} \\ x = -(x - 7) & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $x = x - 7 \Rightarrow 0 = -7$ (falso)

(II) $x = -(x - 7) \Rightarrow x = -x + 7 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$
(não atende à condição inicial)

Logo, $S = \varnothing$.

d) $4 + |2x^2 - x - 3| = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow |2x^2 - x - 3| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 3 & \text{(I)} \\ 2x^2 - x - 3 = -3 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $2x^2 - x - 3 = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-6)}}{2 \cdot (2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow x = 2$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

(II) $2x^2 - x - 3 = -3 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 0$

Logo, $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 2\right\}$.

e) Fazendo $|x| = y$, temos:

$y^2 + 4y + 4 = 0$

$y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4)}}{2 \cdot (1)}$

$y = \dfrac{-4 \pm 0}{2} \Rightarrow y = -2$

Como $|x| = y$, então $y = -2$ não é possível.
Portanto, $S = \varnothing$.

f) $\left|\dfrac{x - 2}{x - 5}\right| = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - 2}{x - 5} = 3 & \text{(I)} \\ \dfrac{x - 2}{x - 5} = -3 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $\dfrac{x - 2}{x - 5} = 3 \Rightarrow x - 2 = 3(x - 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 2 = 3x - 15 \Rightarrow -2x = -13 \Rightarrow x = \dfrac{13}{2}$

(II) $\dfrac{x - 2}{x - 5} = -3 \Rightarrow x - 2 = -3(x - 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 2 = -3x + 15 \Rightarrow 4x = 17 \Rightarrow x = \dfrac{17}{4}$

Portanto, $S = \left\{\dfrac{13}{2}, \dfrac{17}{4}\right\}$.

12. a) $g(x) = -2 \Rightarrow |x^2 - 5x + 4| = -2$. Não existe x real.

b) $g(x) = 2 \Rightarrow |x^2 - 5x + 4| = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 2 & \text{(I)} \\ x^2 - 5x + 4 = -2 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $x^2 - 5x + 4 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$ ou $x = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}$

(II) $x^2 - 5x + 4 = -2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 2$$

Os valores de x para os quais $g(x) = 2$ são:

$2,\ 3,\ \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$ e $\dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}$.

13. a) $f(x) = |x|^2 - 5|x| + 7$

$D(f) = \mathbb{R}$

Fazendo $|x| = y$, temos: $y^2 - 5y + 7 = 0$

$\Delta = (-5^2) - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3$

Como $\Delta < 0$, então f não possui zeros reais.

b) $g(x) = \dfrac{4}{|x|}$

$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$D(g) = \mathbb{R}^*$

A função g não possui zeros reais.

c) $h(x) = \dfrac{4}{|x - 1|}$

$|x - 1| \neq 0 \Rightarrow x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$D(h) = \mathbb{R} - \{1\}$

A função h não possui zeros reais.

d) $i(x) = \dfrac{10 - |x|}{|x| - 2}$

$|x| - 2 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 2 \Rightarrow x \neq 2$ e $x \neq -2$

$D(i) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$

Os zeros da função i são -10 e 10.

e) $j(x) = \sqrt{|x|}$

$D(j) = \mathbb{R}$

O zero da função j é o zero.

14. $|x| + |x - 1| = 4$

Sabemos que:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases} \text{ e } |x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Podemos separar as possibilidades em quatro:

(1) $x \geqslant 0$ e $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$

(2) $x \geqslant 0$ e $x - 1 < 0 \Rightarrow 0 \leqslant x < 1$

(3) $x < 0$ e $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow$ impossível

(4) $x < 0$ e $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 0$

Analisando cada uma, temos:

(1) se $x \geqslant 1$

$x + x - 1 = 4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

(2) $0 \leqslant x < 1$

$x + (-x + 1) = 4 \Rightarrow 1 = 4$ (falso)

(3) $\nexists\ x$

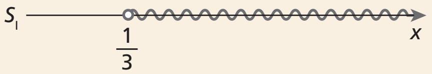
(4) $x < 0$

$-x + (-x + 1) = 4 \Rightarrow -2x = 3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

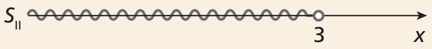
Portanto, $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$.

15. a) $|3x - 5| < 4 \Rightarrow \underbrace{-4 < \overbrace{3x - 5 < 4}^{\text{(II)}}}_{\text{(I)}}$

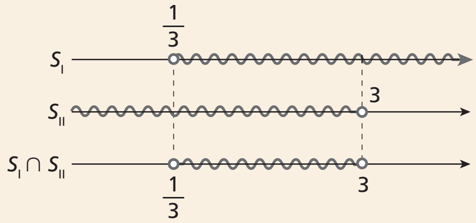
(I) $-4 < 3x - 5 \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \dfrac{1}{3}$



(II) $3x - 5 < 4 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3$



Fazendo a intersecção $S_I \cap S_{II}$, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{3} < x < 3\right\}$.

b) $|x + 7| > 2x + 1$

Analisando o 2º membro da desigualdade, temos:

- 1º caso: $2x + 1 < 0 \Rightarrow x < -\dfrac{1}{2}$

  Como $|x + 7|$ é sempre positivo, para $x < -\dfrac{1}{2}$ a desigualdade sempre é válida.

  Logo, $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{1}{2}\right\}$.

- 2º caso: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

  $|x + 7| > 2x + 1 \Rightarrow \left|-\dfrac{1}{2} + 7\right| > 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{13}{2} > 0$ (verdadeiro)

  Logo, a desigualdade é verdadeira se $x = -\dfrac{1}{2}$.

  Assim, $S_2 = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

- 3º caso: $2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{1}{2}$

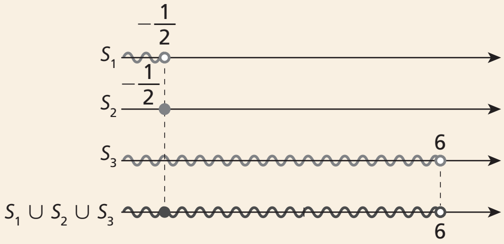
  $|x + 7| > 2x + 1$

  $x + 7 < -2x - 1$ ou $x + 7 > 2x + 1$

  $3x < -8 \Rightarrow x < -\dfrac{8}{3}$ ou $-x > -6 \Rightarrow x < 6$

  Nesse caso, a solução é a união das soluções parciais:
  $S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

  Considerando a união das soluções dos três casos:

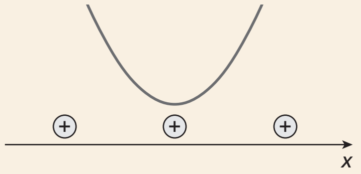


Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$.

c) $|(x - 3)^2 + 2| \geqslant 3$

$\underbrace{(x - 3)^2 + 2 \leqslant -3}_{\text{(I)}}$ ou $\underbrace{(x - 3)^2 + 2 \geqslant 3}_{\text{(II)}}$

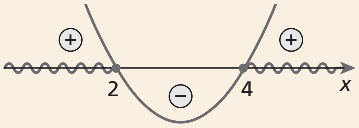
(I) $(x - 3)^2 + 2 \leqslant -3 \Rightarrow x^2 - 6x + 14 \leqslant 0$
$f(x) = x^2 - 6x + 14$ (f não tem zeros)



$S_I = \varnothing$

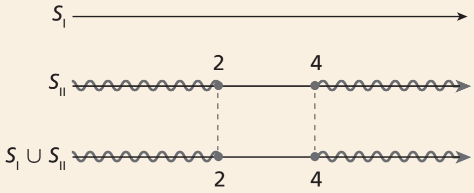
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

(II) $(x - 3)^2 + 2 \geq 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0$
$g(x) = x^2 - 6x + 8$ (zeros de g: 2 e 4)



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$

Essa questão é resolvida pela união das soluções parciais:



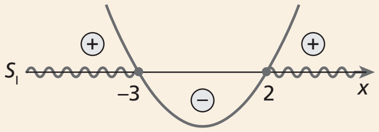
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$.

d) $|x^2 - x - 6| \leq 2x$
Estudando o 2º membro da desigualdade, temos:

- 1º caso: $2x < 0 \Rightarrow x < 0$
  Como $|x^2 - x - 6|$ é sempre positivo ou nulo, $x < 0$ não satisfaz a desigualdade.
- 2º caso: $2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow |x^2 - x - 6| \leq 2x \Rightarrow |0^2 - 0 - 6| \leq 2 \cdot 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 6 \leq 0$ (falso)
  Logo, $x = 0$ não satisfaz a desigualdade.
- 3º caso: $2x > 0 \Rightarrow x > 0$

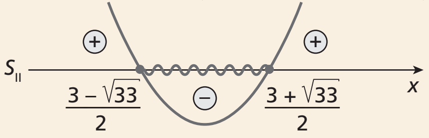
$$|x^2 - x - 6| \leq 2x \Rightarrow \mathrlap{\overbrace{}^{\text{(I)}}}-2x \leq \underbrace{x^2 - x - 6 \leq 2x}_{\text{(II)}}$$

(I) $x^2 + x - 6 \geq 0$
$f(x) = x^2 + x - 6$ (zeros de f: −3 e 2)

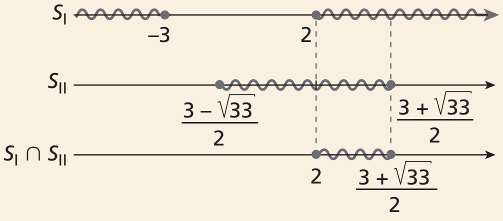


(II) $x^2 - 3x - 6 \leq 0$

$g(x) = x^2 - 3x - 6 \left(\text{zeros de } g\text{: } \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}\right)$



Fazendo a intersecção das soluções:


S_I
−3
2
S_{II}
$\frac{3 - \sqrt{33}}{2}$
$\frac{3 + \sqrt{33}}{2}$
$S_I \cap S_{II}$
2
$\frac{3 + \sqrt{33}}{2}$

Pelo estudo do 2º membro, $x > 0$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{33}}{2}\right\}$.

16. a) $y = \dfrac{\sqrt{|x|}}{|x|}$

$|x| \neq 0$ e $|x| \geq 0$ (verdadeiro sempre)
Assim: $|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$
Portanto, $D = \mathbb{R}^*$.

b) $y = \left|\dfrac{-2x^2 + 4}{3x + 1}\right|$

$3x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{3}$

Portanto, $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

c) $y = \dfrac{5x^2}{|16 - x^2|} - \sqrt{\dfrac{2}{|x + 1|}}$

$|16 - x^2| \neq 0 \Rightarrow 16 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq +4$ e $x \neq -4$

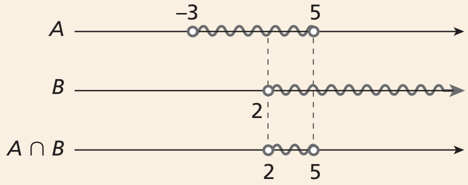
$\dfrac{2}{|x + 1|} \geq 0$; o que vale sempre, pois:
$2 > 0$
$|x + 1| \geq 0$
$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
Portanto, $D = \mathbb{R} - \{-4, -1, 4\}$.

17. • $|x - 1| < 4 \Rightarrow \mathrlap{\underbrace{\phantom{-4 < x - 1}}_{\text{(I)}}}-4 < \overbrace{x - 1 < 4}^{\text{(II)}}$

(I) $-4 < x - 1 \Rightarrow x > -3$
(II) $x - 1 < 4 \Rightarrow x < 5$
Logo, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$.

• $2x + 3 > 7 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$
Logo, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

Assim:

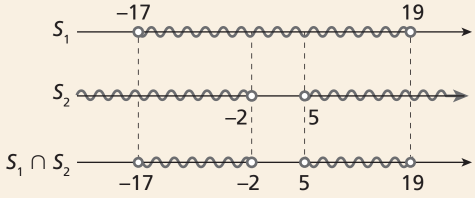


$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

18. $\begin{cases} \left|\dfrac{x - 1}{3}\right| < 6 \\ |2x - 3| > 7 \end{cases}$

- Resolvendo a 1ª inequação, temos:
  $-6 < \dfrac{x - 1}{3} < 6$
  $-6 < \dfrac{x - 1}{3}$ e $\dfrac{x - 1}{3} < 6 \Rightarrow -17 < x$ e $x < 19$
  Logo, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -17 < x < 19\}$.
- Resolvendo a 2ª inequação, temos:
  $2x - 3 < -7$ ou $2x - 3 > 7$
  $x < -2$ ou $x > 5$
  Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$.

Fazendo a intersecção das soluções das duas inequações:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -17 < x < -2 \text{ ou } 5 < x < 19\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

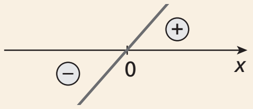
19. $\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| \geqslant 1$

$\dfrac{x-2}{x+2} \leqslant -1$ (I) ou $\dfrac{x-2}{x+2} \geqslant 1$ (II)

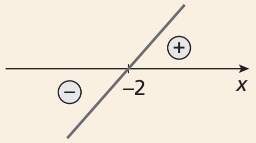
(I) $\dfrac{x-2}{x+2} + 1 \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x-2+x+2}{x+2} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{2x}{x+2} \leqslant 0$

Estudando o sinal das funções f e g, tal que $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 2$, temos:

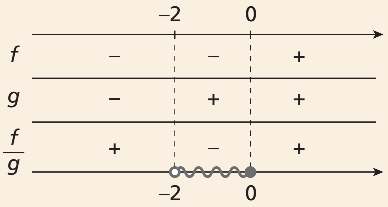
- $f(x) = 2x$ (zero de f: 0)



- $g(x) = x + 2$ (zero de g: -2)



Quadro de sinais



Logo, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 0\}$.

(II) $\dfrac{x-2}{x+2} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x-2-x-2}{x+2} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{-4}{x+2} \geqslant 0$

Como $-4 < 0$, devemos ter: $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$
$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

$S_I \cup S_{II} = S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ e } x \neq -2\}$
O maior número inteiro x é 0.

Exercícios complementares

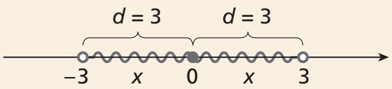
1. a) Como $\sqrt{2} > 1$ e $7 > \sqrt{3}$:

$|1-\sqrt{2}| - |7-\sqrt{3}| = \sqrt{2} - 1 - 7 + \sqrt{3} =$

$= -8 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) Como $\pi > 1$ e $\pi > 2$:
$\big|1 - |1-\pi|\big| = |1 - \pi + 1| = \pi - 2$

2. Se $|x| < 3$, então a distância entre o número x e o zero, na reta real, é menor que 3. Assim:



Logo, $-3 < x < 3$.

3. $\dfrac{|x|}{x} + 3$

Temos: $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

- Para $x < 0$:
$\dfrac{|x|}{x} + 3 = \dfrac{-x}{x} + 3 = -1 + 3 = 2$
- Para $x > 0$:
$\dfrac{|x|}{x} + 3 = \dfrac{x}{x} + 3 = 1 + 3 = 4$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4. $f(x) = \big|x - |2-x|\big|$

$|2-x| = \begin{cases} 2-x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -2+x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

- Então, se $x \leqslant 2$:
$f(x) = |x - (2-x)| = |x - 2 + x| = |2x - 2|$

$f(x) = \begin{cases} 2x-2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -2x+2, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

Fazendo a intersecção com $x \leqslant 2$, temos:

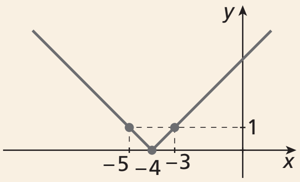
$f(x) = \begin{cases} 2x-2, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2x+2, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

- Se $x > 2$:
$f(x) = |x - (-2+x)| = |x + 2 - x| = |2| = 2$

Logo: $f(x) = \begin{cases} -2x+2, \text{ se } x < 1 \\ 2x-2, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

5. a) $f(x) = |x+4| = \begin{cases} x+4, \text{ se } x \geqslant -4 \\ -x-4, \text{ se } x < -4 \end{cases}$

esboço do gráfico de f

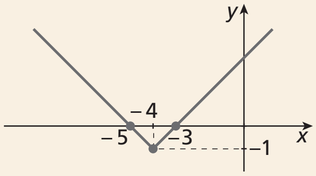


$\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

b) $g(x) = |x+4| - 1$

$g(x) = \begin{cases} x+4-1 = x+3, \text{ se } x \geqslant -4 \\ -x-4-1 = -x-5, \text{ se } x < -4 \end{cases}$

esboço do gráfico de g

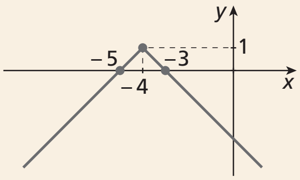


$\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

c) $h(x) = 1 - |x+4|$

$h(x) = \begin{cases} 1-x-4 = -x-3, \text{ se } x \geqslant -4 \\ 1+x+4 = x+5, \text{ se } x < -4 \end{cases}$

esboço do gráfico de h

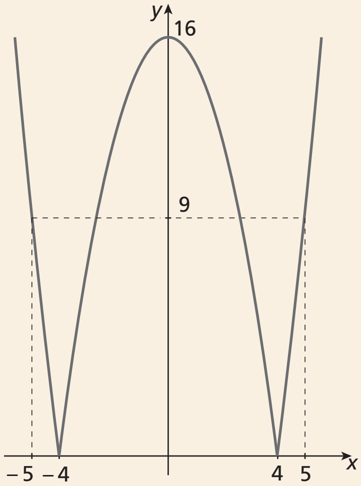


$\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$

Comentário: Nessa atividade, é possível explorar o deslocamento do gráfico da função f quando $|f(x)| - a$ e $a - |f(x)|$.

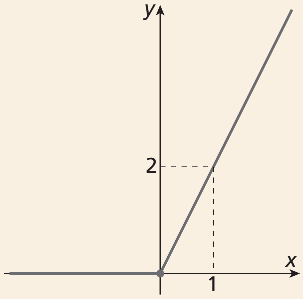
6. a) $y = |x^2 - 16| = \begin{cases} x^2 - 16, \text{ se } x^2 - 16 \geqslant 0 \\ -x^2 + 16, \text{ se } x^2 - 16 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 16, \text{ se } x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant 4 \\ -x^2 + 16, \text{ se } -4 < x < 4 \end{cases}$



b) $y = x + |x|$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$



7. **a)** $f(x) = 0$ para $x = 1$ ou $x = 5$;
$f(x) > 0$ para $x \neq 1$ e $x \neq 5$.
b) A função é decrescente em $]-\infty, 1]$ e $[3, 5]$;
a função é crescente em $[1, 3]$ e $[5, +\infty[$.

8. No eixo x, temos $y = 0$.
a) $|x^2 - 5x| = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 5$
Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x nos pontos $(0, 0)$ e $(5, 0)$.
b) $|\pi x + 8| = 0 \Rightarrow \pi x + 8 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{8}{\pi}$

Logo, o gráfico de g intercepta o eixo x no ponto $\left(-\dfrac{8}{\pi}, 0\right)$.

9. Sabemos que: $L(x) = 50\,(|x - 100| + |x - 200|)$ e $x \in \mathbb{N}$, com $1 \leqslant x \leqslant 365$
Então:
$L(x) = 10.000$
$50\,(|x - 100| + |x - 200|) = 10.000$
$|x - 100| + |x - 200| = 200$

$$|x - 100| = \begin{cases} x - 100, \text{ se } x \geqslant 100 \\ -x + 100, \text{ se } x < 100 \end{cases}$$

$$|x - 200| = \begin{cases} x - 200, \text{ se } x \geqslant 200 \\ -x + 200, \text{ se } x < 200 \end{cases}$$

Vamos analisar os três casos: $x < 100$ ou $100 \leqslant x < 200$ ou $x \geqslant 200$

- Se $x < 100$:
  $-x + 100 - x + 200 = 200 \Rightarrow x = 50$
- Se $100 \leqslant x < 200$:
  $x - 100 - x + 200 = 200 \Rightarrow 100 = 200$ (falso)
- Se $x \geqslant 200$:
  $x - 100 + x - 200 = 200 \Rightarrow x = 250$

Logo, $x = 50$ ou $x = 250$.
Portanto, o lucro da empresa foi de R$ 10.000,00 nos dias 50 e 250.

10. **a)** $x^2 - 2|x| - 2 = 1$

- Se $x \geqslant 0$:
  $x^2 - 2|x| - 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$
  Como $x \geqslant 0$, só serve $x = 3$.
- Se $x < 0$:
  $x^2 - 2|x| - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = -3$ ou $x = 1$
  Como $x < 0$, só serve $x = -3$.

Assim, $S = \{-3, 3\}$.

b) $$|x - 4| = |2x - 3| \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 2x - 3 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x - 4 = -2x + 3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $-x = 1 \Rightarrow x = -1$
(II) $3x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{3}$

Portanto, $S = \left\{-1, \dfrac{7}{3}\right\}$.

c) $$|3x - 9| = |x^2 - 9| \Rightarrow \begin{cases} 3x - 9 = x^2 - 9 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ 3x - 9 = -x^2 + 9 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$
(II) $x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -6$

Portanto, $S = \{-6, 0, 3\}$.

d) $$\left|\frac{1 - |x|}{3}\right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - |x|}{3} = 1 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ \dfrac{1 - |x|}{3} = -1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(I) Se $x \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1 - x}{3} = 1 \Rightarrow x = -2$ (não serve)

Se $x < 0 \Rightarrow \dfrac{1 + x}{3} = 1 \Rightarrow x = 2$ (não serve)

(II) Se $x \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1 - x}{3} = -1 \Rightarrow x = 4$

Se $x < 0 \Rightarrow \dfrac{1 + x}{3} = -1 \Rightarrow x = -4$

Logo, $S = \{-4, 4\}$.

11. $V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$

$$|4 - 2t| = \begin{cases} 4 - 2t, \text{ se } t \leqslant 2 \\ -4 + 2t, \text{ se } t > 2 \end{cases}$$

$$|2t - 6| = \begin{cases} 2t - 6, \text{ se } t \geqslant 3 \\ -2t + 6, \text{ se } t < 3 \end{cases}$$

Temos: $t \leqslant 2$ ou $2 < t < 3$ ou $t \geqslant 3$

- Se $t \leqslant 2$:
  $V = 10 - (4 - 2t) - (-2t + 6)$
  $V = 10 - 4 + 2t + 2t - 6$
  $V = 4t$
- Se $2 < t < 3$:
  $V = 10 - (-4 + 2t) - (-2t + 6)$
  $V = 10 + 4 - 2t + 2t - 6$
  $V = 8$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

- Se $t \geqslant 3$:
  $V = 10 - (-4 + 2t) - (2t - 6)$
  $V = 10 + 4 - 2t - 2t + 6$
  $V = -4t + 20$

Portanto, a função é constante para $2 < t < 3$.
Como o volume é medido a partir das 8 h, concluímos que o volume permanece constante entre 10 h e 11 h.

12. **a)** $E = \left|\frac{5}{9}(t_F - 32) - \frac{1}{2}(t_F - 32)\right| < 50$

$$\left|\frac{10t_F - 320 - 9t_F + 288}{18}\right| < 50$$

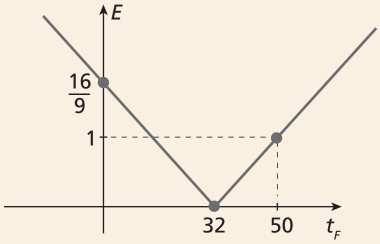
$$\left|\frac{t_F - 32}{18}\right| < 50 \Rightarrow -50 < \frac{t_F - 32}{18} < 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -900 < t_F - 32 < 900 \Rightarrow -868 < t_F < 932$$

Para que o erro seja menor que 50 °F, t_F deve estar entre −868 °F e 932 °F.

b) $E = \left|\frac{t_F - 32}{18}\right| = \begin{cases} \frac{t_F - 32}{18}, \text{ se } t_F \geqslant 32 \\ \frac{-t_F + 32}{18}, \text{ se } t_F < 32 \end{cases}$

t_F	E
0	$\frac{16}{9}$
32	0
50	1



13. $f(x) = x^2 - 2x + |k - 1|$
O valor mínimo da função f é a ordenada do vértice da parábola que representa essa função; logo:

$$y_V = -1 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = -1 \Rightarrow \frac{-(4 - 4 \cdot 1 \cdot |k - 1|)}{4 \cdot 1} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - 4|k - 1| = 4 \Rightarrow -4|k - 1| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |k - 1| = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

14. $y = x^2 + mx + |5 - m|$
Para que o gráfico tangencie o eixo x, devemos ter $\Delta = 0$. Então:
$m^2 - 4 \cdot 1 \cdot |5 - m| = 0$
Temos:

$$|5 - m| = \begin{cases} 5 - m, \text{ se } m \leqslant 5 \\ -5 + m, \text{ se } m > 5 \end{cases}$$

- Se $m \leqslant 5$:
  $m^2 - 4 \cdot (5 - m) = 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 20 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow m = -2 + 2\sqrt{6}$ ou $m = -2 - 2\sqrt{6}$
- Se $m > 5$:
  $m^2 - 4 \cdot (-5 + m) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 20 = 0 \Rightarrow$
  ⇒ não existe m real

Portanto, $m = -2 + 2\sqrt{6}$ ou $m = -2 - 2\sqrt{6}$.

15. $f(x) = x|x| - 2x + 2$

- Se $x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 2$

$$\begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \\ f(1) = 1 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

- Se $x < 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x + 2$

$$\begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \\ f(-1) = 3 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

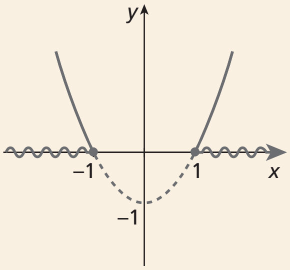
alternativa e

Autoavaliação

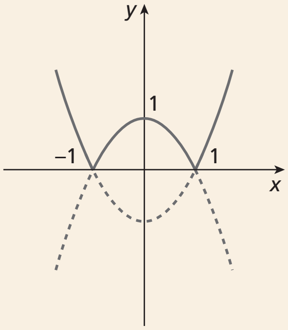
1. **a)** Falsa, pois: $|5 - 8| = |-3| = 3$
b) Verdadeira, pois: $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = |3|$
c) Verdadeira, pois: $\left|-1 + \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{-3 + 1}{3}\right| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$
e $\left|1 - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3 - 1}{3}\right| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$
d) Falsa, pois: $|-5 + 3| = |-2| = 2$
e $|-5| + |3| = 5 + 3 = 8$

2. **a)** $x < -2 \Rightarrow |x + 2| - |x - 3| = -x - 2 - (-x + 3) = -5$
b) $-2 \leqslant x < 3 \Rightarrow |x + 2| - |x - 3| = x + 2 - (-x + 3) =$
$= 2x - 1$
c) $x \geqslant 3 \Rightarrow |x + 2| - |x - 3| = x + 2 - (x - 3) = 5$
d) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x + 2| - |x - 3| = \begin{cases} -5, \text{ se } x < -2 \\ 2x - 1, \text{ se } -2 \leqslant x < 3 \\ 5, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$

3. Vamos traçar o gráfico de f, tal que $f(x) = |g(x)|$, partindo do gráfico da função g.
Construímos o gráfico da função g, sabendo que $g(x) = x^2 - 1$, e determinamos o intervalo em que a função g é positiva ou nula.
Para $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$, o gráfico de f segue a lei $y = x^2 - 1$.



O gráfico de f pode ser obtido do gráfico de g, mantendo as partes acima do eixo x e refletindo, em relação ao eixo x, as partes que estão abaixo dele.
Para $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$, o gráfico de f coincide com a parábola $y = x^2 - 1$; para $-1 < x < 1$, coincide com a parábola $y = -x^2 + 1$.



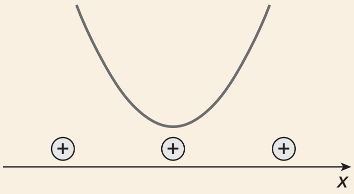
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Com base no gráfico, observamos que $D(f) = \mathbb{R}$ e que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

4. Observando o gráfico de $f(x) = |x + 3| - 2$:
$f(x) > 0$ para $x < -5$ ou $x > -1$;
$f(x) = 0$ para $x = -5$ ou $x = -1$;
$f(x) < 0$ para $-5 < x < -1$.
A função f é decrescente no intervalo $]-\infty, -3]$ e é crescente no intervalo $[-3, +\infty[$.

5. $g(x) = |x^2 - x + 3| = \begin{cases} x^2 - x + 3, \text{ se } x^2 - x + 3 \geqslant 0 \\ -x^2 + x - 3, \text{ se } x^2 - x + 3 < 0 \end{cases}$

Vamos determinar os zeros de $f(x) = x^2 - x + 3$:
$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0 \Rightarrow f$ não tem zeros
Como $a > 0$, a concavidade da parábola correspondente é voltada para cima:



Logo, $x^2 - x + 3$ é sempre positivo e, portanto, $g(x) = x^2 - x + 3$.

a) Falsa, pois a função é sempre positiva.
b) Falsa, pois a função não tem zeros reais.
c) verdadeira
d) verdadeira

6. a) $|x - 7| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 7 = 5 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x - 7 = -5 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $x - 7 = 5 \Rightarrow x = 12$
(II) $x - 7 = -5 \Rightarrow x = 2$
Portanto, os valores de x que tornam a sentença verdadeira são 2 e 12.

b) $|2x + 7| = -2$
Não existe x real nesse caso, pois o resultado de um módulo nunca é negativo.

c) $|4x + 5| = 0 \Rightarrow 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{4}$
Portanto, o valor de x que torna a sentença verdadeira é $-\dfrac{5}{4}$.

d) $|x^2 - 3| = -1$
Não existe x real nesse caso, pois o resultado de um módulo nunca é negativo.

7. a) $x + |x - 1| = 7 \Rightarrow |x - 1| = 7 - x$
Condição inicial: $7 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 7$

$|x - 1| = 7 - x \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 7 - x & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x - 1 = -(7 - x) & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $x - 1 = 7 - x \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$
(II) $x - 1 = -(7 - x) \Rightarrow x - 1 = -7 + x \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 = -6$ (falso)
Logo, $S = \{4\}$.

b) $\left|\dfrac{x - 1}{-4 + x}\right| = 6 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - 1}{-4 + x} = 6 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ \dfrac{x - 1}{-4 + x} = -6 & \text{(II)} \end{cases}$

Condição inicial: $-4 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

(I) $\dfrac{x - 1}{-4 + x} = 6 \Rightarrow x - 1 = 6(-4 + x) \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 1 = -24 + 6x \Rightarrow -5x = -23 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{23}{5}$

(II) $\dfrac{x - 1}{-4 + x} = -6 \Rightarrow x - 1 = -6(-4 + x) \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 1 = 24 - 6x \Rightarrow 7x = 25 \Rightarrow x = \dfrac{25}{7}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{23}{5}, \dfrac{25}{7}\right\}$.

c) $3 \cdot |x| + x = 4 \Rightarrow 3 \cdot |x| = 4 - x \Rightarrow |x| = \dfrac{4 - x}{3}$

Condição inicial: $\dfrac{4 - x}{3} \geqslant 0 \Rightarrow 4 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 4$

$|x| = \dfrac{4 - x}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 - x}{3} & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{4 - x}{3} & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $x = \dfrac{4 - x}{3} \Rightarrow 3x = 4 - x \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$

(II) $x = -\dfrac{4 - x}{3} \Rightarrow 3x = -4 + x \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -2$
Logo, $S = \{-2, 1\}$.

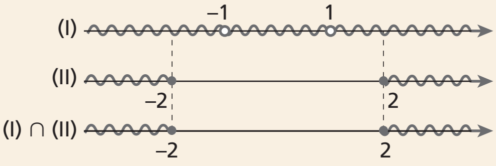
d) $7 \cdot |x|^2 + 2 \cdot |x| = 0$
Fazendo $|x| = y$, temos:
$7y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y(7y + 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ 7y + 2 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$

Como $|x| = y$, $y = -\dfrac{2}{7}$ não é possível.
Então: $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$
Portanto, $S = \{0\}$.

8. a) $y = \dfrac{\sqrt{|x| - 2}}{x^2 - 1}$

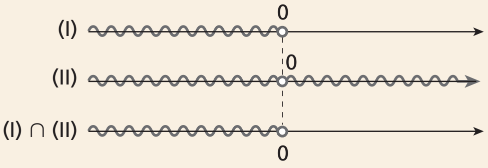
(I) $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$
(II) $|x| - 2 \geqslant 0 \Rightarrow |x| \geqslant 2 \Rightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$
Fazendo a intersecção, temos:



Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

b) $y = \dfrac{|x - \sqrt{-x}|}{\sqrt{|-x|}}$

Devemos ter $-x > 0$ e $|-x| > 0$
(I) $-x > 0 \Rightarrow x < 0$
(II) $|-x| > 0 \Rightarrow x \neq 0$



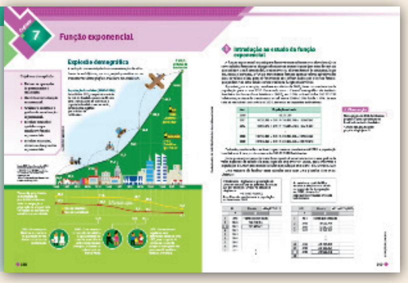
Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

9. Resposta possível: $-|x| + 2 > 1$, pois a solução dessa inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 7

Função exponencial



Esse capítulo retoma o conceito de potência, operações entre potências e as respectivas propriedades, iniciando por potências de expoente natural e ampliando para as de expoente irracional. Essa revisão é imprescindível para o desenvolvimento do tema central do capítulo, função exponencial, assim como para a resolução de equações, sistemas e inequações exponenciais.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. **a)** $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{125}$

c) $0^{10} = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

d) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right) \cdot \left(\frac{9}{8}\right) = \frac{81}{64}$

e) $3^0 = 1$

f) $\pi^1 = \pi$

2. **a)** $10^9 \cdot 10^{-4} = 10^{9 + (-4)} = 10^5 = 100.000$

b) $\frac{13^{19}}{13^{17}} = 13^{19} : 13^{17} = 13^{19-17} = 13^2 = 169$

c) $(-5)^{15} : (-5)^{12} = (-5)^{15-12} = (-5)^3 = -125$

d) $2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-1+(-2)} = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

e) $(10 \cdot 7)^2 = 10^2 \cdot 7^2 = 100 \cdot 49 = 4.900$

f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$

g) $(2^3)^2 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

h) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^5\right)^0 = \left(\sqrt{7}\right)^{5 \cdot 0} = \left(\sqrt{7}\right)^0 = 1$

3. A diferença de tempo, em ano, entre o surgimento do *Homo habilis* e o do *Homo erectus* é de aproximadamente:
$2.200.000 - 2.000.000 = 200.000 = 2 \cdot 10^5$
alternativa b

4. **a)** $\sqrt{1,69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \sqrt{\frac{13^2}{10^2}} = \frac{13}{10} = 1,3$

b) $\sqrt[3]{-1,728} = \sqrt[3]{\frac{-1.728}{1.000}} = \sqrt[3]{\frac{(-12)^3}{10^3}} = \frac{-12}{10} = -1,2$

Comentário: Nos itens **a** e **b**, os alunos devem ser incentivados a resolver por meio de tentativa e erro, aplicando seus conhecimentos prévios a respeito de raízes envolvendo apenas números naturais.

No item **a**, os alunos podem procurar o número natural que elevado ao quadrado seja igual a 169. E, no item **b**, o número natural que elevado ao cubo resulta em 1.728. A partir desses valores, é mais fácil encontrar as raízes dos números racionais.

c) $81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$

d) $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{4 \cdot 4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

5. **a)** $121^{0,9} : 121^{0,4} = 121^{0,9-0,4} = 121^{0,5} = 121^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121} = 11$

b) $(0,3)^8 \cdot (0,3)^{-7} : (0,3)^{-2} = (0,3)^{8+(-7)-(-2)} = (0,3)^{8-7+2} =$
$= (0,3)^3 = 0,027$

c) $\frac{(-3)^{\frac{1}{3}}}{(-3)^2 \cdot (-3)^{-3}} = (-3)^{\frac{1}{3} - [2 + (-3)]} = (-3)^{\frac{1}{3} + 1} = (-3)^{\frac{4}{3}} =$
$= \sqrt[3]{(-3)^4} = -3\sqrt[3]{-3}$

d) $\left[(-32)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{4}{25}} = (-32)^{\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{25}} = (-32)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-32)^2} =$
$= \sqrt[5]{[(-2)^5]^2} = (-2)^2 = 4$

6. **a)** $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{80} + \sqrt{180} = \sqrt{2^4 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} =$
$= 2 \cdot 2\sqrt{5} + 2 \cdot 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

7. **a)** $\frac{2}{\sqrt{3} - 3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 3}\right) = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 3^2} =$

$= \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{3 - 9} = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{-6} = \frac{2}{-6}(\sqrt{3} + 3) = \frac{-\sqrt{3} - 3}{3}$

b) $\frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}\right) =$

$= \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} =$

$= \frac{\sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} =$

$= \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} =$

$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} =$

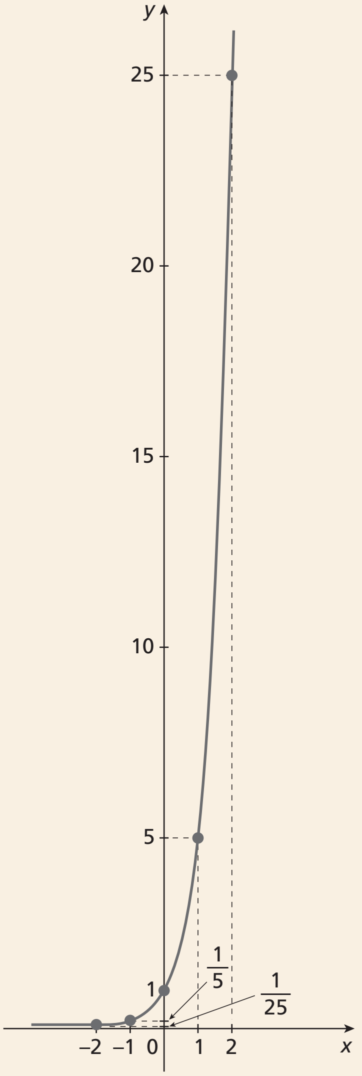
$= \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

8. Com o uso de calculadora, sabemos que $\sqrt{2} \simeq 1,4$. Ou seja, $5^{\sqrt{2}} \simeq 5^{1,4}$. Esse número está no intervalo entre 5^1 e 5^2, ou seja, entre 5 e 25.

Comentário: Explicar aos alunos que aqui se usa a ideia da interpolação. É interessante que eles tentem localizar, no gráfico da resolução do item **a** do exercício **9**, o ponto de coordenadas $\left(\sqrt{2}, 5^{\sqrt{2}}\right)$.

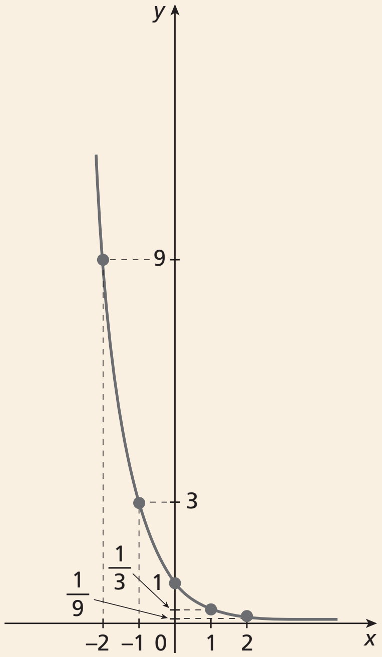
9. **a)** $f(x) = 5^x$

x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{25}$
-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25



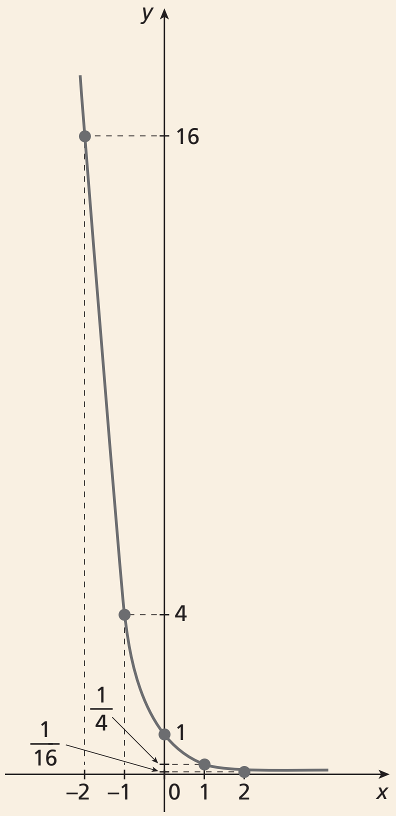
b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$g(x)$
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



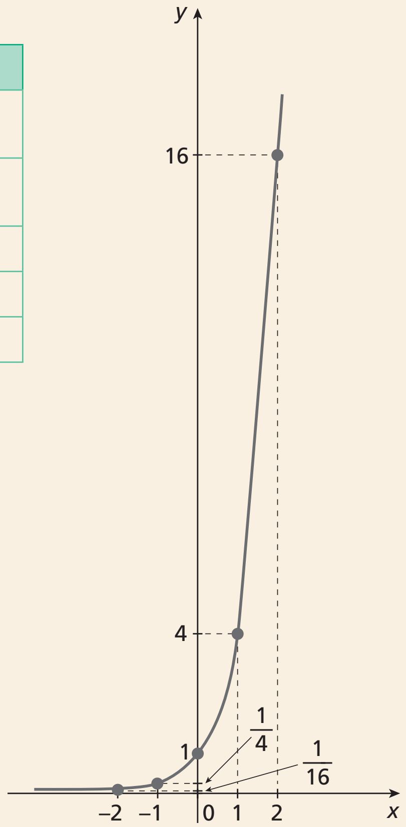
c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	$h(x)$
-2	16
-1	4
0	1
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$



d) $i(x) = 4^x$

x	$i(x)$
-2	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10. Analisando as quatro leis, podemos concluir que apenas uma das funções é decrescente, com base entre 0 e 1. Essa função é a h, cuja lei é $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. Observando os gráficos, apenas o IV é decrescente; logo, a função h corresponde ao gráfico IV.

Também poderíamos verificar que:

- $h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} - 1 = 0$
- $h(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 1 = 3$

Para analisar as funções *f*, *g* e *i* dadas nos itens **a**, **b** e **d**, respectivamente, podemos encontrar alguns pontos:

a) $f(x) = 3^{x+1}$

$f(-1) = 3^{-1+1} = 1$

$f(0) = 3^{0+1} = 3$

Ou seja, *f* é crescente e passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(0, 3)$. O gráfico correspondente é o III.

b) $g(x) = 2^{x} + 1$

$g(0) = 2^{0} + 1 = 2$

$g(1) = 2^{1} + 1 = 3$

Ou seja, *g* é crescente e passa pelos pontos $(0, 2)$ e $(1, 3)$. O gráfico correspondente é o I.

d) $i(x) = 4^{x-1}$

$i(1) = 4^{1-1} = 1$

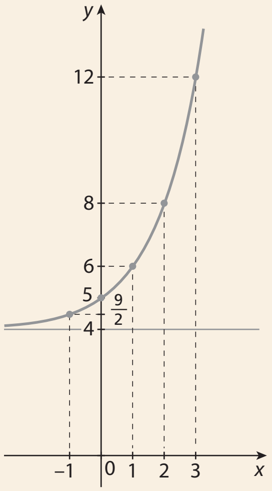
$i(0) = 4^{0-1} = \frac{1}{4}$

Ou seja, *i* é crescente e passa pelos pontos $(1, 1)$ e $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. O gráfico correspondente é o II.

Comentário: Essa questão pode ser mais bem explorada propondo aos alunos um trabalho de pesquisa, em especial se for possível utilizar um *software* de construção de gráficos, que permite agilidade para testar diversos exemplos. Avaliar a conveniência de esse trabalho ser feito em grupo. Veja algumas sugestões de atividade:

- Pedir um esboço dos gráficos das funções g_1, g_2, g_3 e g_4 dadas por $g_1(x) = 2^{x}$, $g_2(x) = 2^{x} + 2$, $g_3(x) = 2^{x} + 3$ e $g_4(x) = 2^{x} - 1$ em um mesmo plano cartesiano. Depois, os alunos devem redigir um texto explicando como obter o gráfico da função $g(x) = 2^{x} + k$, a partir do gráfico de g_1.
  Espera-se que eles percebam que o gráfico de *g* é obtido deslocando-se o gráfico de g_1, verticalmente, *k* unidades, no mesmo sentido do eixo *y* se $k > 0$ e em sentido contrário se $k < 0$.
- Pedir um esboço dos gráficos das funções f_1, f_2, f_3 e f_4 dadas por $f_1(x) = 3^{x}$, $f_2(x) = 3^{x+2}$, $f_3(x) = 3^{x-1}$ e $f_4(x) = 3^{x-2}$ em um mesmo plano cartesiano. Depois, os alunos devem redigir um texto explicando como obter o gráfico da função $f(x) = 3^{x+k}$, a partir do gráfico de f_1.
  Espera-se que eles percebam que o gráfico de *f* é obtido deslocando-se o gráfico de f_1, horizontalmente, *k* unidades, em sentido contrário ao do eixo *x* se $k > 0$ e no mesmo sentido se $k < 0$.

11. A figura ao lado mostra parte do gráfico da função $f(x) = 2^{x} + 4$.



ADILSON SECCO

Logo, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$.

Comentário: Espera-se que os alunos percebam que o gráfico da função *f* é o gráfico da função $g(x) = 2^{x}$ transladado 4 unidades para cima. A partir disso, é possível obter o conjunto imagem de *f* sem construir seu gráfico.

12. a) $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{x}$

A base *a* é $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ $(a > 1)$; então, a função é crescente.

b) $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x}$

A base *a* é $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$ $(0 < a < 1)$; então, a função é decrescente.

c) $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{x}$

A base *a* é $\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ $(a > 1)$; então, a função é crescente.

13. Como $a = -b$, temos: $f(x) = 2^{x+a} + b = f(x) = 2^{x-b} + b$

Pelo gráfico, $f(1) = 2$ e $f(2) = 3$; então:

$f(x) = 2^{x-b} + b \Rightarrow f(1) = 2^{1-b} + b = 2$

$f(2) = 2^{2-b} + b = 3$

Assim:

$$\begin{cases} 2^{1} \cdot 2^{-b} + b = 2 \\ 2^{2} \cdot 2^{-b} + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot 2^{-b} - b = -2 \\ 4 \cdot 2^{-b} + b = 3 \end{cases}$$

Adicionando as equações do sistema, membro a membro, obtemos: $2 \cdot 2^{-b} = 1 \Rightarrow 2^{-b} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-b} = 2^{-1} \Rightarrow -b = -1 \Rightarrow b = 1$

Como $a = -b$, temos $a = -1$. Assim, $a = -1$ e $b = 1$.

Comentário: Esse exercício traz dados a mais que o estritamente necessário para a resolução. É interessante questionar os alunos se, retirada a informação sobre as coordenadas de um dos três pontos destacados no gráfico, ainda assim a resolução seria possível.

14. $f(x) = 5^{x}$

a) $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5$ **c)** $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{5^2}{5^1} = 5^{2-1} = 5$

b) $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5$ **d)** $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{5^1}{5^0} = 5^{1-0} = 5$

- Os resultados são todos iguais.
- $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

a) $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-1} = \frac{1}{4}$

d) $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1}{\left(\frac{1}{4}\right)^0} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-0} = \frac{1}{4}$

- Sim, os resultados são sempre iguais à base *a* da função.
- Para $f(x) = a^{x}$, concluímos que: $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$

Comentário: Espera-se que os alunos relacionem a função exponencial de domínio natural com uma PG.

15. a) Pelo gráfico, a radioatividade está diminuindo, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

b) O minério não deixará de ser radioativo, porque a curva não intercepta o eixo x.

c) Pelo gráfico, a função é decrescente; então, os possíveis valores de a são elementos do conjunto:
$\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

Comentário: Essa atividade, assim como o exercício proposto **24** e o exercício **17** da sequência dos exercícios complementares, propicia uma abordagem conceitual interdisciplinar com Física e Química. Convém avaliar com outros professores a possibilidade de pedir aos alunos uma pesquisa sobre energia nuclear.

16. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$M = 20.000{,}00 \cdot (1 + 0{,}12)^3$
$M = 20.000{,}00 \cdot 1{,}12^3$
$M = 20.000{,}00 \cdot 1{,}404928$
$M = 28.098{,}56$
O montante será R$ 28.098,56.

17. a) As batatas saíram do forno em $t = 0$. Logo, a temperatura T era dada por:
$T = 20 + 160 \cdot e^{-6 \cdot 0} = 20 + 160 \cdot e^0 = 20 + 160 \cdot 1$
$\therefore\ T = 180\ °C$

b) Temos que 30 minutos é igual à meia hora. Logo, a temperatura será dada para $t = 0{,}5$.
$T = 20 + 160 \cdot e^{-6 \cdot 0{,}5} = 20 + 160 \cdot e^{-3} = 20 + 160 \cdot \dfrac{1}{e^3}$
Com o auxílio de uma calculadora, fazendo e = 2,7, obtemos:
$T \simeq 28\ °C$

18. a) Pelo gráfico, $f(0) = 5.000$. Assim, a pesquisa iniciou-se com 5.000 bactérias.

b) Pelo gráfico, $f(6) = 15.000$. Assim, a quantidade após 6 meses foi de 15.000 bactérias.

c) $f(0) = 5.000 \Rightarrow k \cdot a^0 = 5.000 \Rightarrow k = 5.000$
$f(6) = 15.000 \Rightarrow 5.000 \cdot a^6 = 15.000 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^6 = 3 \Rightarrow a = \sqrt[6]{3}$

d) $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 6\}$;
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leqslant y \leqslant 15.000\}$

e) $f(3) = 5.000 \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^3 \Rightarrow f(3) = 5.000 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(3) \simeq 5.000 \cdot 1{,}73 \Rightarrow f(3) \simeq 8.650$
Logo, após 3 meses, o número de bactérias é, aproximadamente, 8.650.

Comentário: Essa atividade, assim como os exercícios propostos **26** e **27** e o exercício complementar **9**, propicia uma abordagem conceitual interdisciplinar com Biologia.

19. a) $10^x = 1.000 \Rightarrow 10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3$
$S = \{3\}$

b) $(0{,}1)^{2x} = 10 \Rightarrow (10^{-1})^{2x} = 10 \Rightarrow 10^{-2x} = 10^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
$S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

c) $(0{,}001)^x = 1.000 \Rightarrow (10^{-3})^x = 10^3 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$
$S = \{-1\}$

d) $\left(\dfrac{1}{100}\right)^{2x} = 0{,}0001 \Rightarrow (10^{-2})^{2x} = 10^{-4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{-4x} = 10^{-4} \Rightarrow -4x = -4 \Rightarrow x = 1$
$S = \{1\}$

20. a) $2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$
$S = \{6\}$

b) $(0{,}5)^x = 4^{1 - 3x} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = (2^2)^{1 - 3x} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{2 - 6x} \Rightarrow$
$\Rightarrow -x = 2 - 6x \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$
$S = \left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

c) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x} = \dfrac{1}{128} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}x = 7 \Rightarrow x = 14$
$S = \{14\}$

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2 - 10} = \dfrac{1}{729} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2 - 10} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 10 = 6 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
$S = \{-4, 4\}$

e) $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -1 \Rightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$
Fazendo $3^x = y$, temos:
$3y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = \dfrac{1}{3}$
Como $y = 3^x$, vem:
$y = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$
$y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$
$S = \{-1, 0\}$

f) $11^{2x} + 2 \cdot 11^x = 3 \Rightarrow (11^x)^2 + 2 \cdot 11^x - 3 = 0$
Fazendo $11^x = y$, temos:
$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -3$
Como $y = 11^x$, vem:
$y = 1 \Rightarrow 11^x = 11^0 \Rightarrow x = 0$
$y = -3 \Rightarrow 11^x = -3 \Rightarrow \nexists\ x$
$S = \{0\}$

21. a) $2^x = 14 \Rightarrow 2^3 < 2^x < 2^4 \Rightarrow 3 < x < 4$

b) $3^x = 29 \Rightarrow 3^3 < 3^x < 3^4 \Rightarrow 3 < x < 4$

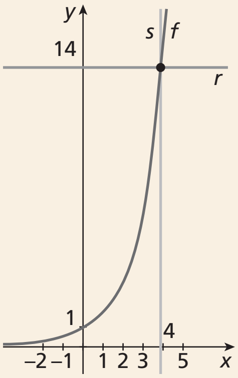
c) $3^{x+1} = 10 \Rightarrow 3^2 < 3^{x+1} < 3^3 \Rightarrow 2 < x + 1 < 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < x < 2$

d) $2^{x-1} = 100 \Rightarrow 2^6 < 2^{x-1} < 2^7 \Rightarrow 6 < x - 1 < 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7 < x < 8$

Comentário: Essa atividade resgata a ideia de cálculo por estimativa proposta no **Reflita** da página **159** do livro do aluno. É importante os alunos perceberem que, no estudo da Matemática, não há apenas questões com resultados únicos e exatos; há questões também com resultados estimados em um intervalo.

Outra maneira de estimar o valor de x, em cada item, é por meio da construção do gráfico da função cuja lei é dada pela expressão do 1º membro da igualdade. Por exemplo, no item **a**, após construir o gráfico de $f(x) = 2^x$, obtemos o valor de x tal que $2^x = 14$, traçando uma reta horizontal r pelo ponto (0, 14) e uma reta vertical s pelo ponto de intersecção de r com o gráfico de f. A reta s intercepta o eixo x em um ponto cuja abscissa é o valor procurado.

Procedimento similar a este pode ser feito em um *software* de construção de gráficos.



ADILSON SECCO

22. $f(x) = 2^{2x+1} \Rightarrow f(a) = 4f(b) \Rightarrow 2^{2a+1} = 4 \cdot 2^{2b+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{2a+1} = 2^{2b+3} \Rightarrow 2a + 1 = 2b + 3 \Rightarrow a - b = 1$
alternativa e

23. a) $\begin{cases} 2^{2x+y} = 2^2 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 & \text{(I)} \\ x - y = -\dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Somando (I) e (II), temos: $3x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Substituindo o valor de x em (II), obtemos:
$\dfrac{1}{2} - y = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 1$

Logo, $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = 1$, ou seja, $S = \left\{\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)\right\}$.

b) $\begin{cases}3^{x+y}=3^{-2}\\7^{2x}:7^{y}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{x+y}=3^{-2}\\7^{2x-y}=7^{0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=-2 \quad \text{(I)}\\2x-y=0 \quad \text{(II)}\end{cases}$

Somando (I) e (II), temos:

$3x=-2\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

Substituindo o valor de x em (I), obtemos:

$y=-2+\frac{2}{3}\Rightarrow y=-\frac{4}{3}$

$S=\left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

24. **a)** No instante inicial: $t=0\Rightarrow m(0)=2.048$

Assim: $k\cdot 2^{-0,5\cdot 0}=2.048\Rightarrow k=2.048$

b) Pelo item anterior, temos: $m(t)=2.048\cdot 2^{-0,5t}$

Logo, para descobrir em quantos minutos a massa decai para 512 gramas, basta resolver a equação a seguir.

$2.048\cdot 2^{-0,5t}=512\Rightarrow 2^{-0,5t}=\frac{512}{2.048}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-0,5t}=\frac{1}{4}\Rightarrow 2^{-0,5t}=2^{-2}\Rightarrow -0,5t=-2\Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{2}{0,5}\Rightarrow t=4$

Logo a massa decai para 512 g em 4 minutos.

25. $f(t)=a\cdot 2^{-bt}$

a) $f(0)=1.024\Rightarrow a\cdot 2^{-b\cdot 0}=1.024\Rightarrow a=1.024$

$f(10)=\frac{1.024}{2}\Rightarrow 1.024\cdot 2^{-b\cdot 10}=\frac{1.024}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-10b}=2^{-1}\Rightarrow -10b=-1\Rightarrow b=\frac{1}{10}$

Portanto, $a=1.024$ e $b=\frac{1}{10}$.

b) $\frac{1}{8}$ de 1.024 é 128

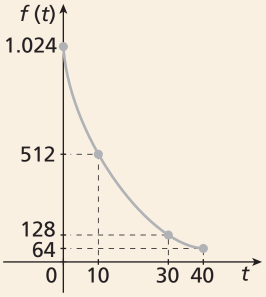
$f(t)=128\Rightarrow 1.024\cdot 2^{-\frac{1}{10}\cdot t}=128\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}}=\frac{128}{1.024}\Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}}=2^{-3}\Rightarrow -\frac{t}{10}=-3\Rightarrow$

$\Rightarrow t=30$

Logo, o tempo mínimo é de 30 anos.

c)



26. Como a massa é diretamente proporcional ao volume, para $f(t)=2$ e $K=128$, temos:

$f(t)=K\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}\Rightarrow 2=128\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{2}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}\Rightarrow\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow t=12$

alternativa b

27. Para que os gráficos tenham um ponto em comum, deve existir um valor x de modo que as imagens desse valor, pelas duas funções, coincidam, ou seja, $f(x)=g(x)$. Assim:

$\frac{1}{9^{x-1}}=3^{x+1}\Rightarrow 3^{-2x+2}=3^{x+1}\Rightarrow -2x+2=x+1\Rightarrow$

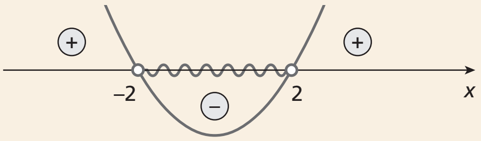
$\Rightarrow -3x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

Para $x=\frac{1}{3}$, temos:

$f\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{1}{3}\right)=3^{\frac{1}{3}+1}=3^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{3^4}=3\sqrt[3]{3}$

Portanto, o ponto de intersecção dos gráficos é $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$.

28. **a)** $6^{x^2+1}<6^5\Rightarrow x^2+1<5\Rightarrow x^2-4<0$



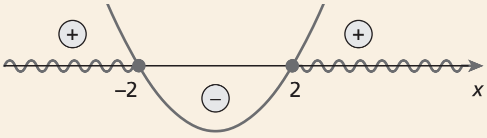
Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x<2\}$.

b) $\frac{1}{9}\geqslant 3^{x+3}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-3}\Rightarrow 2\leqslant -x-3\Rightarrow$

$\Rightarrow x\leqslant -3-2\Rightarrow x\leqslant -5$

Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant -5\}$.

c) $(0,44)^{x^2-4}\leqslant 1\Rightarrow(0,44)^{x^2-4}\leqslant(0,44)^{0}\Rightarrow x^2-4\geqslant 0$



Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant -2 \text{ ou } x\geqslant 2\}$.

d) $\sqrt[3]{3^x}>3^x\cdot 3^8\Rightarrow 3^{\frac{x}{3}}>3^{x+8}\Rightarrow\frac{x}{3}>x+8\Rightarrow$

$\Rightarrow x>3x+24\Rightarrow -2x>24\Rightarrow x<-12$

Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-12\}$.

29. **a)** $f(x)=\sqrt{3^x-243}$

Para existir $f(x)$, devemos ter:

$3^x-243\geqslant 0\Rightarrow 3^x\geqslant 243\Rightarrow 3^x\geqslant 3^5\Rightarrow x\geqslant 5$

Portanto, $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant 5\}$.

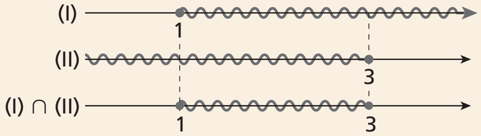
b) $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2^x}}$

Para $g(x)$ existir, devemos ter $2^x>0$, o que é verdade para qualquer x real.

Portanto, $D(g)=\mathbb{R}$.

30. **a)** $2\leqslant 2^x\leqslant 2^3$

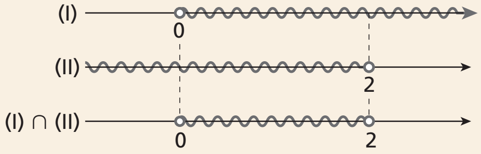
- $2\leqslant 2^x\Rightarrow 1\leqslant x\Rightarrow x\geqslant 1$ (I)
- $2^x\leqslant 2^3\Rightarrow x\leqslant 3$ (II)



Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$.

b) $\frac{1}{81}<81^{x-1}<9^x$

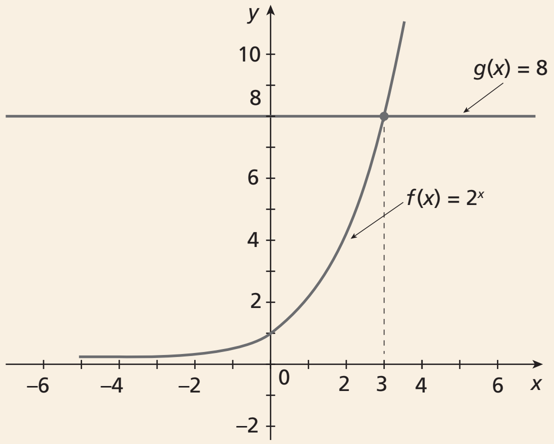
- $\frac{1}{81}<81^{x-1}\Rightarrow 81^{-1}<81^{x-1}\Rightarrow -1<x-1\Rightarrow$
  $\Rightarrow -x<-1+1\Rightarrow -x<0\Rightarrow x>0$ (I)
- $81^{x-1}<9^x\Rightarrow 9^{2x-2}<9^x\Rightarrow 2x-2<x\Rightarrow$
  $\Rightarrow 2x-x<2\Rightarrow x<2$ (II)



Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<2\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

31.



a) Para obter a abscissa em que $f(x) = g(x)$, fazemos:
$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$
Logo, $S = \{3\}$.
Podemos observar o ponto de intersecção (3, 8) no gráfico.

b) O gráfico mostra que $f(x) > g(x)$ para $x > 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) O gráfico mostra que $f(x) \leqslant g(x)$ para $x \leqslant 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

32. a) Sabemos que g é da forma $g(x) = b^x$. Pelo gráfico, temos:
$g(1) = 3 \Rightarrow b^1 = 3 \Rightarrow b = 3$
Logo, $g(x) = 3^x$.
Sabemos que f é da forma $f(x) = a^{x+k}$. Pelo gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{9} \\ f(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{0+k} = \dfrac{1}{9} \\ a^{-3+k} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^k = \dfrac{1}{9} & \text{(I)} \\ a^{-3} \cdot a^k = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$a^{-3} \cdot \frac{1}{9} = 3 \Rightarrow a^{-3} = 27 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 3^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Substituindo a por $\frac{1}{3}$ em (I), obtemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow k = 2$$

Logo: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

b) Sabemos que: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ e $g(x) = 3^x$
Os gráficos interceptam-se em $f(x) = g(x)$. Então:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 3^x \Rightarrow 3^{-x-2} = 3^x \Rightarrow -x - 2 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$$

Logo, os gráficos interceptam-se em um ponto de abscissa −1. Calculando o valor da ordenada, temos:
$f(-1) = g(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
Portanto, o ponto de intersecção é $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

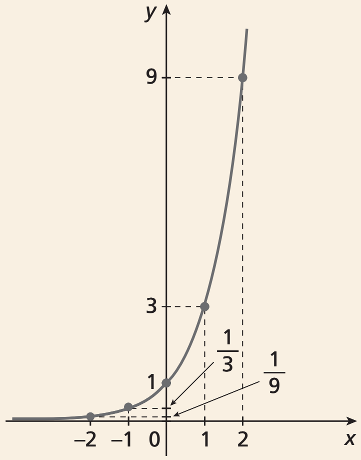
c) O intervalo representado na figura é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$, que tem início a partir do valor de x do ponto de intersecção dos gráficos: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ e $g(x) = 3^x$
Então, para obter uma inequação que tenha como resultado $x > -1$, devemos fazer $f(x) < g(x)$ ou $g(x) > f(x)$. Observando o gráfico, notamos que o intervalo destacado corresponde à parte do gráfico em que a curva azul (função f) está abaixo da curva verde (função g), ou seja, $f(x) < g(x)$.
Logo, temos a inequação: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$

d) Se $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$ tem como solução $x > -1$, a solução complementar ($x \leqslant -1$) pode ser dada por: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$

Exercícios complementares

1. a) $f(x) = 3^x$

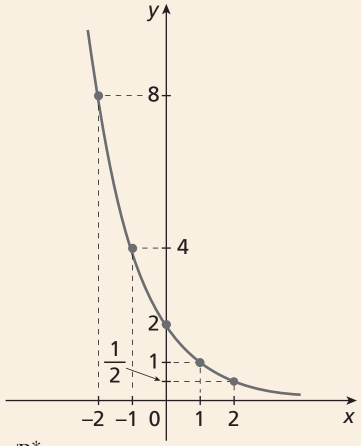
x	$f(x)$
−2	$\frac{1}{9}$
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9



$D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

x	$g(x)$
−2	8
−1	4
0	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$



$D(g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g) = \mathbb{R}_+^*$

2. $f(x) = 2^{5x}$ e $f(m) = 32 \Rightarrow f(m) = 2^{5m} \Rightarrow 2^{5m} = 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{5m} = 2^5 \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1$

$$f\left(-\frac{m}{5}\right) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = 2^{5\left(-\frac{1}{5}\right)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

3. $f(x) = 16^{1 + \frac{1}{x}}$

$$f(-1) + f(-2) - f(-4) =$$
$$= 16^{1+\frac{1}{-1}} + 16^{1+\frac{1}{-2}} - 16^{1+\frac{1}{-4}} =$$
$$= 16^{1-1} + 16^{1-\frac{1}{2}} - 16^{1-\frac{1}{4}} =$$
$$= 16^0 + 16^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{3}{4}} =$$
$$= 1 + \sqrt{16} - \sqrt[4]{16^3} =$$
$$= 1 + 4 - 2^3 =$$
$$= -3$$

4. $M(t) = 50.000 \cdot (1{,}1)^t$

a) $M(3) = 50.000 \cdot (1{,}1)^3$
$M(3) = 50.000 \cdot 1{,}331$
$M(3) = 66.550{,}00$
Logo, após 3 meses o montante será R$ 66.550,00.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) $M(6) = 50.000 \cdot (1,1)^6$
$M(6) = 50.000 \cdot 1,771561$
$M(6) = 88.578,05$
Logo, após 6 meses o montante será R$ 88.578,05.

c) $M(12) = 50.000 \cdot (1,1)^{12}$
$M(12) \simeq 50.000 \cdot 3,1384284$
$M(12) \simeq 156.921,42$
Logo, após 12 meses o montante será R$ 156.921,42, aproximadamente.

5. $V = 20.000 \cdot (0,9)^t \Rightarrow V = 20.000 \cdot \left(\dfrac{9}{10}\right)^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 20.000 \cdot \dfrac{6.561}{10.000} \Rightarrow V = 13.122$
Logo, o valor desse automóvel após 4 anos será R$ 13.122,00

6. $A(t) = A_0 \cdot (0,9)^t$
$A(5) = 10 \cdot (0,9)^5 \Rightarrow A(5) = 10 \cdot 0,59049 \Rightarrow A(5) \simeq 5,9$
Logo, após 5 minutos restarão no tanque aproximadamente 5,9 m³ de ar.

7. $P(t) = 15.000 \cdot (1,035)^t$
$P(80) = 15.000 \cdot (1,035)^{80}$
$P(80) = 15.000 \cdot [(1,035)^{10}]^8$
$P(80) \simeq 15.000 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8$
$P(80) \simeq 15.000 \cdot 2^4$
$P(80) \simeq 15.000 \cdot 16$
$P(80) \simeq 240.000$
Logo, daqui a 80 anos, haverá, aproximadamente, 240.000 indivíduos nessa população.

8. $f(x) = b^x$, com $0 < b < 1$
$f(1) + f(-1) = \dfrac{10}{3} \Rightarrow b^1 + b^{-1} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow b + \dfrac{1}{b} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow 3b^2 + 3 = 10b \Rightarrow$
$\Rightarrow 3b^2 - 10b + 3 = 0 \Rightarrow b = 3$ (não serve, pois b deve estar entre 0 e 1) ou $b = \dfrac{1}{3}$
Logo, $b = \dfrac{1}{3}$.

9. $P = 64.000(1 - 2^{-0,1t})$ (I)
$P = 63.000$ (II)
Substituindo (II) em (I), obtemos:
$63.000 = 64.000(1 - 2^{-0,1t}) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - 2^{-0,1t} = \dfrac{63.000}{64.000} \Rightarrow -2^{-0,1t} = \dfrac{63}{64} - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2^{-0,1t} = -\dfrac{1}{64} \Rightarrow 2^{-0,1t} = \dfrac{1}{64} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+0,1t} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow 0,1t = 6 \Rightarrow t = 60$
A população de microrganismos será de 63.000 em 60 dias.

10. $f(x) = \dfrac{5 \cdot 2^x}{\sqrt{2^x - 4}}$
Para $f(x)$ existir, devemos ter:
$2^x - 4 > 0 \Rightarrow 2^x > 4 \Rightarrow 2^x > 2^2 \Rightarrow x > 2$
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

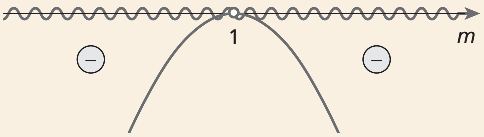
11. $f(x) = 5^x$
$f(1) + f(a) - f(a + 1) + 4 \cdot f(a) =$
$= 5^1 + 5^a - 5^{a+1} + 4 \cdot 5^a =$
$= 5 + 5^a - 5^a \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^a =$
$= 5 - 4 \cdot 5^a + 4 \cdot 5^a = 5$

12. **a)** $(1,15)^n$
Para $n = 1$, temos: $(1,15)^1 = 1,15$
Para $n = 2$, temos: $(1,15)^2 = 1,3225$
Para $n = 3$, temos: $(1,15)^3 = 1,520875$
Para $n = 4$, temos: $(1,15)^4 = 1,74900625$
Para $n = 5$, temos: $(1,15)^5 = 2,0113571875$
Portanto, serão necessários 5 anos para que os produtos comercializados nesse país dobrem de preço.

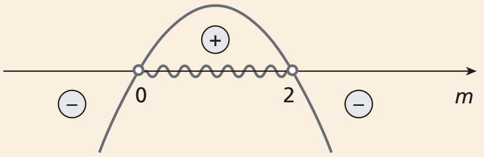
b) $8 \cdot (1,15)^7 \simeq 8 \cdot 2,66 = 21,28$
O preço será, aproximadamente, R$ 21,28.

13. Sendo h a altura da menina, IMC $= \dfrac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2}$ e
RIP $= \dfrac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$; então:
(I) $25 = \dfrac{64}{h^2} \Rightarrow h^2 = \dfrac{64}{25} \Rightarrow h = 1,6$
Logo, a menina tem 1,6 m de altura. Como o RIP é calculado com a altura em centímetro, vamos converter: 1,6 m = 160 cm. Logo:
(II) RIP $= \dfrac{160}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{160}{4} = 40$
alternativa e

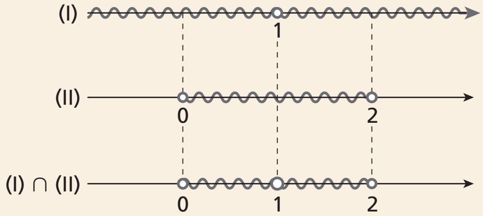
14. A função $f(x) = (-m^2 + 2m)^x$ é decrescente se $0 < (-m^2 + 2m) < 1$.
(I) $-m^2 + 2m < 1 \Rightarrow -m^2 + 2m - 1 < 0$



Logo, $m \neq 1$.
(II) $-m^2 + 2m > 0$



Logo, $0 < m < 2$.
Fazendo a intersecção dos dois intervalos, temos:



$S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 2 \text{ e } m \neq 1\}$

15. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 & \text{(I)} \\ x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y & \text{(II)} \end{cases}$
Substituindo (II) em (I), obtemos:
$2^{5-y} + 2^y = 12 \Rightarrow 2^5 \cdot 2^{-y} + 2^y = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow 32 \cdot (2^y)^{-1} + 2^y = 12$
Fazendo $2^y = t$, temos: $32 \cdot t^{-1} + t = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow 32 \cdot \dfrac{1}{t} + t - 12 = 0 \Rightarrow 32 + t^2 - 12t = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0 \Rightarrow t = 8$ ou $t = 4$
Como $2^y = t$, vem: $2^y = 8 \Rightarrow 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$
ou $2^y = 4 \Rightarrow 2^y = 2^2 \Rightarrow y = 2$
Substituindo os valores de y em (II), obtemos:
$x = 5 - 3 = 2$ ou $x = 5 - 2 = 3$
$S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

16. $x^2 - 4x + 2^m = 0$

A equação possui duas raízes reais e iguais se $\Delta = 0$.

$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 2^m \Rightarrow \Delta = 16 - 2^{2+m}$

Assim: $16 - 2^{2+m} = 0 \Rightarrow 16 = 2^{2+m} \Rightarrow 2^4 = 2^{2+m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + m = 4 \Rightarrow m = 4 - 2 \Rightarrow m = 2$

17. Considere: m = massa de uma substância

m_0 = massa inicial

x = número de meias-vidas

$$m = \frac{m_0}{2^x} \Rightarrow 2^{-29} = \frac{32}{2^x} \Rightarrow 2^{-29} = \frac{2^5}{2^x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2^{-29} = 2^{5-x} \Rightarrow -29 = 5 - x \Rightarrow x = 34$

O tempo total será dado por:

$t = x \cdot P$, em que P é o período de cada meia-vida (6,5 anos).

Assim: $t = 34 \cdot 6{,}5 \Rightarrow t = 221$ anos

Autoavaliação

1. $\dfrac{\left(\sqrt{7}\right)^8}{\left(\sqrt{7}\right)^6} = \left(\sqrt{7}\right)^{8-6} = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

alternativa a

2. Inverso de $3^{\frac{1}{2}}$:

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow$ seu inverso é $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

alternativa c

3. $\dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

alternativa c

4. A sentença $h(x) = \dfrac{1^x}{5}$ não é lei de formação de uma função exponencial, porque, para $h(x) = a^x$, devemos ter $a > 1$ ou $0 < a < 1$ e, nessa função, temos $a = 1$.

alternativa c

5. $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

Se $x = 0 \Rightarrow f(x) = a^0 = 1$

Logo, o gráfico passa pelo ponto (0, 1).

alternativa d

6. A função exponencial f, dada por $f(x) = \left(\sqrt{11}\right)^x$, é crescente, pois $\sqrt{11} > 1$.

alternativa d

7. $\pi > 1$; portanto, $f(x) = \pi^x$ é uma função exponencial crescente.

alternativa b

8. $P(x) = 1{,}029 \cdot (1 + 0{,}20)^n$

$P(x) = 1{,}029 \cdot (1{,}20)^n$

Como a população cresce 20% em cada década e em 2021 terão passado duas décadas, a população nesse ano será:

$P(2) = 1{,}029 \cdot (1{,}2)^2 = 1{,}48176$

alternativa b

9. $5^{-x} = 125 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 5^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^x = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -3$

alternativa b

10. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\dfrac{1}{7}\right)^{x-1}$

Como a base está entre 0 e 1, temos:

$2x + 5 \leqslant x - 1 \Rightarrow 2x - x \leqslant -1 - 5 \Rightarrow x \leqslant -6$

alternativa a

Pesquisa e ação

A construção do jornal possibilita aos alunos elaborarem uma pesquisa, confrontarem opiniões e redigirem pequenos artigos sobre o assunto. Como essa atividade deve ser ilustrada, passa-se, assim, à pesquisa de imagens, fotos, ilustrações e gráficos que abordem o tema e permitam compreendê-lo melhor.

Os temas propostos procuram tratar da questão do crescimento populacional, de forma que os alunos compreendam vários vieses desse importante assunto.

Compreensão de texto

A seção *Compreensão de texto* desse capítulo procura levar aos alunos um texto em que eles poderão colocar em prática conteúdos já estudados, como potências e sequências.

Com o texto lúdico de Malba Tahan, os alunos vão conhecer a notação binária.

Para explorar esse texto em sala de aula, é importante explicar que uma mesma quantidade pode ser representada na notação decimal (usualmente usada) e na notação binária. Pode-se fazer um paralelo entre essas notações, a fim de que os alunos tenham uma melhor compreensão.

ALGARISMOS UTILIZADOS

Notação decimal	Notação binária
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9	0 e 1

BASE UTILIZADA

Notação decimal	Notação binária
10	2

EXPOENTE UTILIZADO

Notação decimal	Notação binária
Qualquer número natural	Qualquer número natural

Dessa maneira, podemos escrever qualquer quantidade nessas bases, fazendo decomposições a partir da base escolhida.

Para enriquecer o trabalho, pode-se mostrar aos alunos a decomposição de uma mesma quantidade nas duas bases. Por exemplo, 182, na base decimal, pode ser escrito assim:

$182 = 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Esse mesmo número pode ser escrito na base 2; para isso, devemos inicialmente escrevê-lo como uma soma de parcelas de potências de 2. Elaborar uma tabela com algumas potências de 2 poderá ser bastante útil para fazer essas relações:

$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	

Desse modo, os alunos poderão perceber, por exemplo, que:

$182 = 128 + 54 = 128 + 32 + 22 = 128 + 32 + 16 + 6 =$
$= 128 + 32 + 16 + 4 + 2$

Em seguida, escrevemos novamente essa soma, utilizando as potências de 2:

$182 = 128 + 32 + 16 + 4 + 2 =$
$= 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$

Para completar a decomposição, escrevemos as potências em ordem decrescente e incluímos as potências de 2 que não aparecem, multiplicando cada uma das parcelas por 0 ou 1. Assim:

$182 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 =$
$= \mathbf{1} \cdot 2^7 + \mathbf{0} \cdot 2^6 + \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0$

Para finalizar, devemos escrever apenas os valores 0 e 1 que multiplicam as potências de 2. Portanto, 182 na base binária será representado por 10110110.

1. O pseudônimo do professor Júlio César de Mello é Malba Tahan, conforme descrito no primeiro parágrafo. Beremis é nome do personagem, protagonista do livro.

2. A história narrada trata do problema dos 1.000 dinares.

3. Segundo o *Dicionário Houaiss*: moeda de ouro cunhada pelos árabes desde fins do século VII e corrente na península Ibérica no século XII.

4. A intenção é que os alunos expliquem as condições do problema:

- As mil moedas de 1 dinar devem ser distribuídas em 10 caixas.
- Da 1ª à 10ª caixa, a numeração deve ser feita em ordem estritamente crescente, relativa à quantidade de moedas que cada caixa contém.
- Deve ser possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1.000 dinares, sem que seja necessário abrir as caixas.

5. A quarta caixa deve ter 8 moedas, porque já temos:

- caixa 1 → **1** dinar
- caixa 2 → **2** dinares
- caixa 3 → não precisa ter 3 dinares, pois 3 = 2 + 1
  Deverá ter **4** dinares
- caixa 4 → não precisa ter 5 dinares, pois
  5 = 4 + 1
  → não precisa ter 6 dinares, pois
  6 = 4 + 2
  → não precisa ter 7 dinares, pois
  7 = 4 + 2 + 1
  → deverá ter **8** dinares, pois não há como obter esse valor usando 1, 2 e 4.

6. Podemos começar registrando a quantidade de moedas de cada caixa, baseando-se no raciocínio de Beremis:

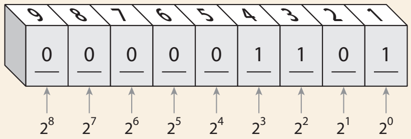
Caixa	Quantidade de moedas
1	$2^0 = 1$
2	$2^1 = 2$
3	$2^2 = 4$
4	$2^3 = 8$
5	$2^4 = 16$
6	$2^5 = 32$
7	$2^6 = 64$
8	$2^7 = 128$
9	$2^8 = 256$
10	489

Então, pode-se fazer a composição usando esses números como parcelas das adições que resultem nos números pedidos e verificar em quais caixas estão essas parcelas. Ou seja:

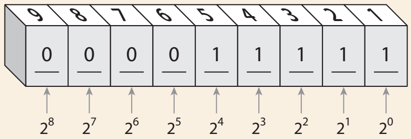
- 13 = 8 + 4 + 1 → caixas 4, 3 e 1.
- 31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 → caixas 5, 4, 3, 2 e 1.
- 310 = 256 + (54) = 256 + 32 + (22) = 256 + 32 + 16 + (6) = = 256 + 32 + 16 + 4 + 2 → caixas 9, 6, 5, 3 e 2.
- 521 = 489 + 32 → caixas 10 e 6.

7. Aplicando as respostas do item anterior:

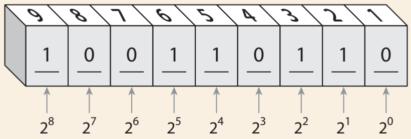
Número 13



Número 31



Número 310



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. Basta utilizar a resposta do item anterior:
Número 13 → 000001101
Número 31 → 000011111
Número 310 → 100110110

9. Resposta pessoal.
Veja um exemplo:
Número em notação binária: 1111110
Sua notação decimal será:
$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$
$= 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 0 = 126$

Capítulo 8

Função logarítmica

Com o intuito de complementar e enriquecer o estudo do Capítulo 7, "Função exponencial", esse capítulo destaca a importância de trabalhar a função logarítmica como a função inversa da função exponencial. Isso pode ser visto, por exemplo, na introdução do capítulo e na construção do gráfico da função logarítmica, quando se chama a atenção para o fato de os gráficos das funções exponencial e logarítmica serem simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

O capítulo inicia-se com a definição de logaritmo de um número, sua condição de existência e consequências, bem como com algumas propriedades operatórias — subtemas que darão suporte à resolução de equações, sistemas e inequações logarítmicas. Em seguida, trabalha-se o uso da calculadora como ferramenta prática para o cálculo de potências e logaritmos.

As situações-problema estudadas no decorrer do capítulo destacam a aplicação do conceito de função logarítmica, por exemplo, na Química, ao se calcular o pH de uma solução, e reforçam o intuito da coleção de ajudar os alunos a atribuir maior significado aos diferentes conteúdos matemáticos estudados no Ensino Médio.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. **a)** $\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$.

b) $\log_9 1 = 0$, pois $9^0 = 1$.

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

d) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, pois $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

e) $\log 1.000 = 3$, pois $10^3 = 1.000$.

f) $\log 0{,}01 = -2$, pois $10^{-2} = 0{,}01$.

2. **a)** $\log 560 = x \Rightarrow 10^x = 560$

Como $100 < 560 < 1.000$, ou seja, $10^2 < 10^x < 10^3$, concluímos que $2 < x < 3$. Logo, log 560 está entre 2 e 3.

b) $\log_5 3 = x \Rightarrow 5^x = 3$

Como $1 < 3 < 5$, ou seja, $5^0 < 5^x < 5^1$, concluímos que $0 < x < 1$. Logo, $\log_5 3$ está entre 0 e 1.

3. **a)** $\log_{\sqrt{2}} 2 = x \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = 2 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow x = 2$

Logo, $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$.

b) $\log 0{,}1 = y \Rightarrow 10^y = 0{,}1 \Rightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$

Logo, $\log 0{,}1 = -1$.

c) $\log_{\frac{1}{4}} 16 = w \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^w = 16 \Rightarrow 4^{-w} = 4^2 \Rightarrow w = -2$

Logo, $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$.

d) $\log_2 \sqrt{128} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{128} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2^7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

e) $\log_4 256 = x \Rightarrow 4^x = 256 \Rightarrow 4^x = 4^4 \Rightarrow x = 4$

Assim, $\log_4 256 = 4$.

f) Como no item **e** verificamos que $\log_4 256 = 4$, temos:

$\log_2 (\log_4 256) = x \Rightarrow \log_2 (4) = x \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Assim, $\log_2 (\log_4 256) = 2$.

4. $A = \log_7 7 \Rightarrow 7^A = 7^1 \Rightarrow A = 1$

$B = \log_{76} 1 \Rightarrow 76^B = 1 \Rightarrow 76^B = 76^0 \Rightarrow B = 0$

$C = \log_{0,5} 8 \Rightarrow (0{,}5)^C = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^C = 2^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^C = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow C = -3$

$D = \log_8 8^{-2} \Rightarrow 8^D = 8^{-2} \Rightarrow D = -2$

Logo: $B^A + C \cdot D = 0^1 + (-3) \cdot (-2) = 6$

5. **a)** $\log (2m - 5) = 3 \Rightarrow 2m - 5 = 10^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m = 1.005 \Rightarrow m = \frac{1.005}{2} \Rightarrow m = 502{,}5$

b) $\log (m - 9) = -2 \Rightarrow m - 9 = 10^{-2} \Rightarrow m = 9{,}01$

c) $\log_2 (5 - m) = 0 \Rightarrow 5 - m = 2^0 \Rightarrow 5 - m = 1 \Rightarrow m = 4$

d) $\log_m 0{,}1 = -1 \Rightarrow m^{-1} = 0{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{0{,}1}{1} \Rightarrow m = \frac{1}{0{,}1} \Rightarrow m = 10$

6. **a)** $\log_x 5$

Pela definição, temos: $x > 0$ e $x \neq 1$

Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

b) Para existir $\log_2 (3x + 5)$, devemos ter:

$3x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{3}$

Portanto, $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$.

c) $\log_3 \left(\frac{x - 2}{x + 4}\right)$ existe se:

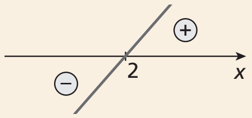
$\frac{x - 2}{x + 4} > 0$

Consideremos:

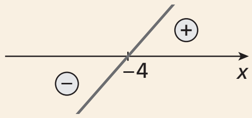
$f(x) = x - 2$ e $g(x) = x + 4$

Resolvendo a inequação-quociente, temos:

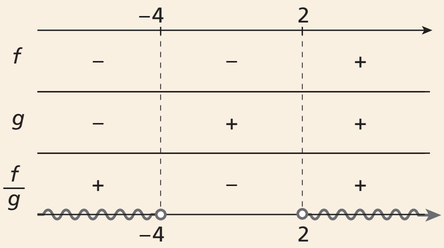
$f(x) = x - 2$



$g(x) = x + 4$



Quadro de sinais

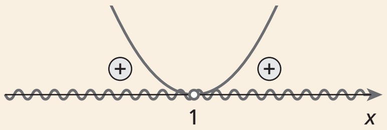


	$x < -4$	$-4 < x < 2$	$x > 2$
f	–	–	+
g	–	+	+
$\frac{f}{g}$	+	–	+

Assim, devemos ter $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

d) $\log_5 (x^2 - 2x + 1)$
Condição de existência: $x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(x) = x^2 - 2x + 1$



ADILSON SECCO

Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

7. **a)** $\log_{11} 11 = 1$, pois $11^1 = 11$.
b) $\log_{32} 1 = 0$, pois $32^0 = 1$.
c) $\log_6 6^7 = 7$, pois $6^7 = 6^7$.
d) $\log 100 = \log 10^2 = 2$, pois $10^2 = 10^2$.
e) $15^{\log_{15} 16} = 16$, pois $\log_{15} 16 = m \Rightarrow 15^m = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow 15^{\log_{15} 16} = 16$
f) $\log_3 \sqrt{81} = \log_3 \sqrt{3^4} = \log_3 3^2 = 2$

8. **a)** $\log_7 b = 1 \Rightarrow b = 7^1 \Rightarrow b = 7$
b) $\log_8 x = \log_8 \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 8^{\log_8 \left(\frac{2}{3}\right)} = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
c) $3^{\log_3 2} = n \Rightarrow n = 2$
d) $\log x^2 = \log 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$
e) $y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \sqrt{81} \Rightarrow 3^{-y} = 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2$
f) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{5} = k \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^k = \sqrt[6]{5} \Rightarrow 5^{\frac{k}{2}} = 5^{\frac{1}{6}} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

9. **a)** $(\log_5 10)^{\log_3 1} = (\log_5 10)^0 = 1$
b) $(\log_{64} 64)^{\log_3 2} = 1^{\log_3 2} = 1$
c) $\log (\log 10^{10}) = \log 10 = 1$
d) $(\log 0{,}01) \cdot (\log 100) = (\log 10^{-2}) \cdot (\log 10^2) =$
$= (-2) \cdot (2) = -4$
e) $(\log_3 1) \cdot (\log_5 20) = 0 \cdot \log_5 20 = 0$
f) $(\log_{11} 121) \cdot (\log_{13} 169) = (\log_{11} 11^2) \cdot (\log_{13} 13^2) =$
$= (2) \cdot (2) = 4$

10. $\text{pH} = -\log [\text{H}^+] = -\log 10^{-3} = -(-3) = 3$
Como $\text{pH} < 7$, concluímos que a solução é ácida.

Comentário: Esse e o exercício **11** podem ser aprofundados em um trabalho interdisciplinar com Química.

11. Temos que $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$ e $\text{pH} = 9$. Então:
$-\log [\text{H}^+] = 9 \Rightarrow \log [\text{H}^+] = -9$
Pela definição de logaritmo: $10^{-9} = [\text{H}^+]$
Portanto, a concentração de H^+ é 10^{-9} mol/ℓ.

12. **a)** $\log_2 (64 \cdot 13) = \log_2 64 + \log_2 13 = 6 + \log_2 13$
b) $\log_{\sqrt{2}} (2 \cdot 3) = \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 3 = 2 + \log_{\sqrt{2}} 3$
c) $\log_3 (13 \cdot 3) = \log_3 13 + \log_3 3 = \log_3 13 + 1$
d) $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{16}\right)^9 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{18} = 18$
e) $\log \left(\frac{1}{10}\right)^{19} = \log 10^{-19} = -19$
f) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{26}{32}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 26 - \log_{\frac{1}{2}} 32 =$
$= \log_{\frac{1}{2}} (2 \cdot 13) - \log_{\frac{1}{2}} 32 =$
$= \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 13 - (-5) =$
$= -1 + \log_{\frac{1}{2}} 13 + 5 = \log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

13. **a)** $A = \log 30 + \log 7 - \log 21 =$
$= \log (3 \cdot 10) + \log 7 - \log (3 \cdot 7) =$
$= \cancel{\log 3} + \log 10 + \cancel{\log 7} - \cancel{\log 3} - \cancel{\log 7} =$
$= \log 10 = 1$

***Outro modo*:**
$A = \log 30 + \log 7 - \log 21 =$
$= \log 30 + \log \left(\frac{7}{21}\right) = \log 30 + \log \frac{1}{3} =$
$= \log \left(30 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log 10 = 1$
Portanto, $A = 1$.

b) $A = \log_2 100 - \log_2 25 =$
$= \log_2 (4 \cdot 25) - \log_2 25 =$
$= \log_2 4 + \cancel{\log_2 25} - \cancel{\log_2 25} =$
$= \log_2 4 = 2$

***Outro modo*:**
$A = \log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 \left(\frac{100}{25}\right) = \log_2 4 = 2$
Portanto, $A = 2$.

Comentário: Instigar os alunos a resolver essa questão pelo segundo modo de resolução, para que eles percebam que as propriedades também podem ser usadas para transformar uma adição/subtração de logaritmos em um logaritmo de um produto/quociente.

14. **a)** $\log_a (b \cdot c \cdot d) = \log_a b + \log_a c + \log_a d$
b) $\log_a \left(\frac{2 \cdot k}{d}\right) = \log_a (2 \cdot k) - \log_a d =$
$= \log_a 2 + \log_a k - \log_a d$
c) $\log_a a^{-n} = -n \cdot \log_a a = -n \cdot 1 = -n$
d) $\log_a \left(\frac{1}{y}\right) = \log_a 1 - \log_a y = 0 - \log_a y =$
$= -\log_a y$

15. **a)** $\log_{12} \left(\frac{3}{4}\right) = \log_{12} 3 - \log_{12} 4 =$
$= \log_{12} 3 - 2 \log_{12} 2 \simeq -0{,}116$
b) $\log_{12} 6 = \log_{12} 2 \cdot 3 = \log_{12} 2 + \log_{12} 3 \simeq 0{,}721$

16. **a)** $\log 15 = \log (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 =$
$= 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}176$
b) $\log 45 = \log (3 \cdot 3 \cdot 5) = \log 3 + \log 3 + \log 5 =$
$= 0{,}477 + 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}653$
c) $\log \left(\frac{5}{3}\right) = \log 5 - \log 3 = 0{,}699 - 0{,}477 = 0{,}222$
d) $\log 0{,}6 = \log \left(\frac{6}{10}\right) = \log \left(\frac{3}{5}\right) = \log 3 - \log 5 =$
$= 0{,}477 - 0{,}699 = -0{,}222$
e) $\log_2 20 = \log_2 (2^2 \cdot 5) = \log_2 2^2 + \log_2 5 =$
$= 2 + 2{,}322 = 4{,}322$
f) $\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2 \cdot \log_2 5 = 2 \cdot 2{,}322 = 4{,}644$

17. $\text{pH} = -\log (3{,}8 \cdot 10^{-5}) = -(\log 3{,}8 + \log 10^{-5}) =$
$= -\log 3{,}8 - (-5) \simeq -0{,}58 + 5 = 4{,}42$

18. $\text{pH} = 6{,}1 + \log \left(\frac{B}{C}\right) = 6{,}1 + \log \left(\frac{25}{2}\right) =$
$= 6{,}1 + \log 25 - \log 2 = 6{,}1 + \log 5^2 - \log 2 =$
$= 6{,}1 + 2 \cdot \log 5 - \log 2$
$\simeq 6{,}1 + 2 \cdot (0{,}699) - 0{,}301 = 7{,}197$
Logo, o pH do sangue dessa pessoa é, aproximadamente, 7,197.

19. **a)** $\log 32 \simeq 1{,}5051$
b) $\log_6 40 = \frac{\log 40}{\log 6} \simeq \frac{1{,}6021}{0{,}7782} \simeq 2{,}0587$

20. **a)** $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 =$
$= 0{,}30 + 0{,}48 = 0{,}78$

b) $\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 =$
$= 0{,}48 + 1 = 1{,}48$

c) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{0{,}30}{0{,}48} = 0{,}625$

d) $\log\ 5 = \log \left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 =$
$= 1 - 0{,}30 = 0{,}70$

e) $\log 144 = \log 12^2 = 2 \cdot \log 12 = 2 \cdot \log (2^2 \cdot 3) =$
$= 2 \cdot (\log 2^2 + \log 3) =$
$= 2 \cdot (2 \cdot \log 2 + \log 3) =$
$= 2 \cdot (2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48) = 2{,}16$

f) $\log \sqrt[3]{30} = \log 30^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3} \cdot \log (3 \cdot 10) =$
$= \dfrac{1}{3} \cdot (\log 3 + \log 10) =$
$= \dfrac{1}{3} \cdot (0{,}48 + 1) = 0{,}4933...$

21. **a)** $\log_3 10 = \dfrac{\log 10}{\log 3} = \dfrac{1}{\log 3}$

b) $\log_2 5 = \dfrac{\log_5 5}{\log_5 2} = \dfrac{1}{\log_5 2}$

c) $\log 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 10} = \dfrac{1}{\log_3 10}$

d) $\log_7 11 = \dfrac{\log_{11} 11}{\log_{11} 7} = \dfrac{1}{\log_{11} 7}$

e) $\log_{13} 26 = \dfrac{\log_{26} 26}{\log_{26} 13} = \dfrac{1}{\log_{26} 13}$

22. **a)** $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

b) O logaritmo de b na base a é igual ao inverso do logaritmo de a na base b.

c) $\log_a b \cdot \log_b a = \dfrac{1}{\log_b a} \cdot \log_b a = 1$

Comentário: Espera-se que questões desse tipo, em que os alunos, após serem orientados a dar determinados passos, são chamados a elaborar conclusões, sejam incentivos para novas experiências.

23. $9 - (\log_{15} 8) \cdot (\log_2 15) = 9 - 3(\log_{15} 2) \cdot (\log_2 15) =$
$= 9 - 3 \cdot \dfrac{1}{\log_2 15} \cdot \log_2 15 = 9 - 3 = 6$

24. $A = \log_{\frac{1}{5}} 16 \cdot \log_{16} \left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{1}{\log_{16} \left(\dfrac{1}{5}\right)} \cdot \log_{16} \left(\dfrac{1}{5}\right) = 1$

$B = \dfrac{1}{\log_{25} 5} = \log_5 25 = 2$

25. $\log_3 5 \cdot \log_7 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 3$
Escrevendo todos os logaritmos na base 10, temos:
$\dfrac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}} \cdot \dfrac{\cancel{\log 2}}{\cancel{\log 7}} \cdot \dfrac{\cancel{\log 7}}{\cancel{\log 5}} \cdot \dfrac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 2}} = 1$

Comentário: Nessa resolução, os logaritmos foram todos escritos na base 10, mas poderiam ter sido empregados outros valores para a base, desde que respeitassem as restrições da definição de logaritmo. Para trabalhar essa questão, pode-se abrir uma discussão com os alunos e, caso nenhum deles tenha empregado outra base, instigá-los a testar outros valores.

26. **a)** $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$
Escrevendo todos os logaritmos na base a, temos:
$\dfrac{\log_a a}{\log_a b} \cdot \dfrac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \log_a c = \log_a a = 1$

b) $\dfrac{\log_c a}{\log_c b} - \log_b a = \log_b a - \log_b a = 0$

c) $\log_b a^2 \cdot \log_a b^2 = 2 \log_b a \cdot 2 \log_a b =$
$= 2 \cdot \dfrac{\log_a a}{\log_a b} \cdot 2 \cdot \dfrac{\log_a b}{\log_a a} = 4$

27. $\log_{a^n} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a a^n} = \dfrac{\log_a b}{n \cdot \log_a a} = \dfrac{\log_a b}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$

28. **a)** Em 1 ano, ou seja, em 12 meses, teremos:
$M = 1.400 \cdot (1{,}009)^{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow M \simeq 1.400 \cdot 1{,}1135 \Rightarrow M \simeq 1.558{,}9$
Logo, o montante será de aproximadamente R$ 1.558,90

b) Substituindo M por R$ 2.100,00, temos:
$1.400 \cdot (1{,}009)^t = 2.100 \Rightarrow (1{,}009)^t = \dfrac{2.100}{1.400} \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}009)^t = 1{,}5$
Aplicando a definição de logaritmo, temos:
$t = \log_{1{,}009} 1{,}5 = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}009}$
Em uma calculadora científica, obtemos $\log 1{,}5 \simeq 0{,}1761$ e $\log 1{,}009 \simeq 0{,}0039$. Assim:
$t \simeq \dfrac{0{,}1761}{0{,}0039} \simeq 45{,}1$
Logo, são necessários 46 meses de aplicação para que o montante chegue a R$ 2.100,00.

29. **a)**
- Após um trimestre:
  $1.500 + 1.500 \cdot 0{,}2 = 1.500 \cdot (1 + 0{,}2) =$
  $= 1.500 \cdot (1{,}2) = 1.800$
  Logo, após um trimestre essa empresa estará devendo R$ 1.800,00.
- Após dois trimestres:
  $1.800 + 1.800 \cdot 0{,}2 = 1.800 \cdot (1 + 0{,}2) =$
  $= 1.800 \cdot (1{,}2) = 2.160$
  Assim, após dois trimestres essa empresa estará devendo R$ 2.160,00.

Comentário: Para calcular um acréscimo de 20% sobre um valor, espera-se que os alunos percebam que basta multiplicar o valor por 1,2.

b) Organizando os cálculos realizados no item anterior temos:

Tempo	Cálculos
Após 1 trimestre	$d = 1.500 \cdot (1{,}2) = 1.800$
Após 2 trimestres	$d = 1.800 \cdot (1{,}2)$ $d = 1.500 \cdot (1{,}2) \cdot (1{,}2)$ $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^2$ $d = 2.160$

Analisando esses resultados, conclui-se que, para calcular o valor da dívida d após n trimestres, pode ser utilizada a fórmula: $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$

c) Usando a fórmula do item anterior, teremos:
$3.110{,}40 = 1.500 \cdot (1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = \dfrac{3.110{,}40}{1.500} \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}2)^n = 2{,}0736$
Aplicando a definição de logaritmo, temos:
$n = \log_{1{,}2} 2{,}0736 \Rightarrow n = \log_{1{,}2} (1{,}2)^4 \Rightarrow n = 4$
Ou seja, para chegar a R$ 3.110,40 serão necessários 4 trimestres, ou seja, 1 ano.

d) Mais uma vez, podemos usar a fórmula do item **b**:
$d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = \dfrac{d}{1.500} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \log_{1{,}2} \left(\dfrac{d}{1.500}\right)$

30. **a)** $f(7) = \log_2 (7 + 1) = \log_2 8 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

b) $f(0) = \log_2 (0 + 1) = \log_2 1 = 0$

c) $f(-0{,}5) = \log_2 (-0{,}5 + 1) =$
$= \log_2 \left(\dfrac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$

d) $f\left(\sqrt{2}-1\right) = \log_2\left(\sqrt{2}-1+1\right) = \log_2\sqrt{2} =$

$= \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

31. **a)** $g(x) = \log_3(x-4) = 3 \Rightarrow x - 4 = 3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 27 + 4 \Rightarrow x = 31$

b) $g(x) = \log_3(x-4) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x - 4 = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{3} + 4$

32. **a)** $f(x) = \log(2x+5)$

Condição de existência:

$2x + 5 > 0 \Rightarrow 2x > -5 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$

Portanto: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{5}{2}\right\}$

b) $f(x) = \log_{x+2}(3-x)$

Condição de existência do logaritmando:

$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$ (I)

Condição de existência da base:

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ (II)

$x + 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$ (III)

Então, pelas desigualdades (I), (II) e (III), temos:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$

c) $g(x) = \log_{18} 2^x$

Condição de existência: $2^x > 0$

Como, para todo x, $2^x > 0$, vem: $D(g) = \mathbb{R}$

33. Substituindo p por 0,4 na equação, obtemos:

$h(0{,}4) = 20 \cdot \log_{10}\left(\dfrac{1}{0{,}4}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\dfrac{10}{4}\right) =$

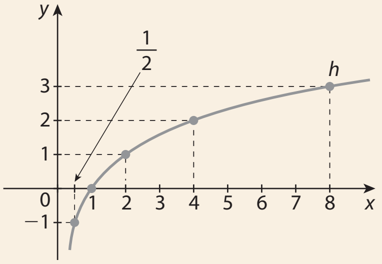
$= 20 \cdot [\log 10 - \log 4] = 20 \cdot [\log 10 - 2\log 2] \simeq$

$\simeq 20 \cdot [1 - 2 \cdot 0{,}3] = 8$

alternativa b

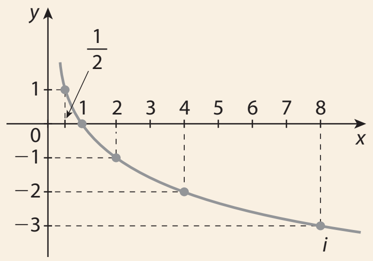
34. **a)** $h(x) = \log_2 x$

x	$h(x)$
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3



b) $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$i(x)$
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3



- A função h é crescente e a função i é decrescente.
- Resposta possível:

  Para verificar se uma função é crescente ou decrescente, podemos observar o valor da base a de $\log_a x$:

  $\begin{cases}\text{se } a > 1, \text{ a função será decrescente;}\\ \text{se } 0 < a < 1, \text{ a função será decrescente.}\end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

35. **a)** Como a base $\left(\dfrac{1}{10}\right)$ é um número entre 0 e 1, concluímos que a função é decrescente.

b) Como a base (10) é maior que 1, concluímos que a função é crescente.

36. **a)** $f(x) = \log_{k-3} x$

Para f ser crescente: $k - 3 > 1 \Rightarrow k > 4$

Logo, $\left\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\right\}$.

b) $f(x) = \log_{3k-1} x$

Para f ser decrescente:

$0 < 3k - 1 < 1 \Rightarrow 1 < 3k < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < k < \dfrac{2}{3}$

Logo, $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{3} < k < \dfrac{2}{3}\right\}$.

37. **a)** $f(x) = \log_a x$

$f(9) = 2 \Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

$a = -3$ não serve devido à condição de existência.

Então: $f(x) = \log_3 x$

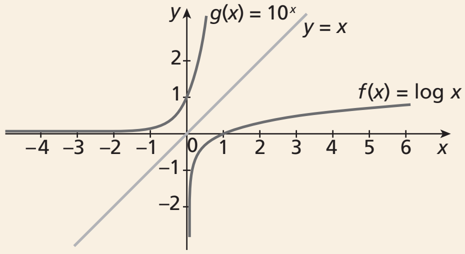
b) $g(x) = \log_a x$

$g(4) = -1 \Rightarrow \log_a 4 = -1 \Rightarrow a^{-1} = 4 \Rightarrow a = \dfrac{1}{4}$

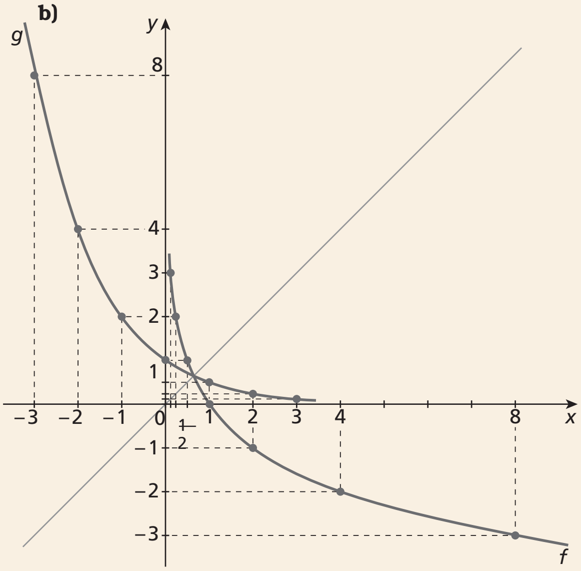
Então: $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

38. Em todos os itens, primeiro foi construído o gráfico de uma das duas funções e, em seguida, traçado o gráfico da outra função considerando a simetria em relação à reta $y = x$.

a)



b)



39. Sendo S a soma das áreas dos dois retângulos, vem:

$S = (3-2) \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + (4-3) \cdot (\log_{10} 4 - \log_{10} 3)$

$S = 1 \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + 1 \cdot (\log_{10} 4 - \log_{10} 3)$

$S = \log_{10} 4 - \log_{10} 2$

$S = \log_{10} 2^2 - \log_{10} 2$

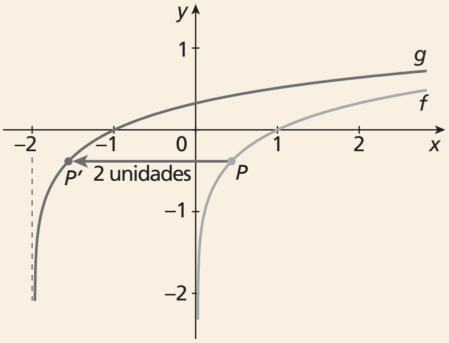
$S = 2 \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2$

$S = \log_{10} 2$

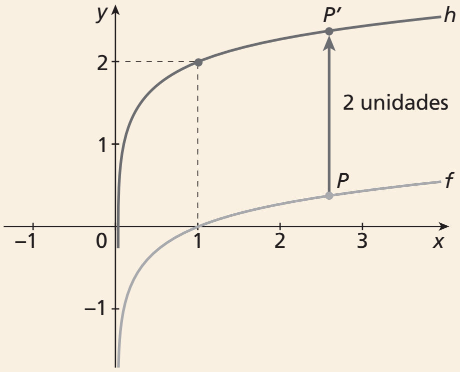
alternativa a

40. a) Uma estratégia para a obtenção dos gráficos pedidos é fazer a translação adequada do gráfico da função f tal que $f(x) = \log x$.

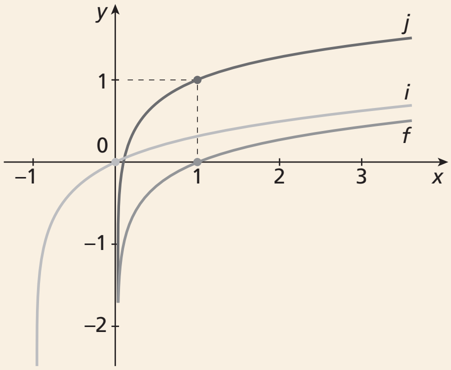
No caso de $g(x) = \log (x + 2)$, temos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em duas unidades no sentido negativo do eixo x. Observe os pontos de intersecção com o eixo horizontal e os pontos P e P', por exemplo.



No caso de $h(x) = \log x + 2$, temos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em duas unidades no sentido positivo do eixo y. Observe, por exemplo, os pontos P e P'.



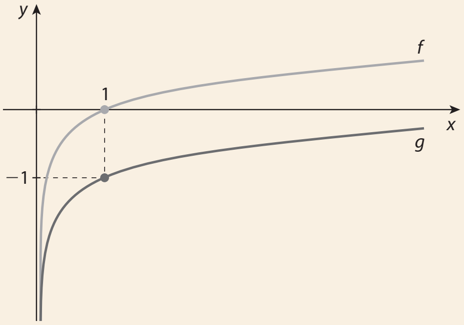
b) Para $i(x) = \log (x + 1)$, teremos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em uma unidade no sentido negativo do eixo x. No caso de $j(x) = \log x + 1$, teremos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em uma unidade no sentido positivo do eixo y.



Comentário: Se for conveniente, realizar essa atividade usando um *software* de construção de gráficos, a fim de que os alunos possam testar mais valores para generalizar as conclusões para a obtenção dos gráficos das funções g e h a partir do gráfico de f, dados $f(x) = \log x$, $g(x) = \log (x + k)$ e $h(x) = \log x + k$. Orientar os alunos a atribuir também valores negativos para k.

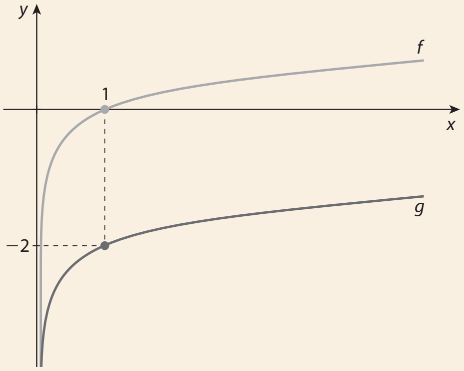
41. a) $g(x) = \log \left(\frac{x}{10}\right) = \log x - \log 10 = \log x - 1$

Basta transladar o gráfico de $f(x) = \log x$ uma unidade no sentido negativo do eixo y.



b) $g(x) = \log \left(\frac{x}{100}\right) = \log x - \log 100 = \log x - 2$

Basta transladar o gráfico de $f(x) = \log x$ duas unidades no sentido negativo do eixo y.



Comentário: Essa é outra atividade em que se obtém o gráfico de uma função por meio da translação do gráfico de outra função. Na discussão com um colega, os alunos têm a oportunidade de praticar a argumentação e a oralidade.

42. a) $\log_x 64 = 2$

Condições de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$

$\log_x 64 = 2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$

Portanto, $S = \{8\}$.

b) $\log_4 (x + 1) = 2$

Condição de existência: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$\log_4 (x + 1) = 2 \Rightarrow x + 1 = 4^2 \Rightarrow x = 16 - 1 \Rightarrow x = 15$

Portanto, $S = \{15\}$.

c) $\log (x - 1)^2 = \log 1$

Condição de existência:

$(x - 1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\log (x - 1)^2 = \log 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Portanto, $S = \{0, 2\}$.

d) $\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x > -2$$

$\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$

$\log_{21} (x + 2)(x + 6) = 1$

$(x + 2)(x + 6) = 21^1$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$x = 1$ ou $x = -9$ (não serve devido à condição de existência)

Logo, $S = \{1\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

e) $\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x - 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{7}{2}$$

$\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \dfrac{x-2}{2x-7} = 1 \Rightarrow \dfrac{x-2}{2x-7} = 2^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 = 2(2x - 7) \Rightarrow x - 2 = 4x - 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$ (obedece à condição de existência)

Logo, $S = \{4\}$.

f) $\log x + 2 \cdot \log^2 x - 1 = 0$

Condição de existência: $x > 0$

Fazendo $y = \log x$, temos:

$y + 2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ ou $y = -1$

Como $y = \log x$, vem:

$\log x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 10^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow x = \sqrt{10}$ ou

$\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{10}$

Portanto, $S = \left\{\dfrac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$.

43. $\begin{cases} \log_2 (x - 2) - \log_2 (y + 1) = 1 \text{ (I)} \\ x - 3y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$

Condições de existência: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ y > -1 \end{cases}$

(I) $\log_2 (x - 2) = \log_2 2 + \log_2 (y + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \log_2 (2y + 2) \Rightarrow x - 2 = 2y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2y = 4$

$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 8$ e $y = 2$

Ambos satisfazem as condições de existência; logo, $S = \{(8, 2)\}$.

44. $\log 0{,}5 = \log 10^{-0{,}012t} \Rightarrow \log 0{,}5 = -0{,}012t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log 0{,}5}{-0{,}012} \Rightarrow t = \dfrac{-0{,}30}{-0{,}012} \Rightarrow t = 25$

Logo, a meia-vida dessa substância é de 25 horas.

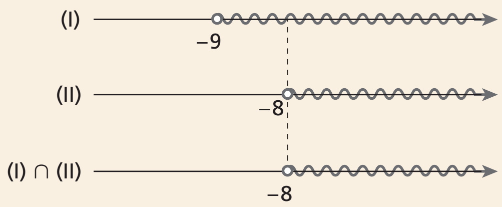
Comentário: Essa atividade pode ser aprofundada em trabalho interdisciplinar com Física.

45. a) $\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1$

Condição de existência: $x + 9 > 0 \Rightarrow x > -9$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

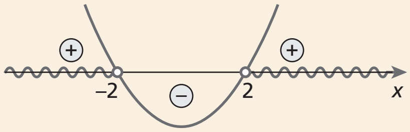
$\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1 \Rightarrow x + 9 > 1 \Rightarrow x > -8$ (II)



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$.

b) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5$

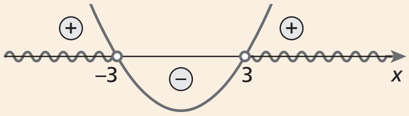
Condição de existência: $x^2 - 4 > 0$



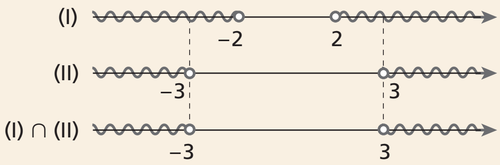
Logo: $x < -2$ ou $x > 2$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5 \Rightarrow x^2 - 4 > 5 \Rightarrow x^2 - 9 > 0$



Logo: $x < 3$ ou $x > 3$ (II)



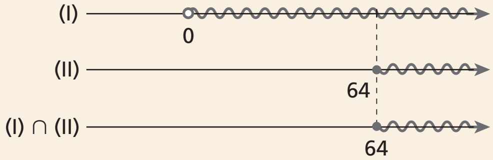
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$.

c) $\log_8 x \geqslant 2$

Condição de existência: $x > 0$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_8 x \geqslant 2 \Rightarrow \log_8 x \geqslant \log_8 64 \Rightarrow x \geqslant 64$ (II)



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$.

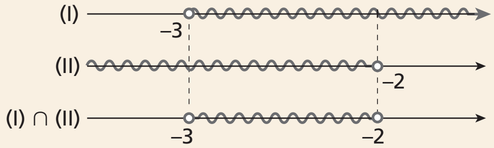
d) $\log_{0{,}2} (x + 3) > 0$

Condição de existência: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{0{,}2} (x + 3) > 0 \Rightarrow \log_{0{,}2} (x + 3) > \log_{0{,}2} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 < 1 \Rightarrow x < -2$ (II)



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$.

e) $\log_{0{,}3} (2x - 2) + \log_{0{,}3} 2 > 1$

Condição de existência:

$2x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$ (I)

Substituindo 1 por $\log_{0{,}3} 0{,}3$, resolvemos a inequação:

$\log_{0{,}3} (2x - 2) + \log_{0{,}3} 2 > \log_{0{,}3} 0{,}3 \Rightarrow$

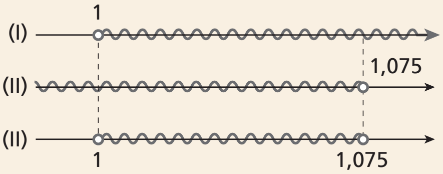
$\Rightarrow \log_{0{,}3} [(2x - 2) \cdot 2] > \log_{0{,}3} 0{,}3$

Como a base é menor que 1, o sinal da desigualdade deve ser invertido para os logaritmandos:

$(2x - 2) \cdot 2 < 0{,}3 \Rightarrow 4x - 4 < 0{,}3 \Rightarrow 4x < 4{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \dfrac{4{,}3}{4} \Rightarrow x < 1{,}075$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$.

f) $0 < \log_3 (x - 2) < 2$

Condição de existência:

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (I)

Substituindo 0 por $\log_3 1$ e 2 por $\log_3 9$, resolvemos

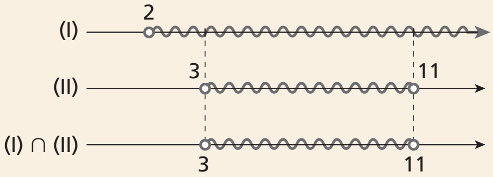
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

a inequação: $\log_3 1 < \log_3 (x - 2) < \log_3 9$

Como a base é maior que 1, o sinal da desigualdade deve ser mantido para os logaritmandos:

$1 < x - 2 < 9 \Rightarrow 3 < x < 11 \quad \text{(II)}$

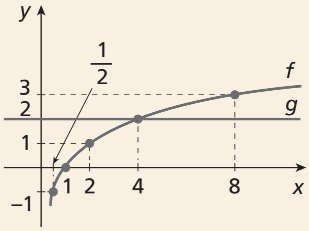
As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$.

46. $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$

x	$f(x)$	$g(x)$
$\frac{1}{2}$	-1	2
1	0	2
2	1	2
4	2	2
8	3	2



a) Analisando os gráficos, concluímos que $f(x) \geqslant g(x)$ para $x \geqslant 4$.

b) Montando a inequação $f(x) \geqslant g(x)$:

$\log_2 x \geqslant 2 \Rightarrow \log_2 x \geqslant \log_2 4 \Rightarrow x \geqslant 4$

Condição de existência: $x > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$.

c) Concluímos que, resolvendo a inequação logarítmica formada pelas leis de formação das funções f e g ou comparando os gráficos das funções para verificar para quais valores de x temos $f(x) \geqslant g(x)$, encontramos o mesmo intervalo.

Comentário: Essa é outra atividade em que, na discussão com um colega, pedida no enunciado, os alunos têm a oportunidade de praticar a argumentação e a oralidade.

Exercícios complementares

1. **a)** $M = \log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2{,}5$

$M = \log (50 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 2{,}5)$

$M = \log 100.000$

$M = \log 10^5$

$M = 5 \cdot \log 10$

$M = 5 \cdot 1$

$M = 5$

b) $A = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$

$$A = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 27}{\log 4} \cdot \frac{\log \sqrt{2}}{\log 25}$$

$$A = \frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{\log 3}}{2 \cdot \cancel{\log 2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\log 2}}{2 \cdot \cancel{\log 5}}$$

$$A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

2. $\log 1{,}23 = \log \left(\frac{123}{100}\right) = \log 123 - \log 10^2 =$

$= \log 123 - 2 \cdot \log 10 = 2{,}09 - 2 \cdot 1 = 0{,}09$

alternativa b

3. $\log_3 (x^2 - y^2) = \log_3 [(x - y)(x + y)] =$

$= \log_3 \left(\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}\right) = \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_3 \sqrt{3} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \log_3 3 + \frac{1}{2} \cdot \log_3 3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

alternativa e

4. $h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$

$3{,}5 = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$

$2 = \log_3 (t + 1) \Rightarrow t + 1 = 3^2 \Rightarrow t = 8$

alternativa b

5. $R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$

$8{,}5 - 7{,}0 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$

$1{,}5 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right) \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1{,}5}$

alternativa d

Comentário: Essa atividade, assim como os exercícios **6** a **9** dessa sequência, podem ser aprofundados em trabalho interdisciplinar com Física.

6. Pelo enunciado, temos a seguinte fórmula:

$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3} \cdot \log_{10} (M_0)$. Como $M_W = 7{,}3$, temos:

$7{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3} \cdot \log_{10} (M_0) \Rightarrow M_0 = 10^{27}$

alternativa e

7. Se $I = 100I_0$, temos:

$d = 10 \cdot \log \left(\frac{100\,I_0}{I_0}\right) = 10 \cdot \log 100 = 20$

Logo, o som terá 20 decibéis.

8. $N_1 - N_2 = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 120 + 10 \cdot \log_{10} (I_1) - (120 + 10 \cdot \log_{10} (I_1)) = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10(\log_{10} (I_1) - \log_{10} (I_2)) = 20 \Rightarrow \log_{10} (I_1) - \log_{10} (I_2) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^2$

alternativa d

9. **a)** $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $1{,}355 \cdot 10^{-20} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1{,}355 \cdot 10^{-20}}{16} = (0{,}5)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 8{,}470 \cdot 10^{-22} \simeq (0{,}5)^n$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$n = \log_{0,5} (8{,}470 \cdot 10^{-22}) = \frac{\log 8{,}470 + \log 10^{-22}}{\log 0{,}5}$

Com uma calculadora científica, obtemos:

$n \simeq \frac{0{,}928 - 22}{-0{,}301} = \frac{-21{,}072}{-0{,}301} \simeq 70$

Logo, terão decorridas aproximadamente 70 meias-vidas.

10. $P(t) = P_0 \cdot (1{,}02)^t$

Para duplicar a população, devemos ter $P(t) = 2P_0$.

$2\cancel{P_0} = \cancel{P_0} \cdot (1{,}02)^t \Rightarrow 2 = 1{,}02^t \Rightarrow t = \log_{1{,}02} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} \simeq \frac{0{,}301}{0{,}0086} \simeq 35$

Portanto, a população estará duplicada daqui a aproximadamente 35 anos.

11. $\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$

Condições de existência:

$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2} \quad \text{(I)}$

$3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \quad \text{(II)}$

Resolvendo a inequação, obtemos:

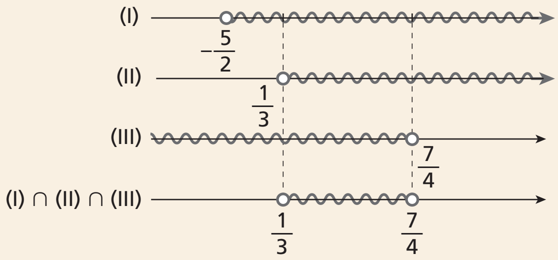
$\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$

$\log_2 \left(\frac{2x + 5}{3x - 1}\right) > \log_2 2 \Rightarrow \frac{2x + 5}{3x - 1} > 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 5 > 2(3x - 1) \Rightarrow 2x + 5 > 6x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x > -7 \Rightarrow x < \frac{7}{4} \quad \text{(III)}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



Portanto, $S = \left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$.
alternativa d

12. Condição de existência: $x > 0$

$\log_2 x^2 + \log_4 \sqrt{x} = -2{,}25$

$2 \cdot \log_2 x + \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4} = -2{,}25$

$2 \cdot \log_2 x + \frac{1}{4} \cdot \log_2 x = -2{,}25$

$\frac{9}{4} \cdot \log_2 x = -2{,}25 \Rightarrow \log_2 x = -2{,}25 \cdot \frac{4}{9}$

$\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Portanto, $S = \{0{,}5\}$.
alternativa a

13. $9^x = 15 \Rightarrow x = \log_9 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 9} = \frac{1}{2} \log_3 15$

Para obter $\log_3 15$ pelo gráfico, basta encontrar a ordenada correspondente a $x = 15$. Assim, obtemos: $\log_3 15 \simeq 2{,}5$

Portanto: $x \simeq \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 = 1{,}25$
alternativa d

14. Como $5^p = 2$, então: $\log_2 100 = \log_{5^p} 100$. Assim:

$\log_{5^p} 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 5^p} = \frac{1}{p} \cdot \log_5 100 = \frac{1}{p} \cdot \log_5 (5^2 \cdot 2^2) =$

$= \frac{1}{p} \cdot (\log_5 5^2 + \log_5 2^2) = \frac{1}{p} \cdot (2 \cdot 1 + 2 \cdot \log_5 5^p) =$

$= \frac{1}{p} \cdot (2 + 2p) = \frac{2p + 2}{p}$

alternativa e

15. **a)** O ponto de intersecção é determinado pela equação $f(x) = g(x)$. Então: $\log x + 1 = -\log x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \log x = -1 \Rightarrow \log x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}}$

Usando a função g, temos:

$g\left(10^{-\frac{1}{2}}\right) = -\log\left(10^{-\frac{1}{2}}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Voltando ao valor de x, temos:

$x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Portanto, o ponto de intersecção é $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Resposta possível:

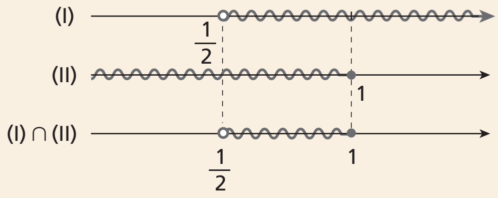
$g(x) \geqslant f(x) \Rightarrow -\log x \geqslant \log x + 1$

16. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1)}$

Condições de existência: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ (I)

Para $f(x)$ existir: $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) \geqslant 0$

$\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow 2x - 1 \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant 1$ (II)



Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

17. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 x = \log_4 (2x - 1)$

Condições de existência:

$\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{\cancel{\log_4 3}}{\log_4 2} \cdot \frac{\cancel{\log_4 4}}{\cancel{\log_4 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_4 5}}{\cancel{\log_4 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_4 6}}{\cancel{\log_4 5}} \cdot \frac{\log_4 x}{\cancel{\log_4 6}} =$$

$$= \log_4 (2x - 1) \Rightarrow \frac{\log_4 x}{\log_4 4^{\frac{1}{2}}} = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_4 x = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow \log_4 x^2 = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Como esse valor atende à condição de existência, temos: $S = \{1\}$

18. Para $x = 1$, temos: $f(x) = 2$
Para $x = 5$, temos: $f(x) = 1$

- $\log_a 1 + k = 2 \Rightarrow 0 + k = 2 \Rightarrow k = 2$
- $\log_a 5 + k = 1 \Rightarrow \log_a 5 + 2 = 1 \Rightarrow \log_a 5 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$

Assim:

$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x + 2$

$g(x) = f(x) - 2 \Rightarrow g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

Logo: $g(125) = \log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

Autoavaliação

1. $\log_g h = i \Leftrightarrow g^i = h$
alternativa a

2. Condições de existência para $\log_g h = i$
- $h > 0$
- $g > 0$ e $g \neq 1$

alternativa c

3. $\log_4 \frac{2}{3} = \log_4 2 - \log_4 3$
alternativa c

4. $\log_{39} 42 = \frac{\log 42}{\log 39}$
alternativa b

5. $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0{,}30 + 0{,}47 = 0{,}77$
alternativa b

6. $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$
$10 = -\log_{10} [\text{H}^+]$
$-10 = \log_{10} [\text{H}^+]$
$[\text{H}^+] = 10^{-10}$
alternativa a

7. Em $\log_{\frac{2}{7}} x$, a base é $\frac{2}{7}$. Como $0 < \frac{2}{7} < 1$, a função é decrescente.
alternativa d

8. As funções logarítmica e exponencial são funções inversas.
alternativa c

9. A função dada por $f(x) = \log_3 x$ é uma função logarítmica cuja representação gráfica é crescente, pois a base do logaritmo é maior que 1.
alternativa b

10. $\log_x 8 = 2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$
alternativa d

11. Condição de existência para $\log (x^2 + 6)$:
$x^2 + 6 > 0 \Rightarrow x^2 > -6$ (sempre)
Então:
$\log (x^2 + 6) < 1 \Rightarrow x^2 + 6 < 10^1 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$
alternativa d

Capítulo 9

Sequências

Identificar, analisar e estudar padrões numéricos e sequências são os principais objetivos desse capítulo. Com isso, pretende-se conduzir os alunos ao entendimento de que, dados alguns termos de uma sequência, é possível determinar sua lei de formação e, então, usá-la para obter os termos desconhecidos. Esse tipo de raciocínio pode facilitar a compreensão e a previsão de diversos fenômenos, como o estudo da velocidade com que um elemento radioativo se desintegra, no campo da Físico-Química. Destaca-se aqui o trabalho inter-relacionado entre os conceitos de sequência e função: por exemplo, ao se enfatizar que uma PA assemelha-se a uma função afim com domínio restrito ao conjunto dos números naturais ou, ainda, ao se explicar que uma PG é uma função do tipo exponencial com domínio restrito ao conjunto dos números naturais.

A interpretação gráfica das progressões e a resolução de situações-problema enriquecem o estudo, tornando o assunto mais atraente e significativo para os alunos.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. a) $f(n) = 4n - 8$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	-4	0	4	8	12

Os cinco primeiros termos da sequência são -4, 0, 4, 8 e 12.

b) $f(n) = -3$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	-3	-3	-3	-3	-3

Os cinco primeiros termos da sequência são -3, -3, -3, -3 e -3.

c) $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$

Os cinco primeiros termos da sequência são $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$.

2. a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 5n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

n	a_n
2	$a_2 = a_1 \cdot 5 \cdot 2 = 4 \cdot 10 = 40$
3	$a_3 = a_2 \cdot 5 \cdot 3 = 40 \cdot 15 = 600$
4	$a_4 = a_3 \cdot 5 \cdot 4 = 600 \cdot 20 = 12.000$

Os quatro primeiros termos da sequência são 4, 40, 600 e 12.000.

b) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_n = 3^n \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

n	a_n
2	$a_2 = 3^2 \cdot a_1 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$
3	$a_3 = 3^3 \cdot a_2 = 27 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{243}{2}$
4	$a_4 = 3^4 \cdot a_3 = 81 \cdot \left(-\frac{243}{2}\right) = -\frac{19.683}{2}$

Os quatro primeiros termos da sequência são $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$.

c) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (a_{n-1})^{-2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

n	a_n
2	$a_2 = (a_1)^{-2} = (-2)^{-2} = \frac{1}{4}$
3	$a_3 = (a_2)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$
4	$a_4 = (a_3)^{-2} = 16^{-2} = \frac{1}{256}$

Os quatro primeiros termos da sequência são -2, $\frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$.

3. Respostas possíveis:

a) (I) Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 0 = 2 \cdot (1 - 1)$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (2 - 1)$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot (3 - 1)$
$\vdots$
Para n qualquer, temos: $a_n = 2(n - 1)$
Logo, uma lei de formação da sequência dos números pares é $a_n = 2(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

(II) Para $n = 0$, temos: $a_0 = 2 \cdot 0$
Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 1$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 2 \cdot 2$
$\vdots$
Para n qualquer, temos: $a_n = 2n$
Logo, outra lei de formação da sequência dos números pares é $a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$.

b) A sequência é constante; logo: $a_n = 17$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) Para $n = 1$, temos: $a_1 = -3$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = -3 + 7 = a_1 + 7 = a_{2-1} + 7$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 4 + 7 = a_2 + 7 = a_{3-1} + 7$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 11 + 7 = a_3 + 7 = a_{4-1} + 7$
$\vdots$

$\vdots$

Para n qualquer, temos: $a_n = a_{n-1} + 7$
Uma lei de formação da sequência é:

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ com } n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

d) Para $n = 1$, temos: $a_1 = -\dfrac{1}{4}$

Para $n = 2$, temos:

$$a_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = a_{2-1} + \frac{1}{8}$$

Para $n = 3$, temos:

$$a_3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = a_{3-1} + \frac{1}{8}$$

Para $n = 4$, temos:

$$a_4 = 0 + \frac{1}{8} = a_{4-1} + \frac{1}{8}$$

$\vdots$

Para n qualquer, temos:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}$$

Uma lei de formação da sequência é:

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{8}, \text{ com } n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e) Para $n = 1$, temos: $a_1 = -5 = 5 \cdot (-1)^1$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 5 = 5 \cdot (-1)^2$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = -5 = 5 \cdot (-1)^3$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 5 = 5 \cdot (-1)^4$

$\vdots$

Para $n \in \mathbb{N}^*$, temos: $a_n = 5 \cdot (-1)^n$, que é uma lei de formação da sequência.

Os alunos podem perceber que, quando n é ímpar, $a_n = -5$ e, quando n é par, $a_n = 5$. Assim, a lei de formação também pode ser:

$$a_n = \begin{cases} -5, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 5, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

4. $\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Se $a_2 = 12$, temos: $12 = x \cdot a_1$,
mas $a_1 = x - 1$; então:
$12 = x \cdot (x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 4$
Para $x = -3$, a sequência será:
$(-4, 12, -36, 108, \ldots)$
Para $x = 4$, a sequência será:
$(3, 12, 48, 192, \ldots)$

5. a) $n = 1 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 1 \cdot 2 = 2$
$n = 2 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 2 \cdot 3 = 6$
$n = 3 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 3 \cdot 4 = 12$
$n = 4 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 4 \cdot 5 = 20$
Os números de pontos nas figuras são: (1, 3, 6, 10)
Então, para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.

b) Considerando a conclusão do item **a** (para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura), o número exato de pontos da enésima figura é dado por: $\dfrac{n \cdot (n + 1)}{2}$

Logo, a lei de formação que dá o número de pontos da enésima figura é: $T_n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) Na 13ª figura, temos $n = 13$; então:

$$T_{13} = \frac{13 \cdot (13 + 1)}{2} = 13 \cdot 7 = 91$$

Logo, 91 pontos formarão a 13ª figura.

d)
- Para que essa sequência tenha uma figura com 110 pontos, deve existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_n = 110$:

  $$\frac{n(n + 1)}{2} = 110$$

  $$n^2 + n - 220 = 0$$

  $$n = \frac{-1 \pm \sqrt{881}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{N}^*$$

  Portanto, essa sequência não tem uma figura com 110 pontos.

- Para que essa sequência tenha uma figura com 120 pontos, deve existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_n = 120$:

  $$\frac{n(n + 1)}{2} = 120$$

  $$n^2 + n - 240 = 0$$

  $$n = \frac{-1 \pm 31}{2 \cdot 1}$$

  $n = 15$ ou $n = -16$ (não serve)

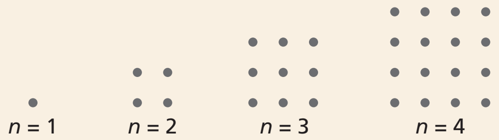
  Portanto, essa sequência tem uma figura com 120 pontos, que é a 15ª figura.

Comentário: Nessa questão, os alunos identificam, em função de n, o padrão de formação da sequência determinada pela quantidade de pontos que compõem cada figura associada ao respectivo n.

Esse momento pode ser aproveitado para apresentar aos alunos outros casos de figuras compostas de pontos, em que a quantidade de pontos das figuras determina uma sequência. É importante que os alunos analisem a sequência determinada e encontrem um padrão que permita escrever uma lei de formação para cada uma dessas sequências.

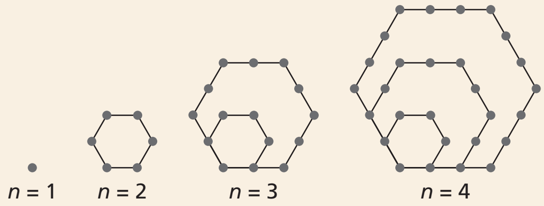
Alguns exemplos são:

- Números quadrados



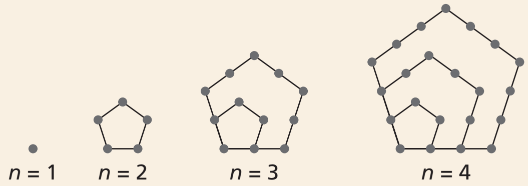
Lei de formação: $f(n) = n^2$

- Números hexagonais



Lei de formação: $f(n) = 2n^2 - n$

- Números pentagonais



Lei de formação: $f(n) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

É importante que, nesses casos, os alunos façam análises e elaborem estratégias para encontrar a lei de formação de cada sequência determinada pela quantidade de pontos de uma figura.

6. a)
- $a_2 - a_1 = -1 - (-5) = -1 + 5 = 4$
- $a_3 - a_2 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$
- $a_4 - a_3 = 7 - 3 = 4$
- $a_5 - a_4 = 11 - 7 = 4$
- $a_6 - a_5 = 15 - 11 = 4$
- $a_7 - a_6 = 19 - 15 = 4$

b) Espera-se que os alunos percebam que a diferença entre quaisquer dois valores consecutivos dessa sequência é igual a 4.

c) Espera-se que os alunos percebam que, para obter a_8, basta adicionar 4 ao termo $a_7 = 19$:
$a_8 = 4 + a_7 \Rightarrow a_8 = 4 + 19 \Rightarrow a_8 = 23$
Logo, o oitavo termo será 23.

d) Como a diferença entre dois termos consecutivos dessa sequência é igual a 4, temos:
$a_{n+1} - a_n = 4 \Rightarrow a_{n+1} = 4 + a_n$
Assim, conhecendo o valor de a_n, para calcular o valor de a_{n+1} adiciona-se 4 ao valor de a_n.

Comentário: Essa questão antecipa, de maneira informal, o conceito de PA, o que favorece o entendimento do próximo item do capítulo.

7. a) Considerando os valores apresentados na sequência, verifica-se que, a partir do terceiro termo, cada um dos termos é obtido pela soma dos dois termos anteriores, como pode ser confirmado na tabela:

n	a_n
1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = 1$
3	$a_3 = 1 + 1 = 2$
4	$a_4 = 2 + 1 = 3$
5	$a_5 = 3 + 2 = 5$
6	$a_6 = 5 + 3 = 8$
7	$a_7 = 8 + 5 = 13$

b) Pelo padrão observado, podemos dizer que basta adicionar os dois termos anteriores para se chegar ao termo procurado. Ou seja, observando a sequência já indicada, temos:
$a_8 = a_7 + a_6 \Rightarrow a_8 = 13 + 8 = 21$
$a_9 = a_8 + a_7 \Rightarrow a_9 = 21 + 13 = 34$
$a_{10} = a_9 + a_8 \Rightarrow a_{10} = 34 + 21 = 55$

c) Pelas respostas dos itens anteriores, verificamos que a lei de formação dessa sequência é:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

d) Resposta pessoal. A pesquisa também pode ser feita na internet, onde possivelmente os alunos encontrarão relação com a natureza, a pintura, a arte e a anatomia.

Comentário: Caso considere adequado, solicite aos alunos que busquem outras informações relacionadas à sequência de Fibonacci, como sua história, a descoberta da sequência, aplicações na Botânica etc. Caso ainda não tenha sugerido a leitura de livro para pesquisar, agora é um bom momento para indicar *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger.

8. a) É PA de razão $r = 7$ e $a_1 = 3$.

b) Não é PA, pois:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{500} - \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{3}{1.000} - \frac{1}{500} = \frac{1}{1.000}$$

$$a_4 - a_3 = \frac{3}{500} - \frac{3}{1.000} = \frac{3}{1.000}$$

Como $\frac{1}{1.000} \neq \frac{3}{1.000}$, a sequência não é uma PA.

c) Não é PA, pois:
$a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$
$a_3 - a_2 = (-1) - 1 = -2$
Como $2 \neq -2$, a sequência não é uma PA.

d) É PA de razão $r = -1$ e $a_1 = \frac{1}{2}$.

9. a) Se $a_1 = 12$ e $r = 7$, então:
$a_2 = 12 + 7 = 19$
$a_3 = 12 + 2 \cdot 7 = 26$
$a_4 = 12 + 3 \cdot 7 = 33$
$a_5 = 12 + 4 \cdot 7 = 40$
Os cinco primeiros termos da PA são 12, 19, 26, 33 e 40.

b) Se $a_1 = 12$ e $r = -7$, então:
$a_2 = 12 + (-7) = 5$
$a_3 = 12 + 2 \cdot (-7) = -2$
$a_4 = 12 + 3 \cdot (-7) = -9$
$a_5 = 12 + 4 \cdot (-7) = -16$
Os cinco primeiros termos da PA são 12, 5, −2, −9 e −16.

c) Se $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{2}$, então:

$$a_2 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$a_3 = -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$a_4 = -2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Os cinco primeiros termos da PA são -2, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ e 0.

d) Se $a_1 = 12$ e $r = -0{,}25$, então:
$a_2 = 12 + (-0{,}25) = 11{,}75$
$a_3 = 12 + 2 \cdot (-0{,}25) = 11{,}5$
$a_4 = 12 + 3 \cdot (-0{,}25) = 11{,}25$
$a_5 = 12 + 4 \cdot (-0{,}25) = 11$
Os cinco primeiros termos da PA são 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11.

10. a) $r = a_2 - a_1 = -5 - (-2) = -5 + 2 = -3$
Como $r < 0$, a PA é decrescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = -2 + (n - 1) \cdot (-3) \Rightarrow a_n = 1 - 3n$
Portanto, a lei de formação dessa PA é $f(n) = a_n = 1 - 3n$, com $1 \leqslant n \leqslant 5$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $r = a_2 - a_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$
Como $r = 0$, a PA é constante.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = \sqrt{3} + (n - 1) \cdot 0 \Rightarrow a_n = \sqrt{3}$
Portanto, a lei de formação dessa PA é $f(n) = a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $r = a_2 - a_1 = 0 - (-10) = 10$
Como $r > 0$, a PA é crescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = -10 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow a_n = 10n - 20$
Portanto, a lei de formação dessa PA é
$f(n) = a_n = 10n - 20$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d) $r = a_2 - a_1 = \frac{1}{500} - \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000}$

Como $r > 0$, a PA é crescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = \frac{1}{1.000} + (n - 1) \cdot \frac{1}{1.000} \Rightarrow a_n = \frac{n}{1.000}$
Portanto, a lei de formação dessa PA é
$f(n) = a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

11. $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, então:
$r = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4$
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$:
$a_{12} = a_1 + 11r = 1 + 11 \cdot 4 = 1 + 44 = 45$
Logo, a 12ª figura será formada por 45 bolinhas.

12. Em uma PA, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_{12} = a_1 + (12 - 1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow 247 = 5 + 11r \Rightarrow r = \frac{242}{11} \Rightarrow r = 22$
Logo, a razão dessa PA é 22.

13. a) $r = 13{,}40 - 14{,}20 = -0{,}80$

b) $a_{10} = a_1 + 9r = 14{,}20 + 9 \cdot (-0{,}80) = 7$
Se alguém comprar 10 carteiras, pagará R$ 7,00 em cada unidade, e por 10 carteiras pagará R$ 70,00.

c) Se comprasse 8 carteiras com o valor não promocional, a pessoa pagaria:
$8 \cdot 14{,}20 = 113{,}60$
Na promoção:
$8 \cdot a_8 = 8 \cdot (a_1 + 7r) = 8 \cdot 8{,}60 = 68{,}80$
Então, ao comprar 8 carteiras, uma pessoa pagaria R$ 113,60 pelo preço normal e R$ 68,80 pelo preço promocional. Na promoção, portanto, a economia seria R$ 44,80.

14. $r = 1.400$ e $a_2 = 2.000$
Temos que:
$a_8 = a_1 + (8 - 1)r = a_1 + 7r$
$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 = a_2 - r$
Logo:
$a_8 = a_2 - r + 7r = a_2 + 6r$
$a_8 = 2.000 + 6 \cdot 1.400 = 10.400$
Portanto, no oitavo dia, o atleta terá percorrido 10.400 m, ou seja, 10,4 km.

15. a) $a_{17} = a_1 + 16r$
$-39 = a_1 + 16 \cdot 4 \Rightarrow a_1 = -39 - 64 \Rightarrow a_1 = -103$
Logo, o primeiro termo dessa PA é -103.

b) $a_{10} = a_1 + 9r$
$9 = a_1 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \Rightarrow a_1 = 9 + 1 \Rightarrow a_1 = 10$
Logo, o primeiro termo dessa PA é 10.

16. a) (73, 51, 29, ...)
$r = 51 - 73 = -22$
Vamos achar n natural para que a_n seja menor que zero:
$a_n < 0 \Rightarrow a_1 + (n - 1)r < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 73 + (n - 1) \cdot (-22) < 0 \Rightarrow 73 - 22n + 22 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n > \frac{95}{22} \simeq 4{,}3$
Como a PA é decrescente, temos $n = 5$.
Então: $a_5 = 73 + 4 \cdot (-22) = -15$
Portanto, -15 é o primeiro número menor que zero dessa PA.

b) (101, 88, 75, ...)
$r = 88 - 101 = -13$
Vamos achar n natural para que a_n seja menor que zero:
$a_n < 0 \Rightarrow a_1 + (n - 1)r < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 101 + (n - 1) \cdot (-13) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 101 - 13n + 13 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n > \frac{114}{13} \simeq 8{,}8$
Como a PA é decrescente, temos $n = 9$.
Então: $a_9 = 101 + 8 \cdot (-13) = -3$
Portanto, -3 é o primeiro número menor que zero dessa PA.

17. $\begin{cases} a_4 = 10 \\ a_7 + a_{13} = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = 10 \\ a_1 + 6r + a_1 + 12r = -25 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = 10 \\ 2a_1 + 18r = -25 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, encontramos:
$a_1 = \frac{85}{4}$ e $r = -\frac{15}{4}$

18. Para que a sequência $(p + 5, 3p, p^2 - 1)$ seja uma PA, devemos ter:
$3p - (p + 5) = p^2 - 1 - 3p \Rightarrow p^2 - 5p + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p = 1$ ou $p = 4$
Logo, p pode assumir o valor 1 ou o valor 4.

19. Como $(3, x + 7, x^2 - 4, 6x)$ é uma PA, podemos escrever o seguinte sistema:
$\begin{cases} x + 7 - 3 = x^2 - 4 - (x + 7) \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 4 - (x + 7) = 6x - (x^2 - 4) \Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$
De (I): $x = 5$ ou $x = -3$
De (II): $x = 5$ ou $x = -\frac{3}{2}$
Assim, para satisfazer ambas as equações, x deve ser igual a 5.
Então, substituindo x por 5 nos termos da PA, obtemos: (3, 12, 21, 30)
Logo, o perímetro do quadrilátero cujas medidas dos lados são 3, 12, 21 e 30 unidades de comprimento é 66 unidades de comprimento.

20. Para inserir quatro meios aritméticos entre -12 e 48, vamos determinar a_2, a_3, a_4 e a_5 da PA
$(-12, a_2, a_3, a_4, a_5, 48)$.
$a_1 = -12$
$a_6 = 48 = -12 + 5r \Rightarrow 5r = 60 \Rightarrow r = 12$
Assim:
$a_2 = -12 + 12 = 0$
$a_3 = -12 + 2 \cdot 12 = 12$
$a_4 = -12 + 3 \cdot 12 = 24$
$a_5 = -12 + 4 \cdot 12 = 36$
Logo, a sequência procurada é
$(-12, 0, 12, 24, 36, 48)$.

21. A sequência dos múltiplos de 4 é uma PA de razão 4. O primeiro múltiplo de 4 existente entre 101 e 3.001 é $a_1 = 104$ e o último é $a_n = 3.000$.
De $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:
$3.000 = 104 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 3.000 = 104 + 4n - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4n = 2.900 \Rightarrow n = 725$
Portanto, existem 725 múltiplos de 4 entre 101 e 3.001.

22. A sequência dos números pares é uma PA de razão 2. O primeiro número par entre 23 e 987 é $a_1 = 24$ e o último é $a_n = 986$.
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 986 = 24 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 986 = 24 + 2n - 2 \Rightarrow 2n = 964 \Rightarrow n = 482$
Logo, há 482 números pares entre 23 e 987.

23. Temos: PA $(\underset{\substack{\uparrow\\ a_1}}{10}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow\\ a_n}}{184})$ e $r = 6$

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 184 = 10 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 184 = 10 + 6n - 6 \Rightarrow 6n = 180 \Rightarrow n = 30$
Descontando os extremos, temos: $30 - 2 = 28$
Logo, devem ser inseridos 28 meios aritméticos.

24. **a)** $a_1 = 660$, $r = -30$ e $n = 12$; então:
$a_{12} = a_1 + 11r = 660 + 11 \cdot (-30) = 330$
Logo, o valor da última prestação foi R$ 330,00.
O valor da penúltima prestação é dado por a_{11}:
$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = 660 + 10 \cdot (-30) = 360$
Logo, a penúltima prestação foi R$ 360,00.

b) Soma da primeira e da última prestação:
$660 + 330 = 990$
Logo, a soma é R$ 990,00.
Soma da segunda e da penúltima prestação:
$630 + 360 = 990$
Logo, a soma é R$ 990,00.

c) O valor final do carro a prazo foi:
$V = 3.500 + 660 + 630 + 600 + 570 + 540 +$
$+ 510 + 480 + 450 + 420 + 390 + 360 + 330$
$V = 9.440$
Logo, o valor final do carro a prazo foi R$ 9.440,00.

Comentário: Pode-se explorar melhor o item **b** mostrando aos alunos que a soma da primeira parcela com a última é 990, que é igual à soma da segunda com a penúltima, que é igual à soma da terceira com a antepenúltima, e assim por diante. Logo, a soma das 12 parcelas é igual a $6 \cdot (990)$, ou seja, 5.940. Portanto, o valor final do carro a prazo foi R$ 5.940,00 + R$ 3.500,00 de entrada, totalizando R$ 9.440,00.

25. Deve-se orientar os alunos a usar $x - r$, x e $x + r$ para representar três termos consecutivos de uma PA. Assim:

$$\begin{cases}(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 420\\ (x - r) + x + (x - r) = -12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x^2 - r^2) \cdot x = 420\\ 3x = -12\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^3 - xr^2 = 420\\ x = -4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-64 + 4r^2 = 420\\ x = -4\end{cases} \Rightarrow$$

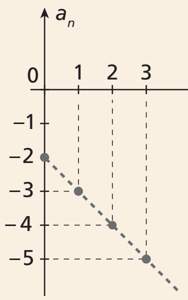
$$\Rightarrow \begin{cases}4r^2 = 484\\ x = -4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r^2 = 121\\ x = -4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r = 11 \text{ ou } r = -11\\ x = -4\end{cases}$$

Para $r = 11$ e $x = -4$, temos a seguinte PA:
$(-15, -4, 7)$
Para $r = -11$ e $x = -4$, temos a seguinte PA:
$(7, -4, -15)$

26. Tomando o termo geral de cada PA, podemos construir o gráfico correspondente.

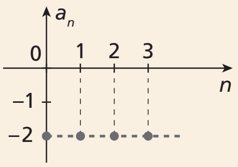
a) $a_n = -n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3
$a_n = -n - 2$	−2	−3	−4	−5



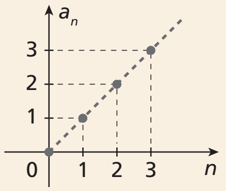
b) $a_n = -2$, com $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3
$a_n = -2$	−2	−2	−2	−2



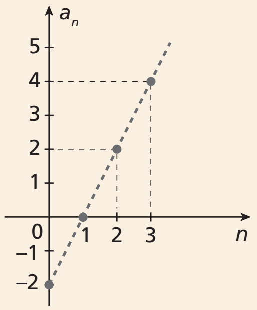
c) $a_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3
$a_n = n$	0	1	2	3



d) $a_n = 2n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3
$a_n = 2n - 2$	−2	0	2	4



27. $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$
$r = 1 - 3 = -2$
$f(n) = a_n = a_0 + nr = 3 - 2n$
Logo:
$f(0) = a_0 = 3$ $f(2) = a_2 = -1$
$f(1) = a_1 = 1$ $f(3) = a_3 = -3$
Portanto, o gráfico do item **d** representa a PA.
Comentário: Essa questão propicia a reversibilidade procedimental da atividade imediatamente anterior. Para obter um aproveitamento mais completo, os alunos podem determinar a lei de formação de cada uma das sequências representadas graficamente.
Também pode ser aprofundado o estudo da representação gráfica de uma PA, apresentando aos alunos gráficos semelhantes aos propostos a seguir, para que eles discutam se esses gráficos podem ser representações de uma PA ou não, justificando suas decisões.

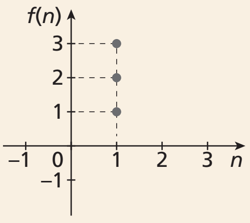


gráfico 1

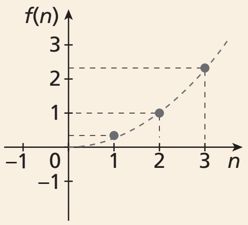


gráfico 2

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Espera-se que os alunos percebam que o gráfico 1 não pode ser a representação de uma PA, pois, nesse caso, o termo a_1 é o único da sequência e ele está assumindo diversos valores; logo, essa representação não caracteriza uma PA. A curva que representa o gráfico 2 não é semelhante à representação gráfica de uma função afim, ou seja, o gráfico apresentado não está associado a uma PA.

28. $f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$
Para $n = 0$, temos $f(n) = -2$, então: $a_0 = -2$
Para $n = 3$, temos $f(n) = 3$, então:
$-2 + 3r = 3 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$
Logo:
$a_1 = a_0 + r = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$
$a_2 = a_0 + 2r = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$
$a_3 = 3$
$a_4 = a_0 + 4r = -2 + \frac{20}{3} = \frac{14}{3}$
Portanto, a PA é $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$.

29. **a)** $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$r = -27 - (-57) = 30$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot 30 = -57 + 23 \cdot 30 = 633$
$S_{24} = \frac{24 \cdot (-57 + 633)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot 576 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{24} = 6.912$

b) $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$r = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot 2 = \frac{2}{3} + 23 \cdot 2 = \frac{140}{3}$
$S_{24} = \frac{24 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{140}{3}\right)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot \frac{142}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{24} = 568$

c) Como a PA é constante, a soma de seus 24 primeiros termos será:
$S_{24} = 24 \cdot 7 \Rightarrow S_{24} = 168$

d) $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$r = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{23}{4} = \frac{21}{4}$
$S_{24} = \frac{24 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{21}{4}\right)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot \frac{19}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{24} = 57$

30. Em 12 anos temos $12 \cdot 12 = 144$ parcelas. Então, temos a seguinte PA: $(600, 605, 610, \ldots, a_{144})$
O valor total é a soma de todas as parcelas.
Inicialmente, devemos calcular o 144º termo dessa sequência.
$a_{144} = a_1 + 143r = 600 + 143 \cdot 5 = 1.315$
$S_{144} = \frac{144 \cdot (600 + 1.315)}{2} = 137.880$
Logo, o valor do imóvel é R$ 137.880,00.

31. **a)** $a_8 = a_1 + 7 \cdot (-8)$
$a_8 = 140 + (-56)$
$a_8 = 84$
Logo, no oitavo mês do plano o aluno pagará R$ 84,00.

b) $a_{12} = a_1 + 11 \cdot (-8) = 140 - 88 = 52$
$S_{12} = \frac{12 \cdot (a_1 + a_{12})}{2} = 6 \cdot (140 + 52) = 1.152$
Então, o valor total anual será R$ 1.152,00.

c) $\frac{1.152}{12} = 96$
Logo, o valor pago por mês, em média, será R$ 96,00.

32. Sabemos que:
$a_1 = 3$, $r = 19 - 3 = 16$ e $S_n = 472$
Assim:
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow 472 = \frac{n(3 + a_n)}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3n + na_n = 944$ (I)
Mas $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 3 + (n - 1) \cdot 16 = 16n - 13$
Substituindo o valor de a_n por $16n - 13$ em (I), obtemos:
$3n + n \cdot (16n - 13) = 944 \Rightarrow 16n^2 - 10n - 944 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 8$ ou $n = -\frac{59}{8}$ (não serve)
Logo, devem ser somados 8 termos dessa PA para que $S_n = 472$.

33. Como a razão r é 6, temos:
$a_{30} = a_1 + 29r \Rightarrow a_{30} = a_1 + 29 \cdot 6 \Rightarrow a_{30} = a_1 + 174$
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$S_{30} = \frac{30 \cdot (a_1 + a_1 + 174)}{2} \Rightarrow 1.430 = 15(2a_1 + 174) \Rightarrow$
$\Rightarrow 30a_1 = 1.430 - 2.610 \Rightarrow 30a_1 = -1.180 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 = -\frac{118}{3}$
Assim: $a_8 = a_1 + 7 \cdot r = -\frac{118}{3} + 42 = \frac{8}{3}$
Logo, o oitavo termo dessa PA é $\frac{8}{3}$.

34. A sequência dos múltiplos de 6 é uma PA de razão 6.
O primeiro múltiplo de 6 no intervalo]230, 650[é 234, e o último múltiplo de 6 nesse intervalo é 648.
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 648 = 234 + 6n - 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6n = 420 \Rightarrow n = 70$
Logo, existem 70 múltiplos de 6 entre 230 e 650.
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{70} = \frac{70 \cdot (234 + 648)}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{70} = 30.870$
Portanto, a soma dos múltiplos de 6 compreendidos entre 230 e 650 é 30.870.

35. $\frac{x}{2} + \frac{7x}{10} + \frac{9x}{10} + \ldots + \frac{17x}{10} = 462$
Podemos perceber que essa equação representa a soma dos termos de uma PA em que:
$r = \frac{x}{5}$, $a_1 = \frac{x}{2}$ e $a_n = \frac{17x}{10}$
Primeiro, vamos determinar o valor de n:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$\frac{17x}{10} = \frac{x}{2} + (n - 1) \cdot \frac{x}{5} \Rightarrow n - 1 = \frac{12x}{10} \cdot \frac{5}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$
Agora, vamos determinar o valor de x:
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$462 = \frac{7\left(\frac{x}{2} + \frac{17x}{10}\right)}{2} \Rightarrow \frac{22x}{10} = \frac{462 \cdot 2}{7} \Rightarrow$
$\Rightarrow 22x = 132 \cdot 10 \Rightarrow x = 60$
Logo, $S = \{60\}$.

36. Representando a situação, temos:

$S_n = 448$, $a_1 = 13$, $a_2 = 15$, $a_3 = 17$ e $r = 2$

Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1)r = 13 + (n - 1)\cdot 2 = 11 + 2n$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$448 = \frac{n\cdot(13 + 11 + 2n)}{2} \Rightarrow 448 = 12n + n^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^2 + 12n - 448 = 0 \Rightarrow n = 16$ ou $n = -28$ (não serve)

Portanto, o número total de filas desse cinema é 16.

37. Podemos representar as quantidades de lotes distribuídos por uma PA de $r = 2$ e $a_1 = 1$.

Se foram distribuídas 1.089.000 ações e cada lote tem 1.000 ações, então foram distribuídos 1.089 lotes.

Seja n o número de clientes e a_n o número de lotes do último cliente premiado, temos:

$a_n = 1 + 2(n - 1) \Rightarrow a_n = 2n - 1$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$1.089 = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} \Rightarrow n = 33$$

Portanto, o número de clientes presenteados foi 33.

alternativa e

38. Como a PA é crescente, $r > 0$.

$(a_4)^2 = 144 \Rightarrow a_4 = 12$ (I) ou $a_4 = -12$ (II)

(I) Para $a_4 = 12$, vamos ter:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = -26 \\ a_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + r + a_1 + 2r = -26 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = -26 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -38 \text{ e } r = \frac{50}{3}$$

(II) Para $a_4 = -12$, vamos ter:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = -26 \\ a_4 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = -26 \\ a_1 + 3r = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -14 \text{ e } r = \frac{2}{3}$$

Logo, $a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$ ou $a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$.

- Se $a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$, temos:

$$a_5 = a_1 + 4r = -38 + \frac{200}{3} = \frac{86}{3}$$

$$S_5 = \frac{5\cdot(a_1 + a_5)}{2} = \frac{5\cdot\left(-38 + \frac{86}{3}\right)}{2} =$$

$$= \frac{-\frac{140}{3}}{2} = -\frac{70}{3}$$

- Se $a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$, temos:

$$a_5 = a_1 + 4r = -14 + 4\cdot\frac{2}{3} = -\frac{34}{3}$$

$$S_5 = \frac{5\cdot(a_1 + a_5)}{2} = \frac{5\cdot\left(-14 - \frac{34}{3}\right)}{2} = \frac{-\frac{380}{3}}{2} = -\frac{190}{3}$$

Portanto, se $r = \frac{50}{3}$, então $S_5 = -\frac{70}{3}$ e, se $r = \frac{2}{3}$, então $S_5 = -\frac{190}{3}$.

39. **a)** É uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante $q = \frac{1}{4}$.

b) É uma PA, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o anterior a uma constante $r = 10$.

c) É uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante $q = 2$.

d) É uma PA, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o anterior a uma constante $r = 1$.

40. **a)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi > 1$

$a_1 = \pi > 0$

Logo, a PG é crescente.

b) Como $q < 0$ e $a_1 \neq 0$, a PG é oscilante.

c) Como $q > 1$ e $a_1 < 0$, a PG é decrescente.

d) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = 1$

Como $q = 1$, a PG é constante.

41. **a)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{12}{5}}{-3} = -\frac{12}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5}$

- $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = -3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

b) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

- $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{10}{\pi}}{5} = \frac{10}{\pi}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{\pi}$

- $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 5\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

d) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2$

- $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 5\cdot(-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

- Para representar graficamente, para cada valor n, marcamos o valor a_n correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.

42. **a)** $a_1 = 4$

$a_2 = 4\cdot 6 = 24$

$a_3 = 4\cdot 6^2 = 144$

$a_4 = 4\cdot 6^3 = 864$

$a_5 = 4\cdot 6^4 = 5.184$

Logo, os cinco primeiros termos da PG são 4, 24, 144, 864 e 5.184.

b) $a_1 = x^2$

$$a_2 = x^2\cdot\frac{y}{x^3} = \frac{y}{x}$$

$$a_3 = x^2\cdot\left(\frac{y}{x^3}\right)^2 = x^2\cdot\frac{y^2}{x^6} = \frac{y^2}{x^4}$$

$$a_4 = x^2\cdot\left(\frac{y}{x^3}\right)^3 = x^2\cdot\frac{y^3}{x^9} = \frac{y^3}{x^7}$$

$$a_5 = x^2\cdot\left(\frac{y}{x^3}\right)^4 = x^2\cdot\frac{y^4}{x^{12}} = \frac{y^4}{x^{10}}$$

$$a_6 = x^2\cdot\left(\frac{y}{x^3}\right)^5 = x^2\cdot\frac{y^5}{x^{15}} = \frac{y^5}{x^{13}}$$

Logo, os seis primeiros termos da PG são x^2, $\frac{y}{x}$, $\frac{y^2}{x^4}$, $\frac{y^3}{x^7}$, $\frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$.

43. A dívida forma a PG $(112, 336, ..., a_6)$, com $q = 3$.

$a_6 = 112\cdot 3^5 = 112\cdot 243 = 27.216$

Portanto, o valor da dívida daqui a cinco anos será R$ 27.216,00.

44. Podemos representar a situação por uma PG de $a_0 = 1$, $q = 2$ e $n = 9$ ($9 \cdot 30$ min $= 4$ h 30 min)

$a_9 = a_0 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$

Logo, após 4 horas e 30 minutos, existirão 512 bactérias.

45. $\begin{cases} a_4 = a_1 \cdot q^3 = 27 \\ a_7 = a_1 \cdot q^6 = 125 \end{cases} \Rightarrow q^3 = \dfrac{125}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^3 \Rightarrow q = \dfrac{5}{3}$

$a_4 = a_1 \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^3 = 27 \Rightarrow a_1 = \dfrac{27 \cdot 27}{125} \Rightarrow a_1 = \dfrac{729}{125}$

Logo, o primeiro termo dessa PG é $\dfrac{729}{125}$.

46. $a_2 = 1$ e $a_5 = \dfrac{1}{343}$

$a_2 = a_1 \cdot q$ e $a_5 = a_1 \cdot q^4$

Logo:

$a_5 = a_2 \cdot q^3 \Rightarrow \dfrac{1}{343} = 1 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \dfrac{1}{343} \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \left(\dfrac{1}{7}\right)^3 \Rightarrow q = \dfrac{1}{7}$

Logo, a razão dessa PG é $\dfrac{1}{7}$.

47. Na PG apresentada, temos:

$a_1 = 3$, $a_n = \dfrac{1}{19.683}$ e $q = \dfrac{1}{9}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Então:

$\dfrac{1}{19.683} = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{59.049} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^5 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$

Logo, essa PG tem 6 termos.

48. Nessa situação, temos uma PG e as seguintes informações: $a_4 = 6.600$ e $q = 2$

Logo:

$a_4 = a_1 \cdot q^3$ e $a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = a_4 \cdot q^2$

$a_6 = a_4 \cdot q^2 = 6.600 \cdot 2^2 = 26.400$

Assim, o atleta correrá 26.400 m no sexto dia de treinamento.

49. PG $(x, 2x, x^2)$

$q = \dfrac{2x}{x} = 2$

Como a razão é 2, temos:

$x^2 = 2 \cdot 2x$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x = 0$ (não serve, pois a PG é crescente) ou $x = 4$

Logo, $x = 4$.

50. Usando x para o número a ser adicionado, $(2 + x, 6 + x, 15 + x)$ representará a PG que queremos determinar. Então:

$q = \dfrac{6 + x}{2 + x} = \dfrac{15 + x}{6 + x}$, com $x \neq -2$ e $x \neq -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow (6 + x)^2 = (2 + x) \cdot (15 + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 + 12x + x^2 = 30 + 2x + 15x + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x - 12x = 36 - 30 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = \dfrac{6}{5}$

Logo, o número a ser adicionado é $\dfrac{6}{5}$.

51. Temos a seguinte PG:

$(6, a_2, a_3, a_4, a_5, 192)$

$192 = 6 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow q = 2$

Logo, a PG é (6, 12, 24, 48, 96, 192).

52. Sendo x o termo intermediário e $q \neq 0$ a razão da PG, podemos denotar os três termos consecutivos da seguinte maneira: $\left(\dfrac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{q} + x + x \cdot q = 105 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 27.000 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II): $x^3 = 27.000 \Rightarrow x = 30$

Multiplicando a equação (I), temos:

$x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105q$

Substituindo x por 30 nessa equação, obtemos:

$30q^2 - 75q + 30 = 0 \Rightarrow q = 2$ ou $q = \dfrac{1}{2}$

Então:

- para $q = 2$, os números procurados são 15, 30 e 60;
- para $q = \dfrac{1}{2}$, os números procurados são 60, 30 e 15.

53. Dado um quadrado de lado a, sua área é a^2 e sua diagonal mede $a\sqrt{2}$.

Assim, temos a PG: $(a, a\sqrt{2}, a^2)$

$q = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2}} \Rightarrow a = 2$

Perímetro: $4a = 4 \cdot (2) = 8$

Logo, a razão da PG é $\sqrt{2}$, e as medidas do lado e do perímetro do quadrado são, respectivamente, 2 e 8.

54. **a)**
- Após o segundo mês:

  $C_2 = C_1 + C_1 \cdot i$

  $C_2 = C_0(1 + i) + C_0(1 + i)i$

  $C_2 = C_0(1 + i)(1 + i)$

  $C_2 = C_0(1 + i)^2$
- Após o terceiro mês:

  $C_3 = C_2 + C_2 \cdot i$

  $C_3 = C_0(1 + i)^2 + C_0(1 + i)^2 i$

  $C_3 = C_0(1 + i)^2(1 + i)$

  $C_3 = C_0(1 + i)^3$

Logo, após o segundo mês o montante será $C_2 = C_0(1 + i)^2$ e após o terceiro mês será $C_3 = C_0(1 + i)^3$.

b) $q = \dfrac{C_1}{C_0} = \dfrac{C_0(1 + i)}{C_0} = 1 + i$

Logo, a razão é $1 + i$.

c) $C_0 = C_0(1 + i)^0$

$C_1 = C_0(1 + i)^1$

$C_2 = C_0(1 + i)^2$

$C_3 = C_0(1 + i)^3$

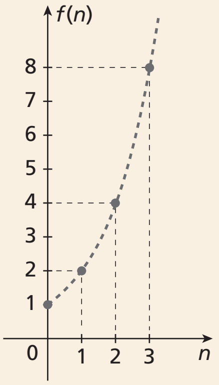
$\vdots$

$C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

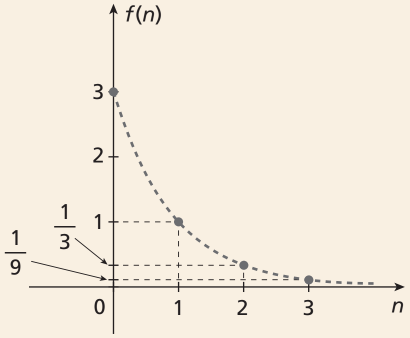
Comentário: Avalie a conveniência de observar aos alunos que a fórmula obtida no item **c** é a fórmula do juro composto, que será retomada no livro do 3º ano, no capítulo "Matemática financeira".

55. Considerando como domínio o conjunto dos números naturais, teremos os gráficos a seguir.

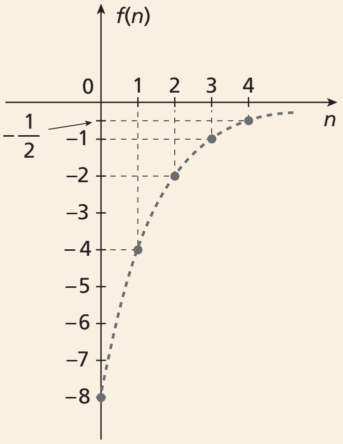
a) (1, 2, 4, 8, ...)



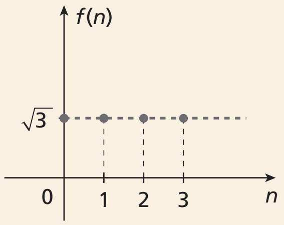
b) $\left(3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots\right)$



c) PG $\left(-8,\ -4,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \ldots\right)$



d) PG $(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \ldots)$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

56. **a)** Como o gráfico é a representação de uma PG, temos:

$f(n) = a_n = a_0 \cdot q^n$

$f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

$f(1) = a_0 \cdot q^1 \Rightarrow 1 \cdot q = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$

Substituindo a_0 por 1 e q por $\frac{1}{4}$ na lei de formação da PG, obtemos:

$f(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

b) Como a_0 é o primeiro termo, a_9 é o décimo termo.

Assim: $a_9 = f(9) = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{4^9}$

c) Essa PG não tem nenhum termo menor ou igual a zero, pois não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant 0$.

Comentário: Nesse exercício é apresentado o gráfico de uma sequência cuja lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Como um aprofundamento, pode-se verificar como os valores que n pode assumir influenciam o gráfico e a lei de formação de uma sequência. Para isso, os alunos podem refletir sobre as seguintes questões:

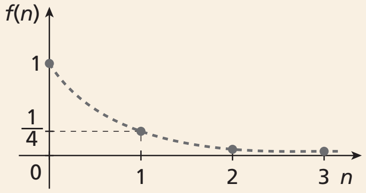
- Quais são os quatro primeiros termos da PG cuja lei de formação é: $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$?
- Considerando $n \in \mathbb{N}^*$, reescreva a lei de formação acima, de tal modo que os termos obtidos no item anterior sejam os mesmos, ou seja, a PG não seja alterada.
- Como será a representação gráfica dessa nova sequência?
- Considerando as respostas dos itens anteriores, pode-se afirmar que essa PG tem mais de uma lei de formação e mais de uma representação gráfica?

Espera-se que os alunos percebam que, para a PG apresentada no exercício, cujos quatro primeiros termos são $\left(1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \ldots\right)$, a lei de formação dependerá dos valores de n considerados:

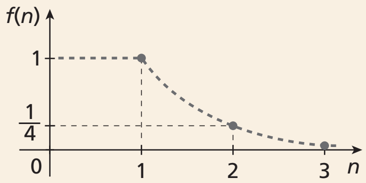
- para $n \in \mathbb{N}$, a lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$;
- para $n \in \mathbb{N}^*$, a lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

A representação gráfica dessa sequência também varia de acordo com os valores de n considerados:

- para $n \in \mathbb{N}$, é obtido o seguinte gráfico:



- para $n \in \mathbb{N}^*$, é obtido o seguinte gráfico:



57. $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$S_5 = \frac{6 \cdot (8^5 - 1)}{8 - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{6 \cdot 32.767}{7} \Rightarrow S_5 = 28.086$

58. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 256 = a_1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{256}{2^{n-1}}$ (I)

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 504 = \frac{a_1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 504 = a_1 \cdot (2^n - 1) \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$504 = \frac{256}{2^{n-1}} \cdot (2^n - 1) \Rightarrow 504 \cdot 2^{n-1} = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 504 \cdot \frac{2^n}{2} = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow 252 \cdot 2^n = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

Substituindo $n = 6$ em (I), obtemos:

$$a_1 = \frac{256}{2^{6-1}} \Rightarrow a_1 = 8$$

59. Como os termos do primeiro membro formam uma PG, temos: $a_1 = 7x$; $a_n = 189x$; $q = 3$; $S_n = 560$

Assim:

$$560 = \frac{7x \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow 1.120 = 7x \cdot (3^n - 1) \text{ (I)}$$

Sabemos também que:

$$189x = 7x \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 27 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4$$

Substituindo $n = 4$ em (I), obtemos:

$$1.120 = 7x \cdot (3^4 - 1) \Rightarrow 1.120 = 560x \Rightarrow x = 2$$

60. Podemos escrever a sequência do número de pessoas transportadas a cada ano como uma PG.

Como devemos calcular o total de passageiros em sete anos (de 2011 a 2017), o número de elementos da PG é $n = 7$.

- Para o ano de 2011, temos:
  $a_1 = 500.000$
- Para o ano de 2012, temos:
  $a_2 = 500.000 + 500.000 \cdot 0{,}04 =$
  $= 500.000 \cdot (1 + 0{,}04) = 500.000 \cdot 1{,}04 = 520.000$
- Para o ano de 2013, temos:
  $a_3 = 520.000 + 520.000 \cdot 0{,}04 = 520.000 \cdot (1 + 0{,}04) =$
  $= 520.000 \cdot 1{,}04 = 540.800$

Veja que, a partir de 2012, o número de passageiros é igual ao número do ano anterior multiplicado por 1,04. Portanto, a razão da PG é $q = 1{,}04$.

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, obtemos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{500.000 \cdot \left[(1{,}04)^7 - 1\right]}{1{,}04 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_7 \simeq 3.949.147$$

Logo, de 2011 a 2017, foram transportados aproximadamente 3.949.147 passageiros por essa empresa de ônibus.

61. $a_1 = 25.000$; $q = 1{,}15$

$$S_{12} = \frac{a_1 \cdot (q^{12} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{12} = \frac{25.000 \cdot (1{,}15^{12} - 1)}{1{,}15 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{12} \simeq 725.042$$

Logo, nesse ano a empresa produziu aproximadamente 725.042 unidades desse produto.

62.

Dia da semana	Número de pessoas que receberam a mensagem
Sábado	3
Domingo	$3 \cdot 3 = 9$
Segunda-feira	$9 \cdot 3 = 27$
Terça-feira	$27 \cdot 3 = 81$
⋮	⋮

O número de pessoas que receberam a mensagem a cada dia forma uma PG de $a_1 = 3$ e $q = 3$.

Para descobrir quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte, é necessário calcular a soma dos oito primeiros termos dessa PG:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{3 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 9.840$$

Logo, até o sábado seguinte, 9.840 pessoas receberam a mensagem.

63. **a)** Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_4 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{\frac{1}{16} - 1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{15}{8} \Rightarrow S_4 = 1{,}875$$

b) $S_{10} = \frac{1.023}{512} \simeq 1{,}998$

$S_{20} = \frac{1.048.575}{524.288} \simeq 1{,}999$

c) Espera-se que os alunos percebam que, quanto maior o valor de n, mais o valor da soma desses n elementos da PG se aproximará de 2.

Comentário: O objetivo do item **c** desse exercício é fazer os alunos refletirem sobre o comportamento da soma dos termos de uma PG infinita. Para esse item ser aprofundado, eles podem observar o comportamento do valor de q^n quando o valor de n aumenta e o valor de q está entre -1 e 1. Espera-se que eles concluam que esse valor tende a zero; logo, o valor da soma dos termos dessa PG dependerá apenas dos valores de a_1 e q. Eles podem tentar elaborar um texto que justifique a resposta encontrada utilizando uma calculadora. Esse tipo de reflexão facilitará a compreensão do próximo assunto a ser trabalhado no capítulo.

64. **a)** As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = 15$ e $q = \frac{2}{3}$.

Portanto, a soma dos infinitos termos será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{15}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{15}{\frac{1}{3}} = 15 \cdot 3 = 45$$

b) As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = -\pi$ e $q = \frac{1}{2}$.

Portanto, a soma dos infinitos termos será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-\pi}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\pi}{\frac{1}{2}} = -2\pi$$

65. **a)** $2 - 1 + \frac{1}{2} - \ldots$ é dada pela soma dos infinitos termos de uma PG, com $q = -\frac{1}{2}$ e $a_1 = 2$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

b) $12 - 4 + \frac{4}{3} - \ldots$ é dada pela soma dos infinitos termos de uma PG, com $q = -\frac{1}{3}$ e $a_1 = 12$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{12}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{12}{1 + \frac{1}{3}} = 9$$

66. **a)** Seja $x = 0{,}777\ldots$ Então, podemos escrever:

$x = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots$

As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = 0{,}7$ e $q = 0{,}1$.

Portanto, a fração geratriz é dada por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0{,}7}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}7}{0{,}9} = \frac{7}{9}$$

b) Seja $x = 0{,}060606...$ Então, podemos escrever:
$x = 0{,}06 + 0{,}0006 + 0{,}000006 + ...$
As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = 0{,}06$ e $q = 0{,}01$.
Portanto, a fração geratriz é dada por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0{,}06}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}06}{0{,}99} = \frac{6}{99} = \frac{2}{33}$$

c) Seja $x = 0{,}1222...$ Então:
$x = 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}002 + ...$
A partir da segunda parcela, temos uma PG infinita, com $a_1 = 0{,}02$ e $q = 0{,}1$.
Então:

$$x = 0{,}1 + \frac{0{,}02}{1 - 0{,}1} = \frac{1}{10} + \frac{2}{90} = \frac{11}{90}$$

d) Seja $x = 0{,}12333...$ Então:
$x = 0{,}12 + 0{,}003 + 0{,}0003 + ...$
A partir da segunda parcela, temos uma PG infinita, com $a_1 = 0{,}003$ e $q = 0{,}1$. Então:

$$x = 0{,}12 + \frac{0{,}003}{1 - 0{,}1} = \frac{12}{100} + \frac{3}{900} = \frac{111}{900}$$

67. Temos a PG (20, 10, 5, ...).

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{20}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40$$

Logo, a distância total percorrida pelo atleta é 40 km.

68. Sem contar a primeira queda, as distâncias percorridas pela bola formam a PG (100, 50, 25, ...), em que $a_1 = 100$ e $q = \frac{1}{2}$. A soma dos infinitos termos dessa PG é igual a:

$$\frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

Somando agora a distância da primeira queda:
$200 + 100 = 300$
Logo, a distância total percorrida pela bola é 300 m.

69. Os lados dos quadrados formam a PG $\left(a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, ...\right)$.

Então, suas áreas formam a PG $\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, ...\right)$

E assim sucessivamente.

Temos, então, uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo a^2.

O limite da soma das áreas dos quadrados é dado por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$$

70. PA $\left(10, x, \frac{19}{2}\right)$

$$x - 10 = \frac{19}{2} - x \Rightarrow x = \frac{39}{4}$$

Então, temos: PG $\left(1, \frac{39}{4} - 8, y\right) \Rightarrow$ PG $\left(1, \frac{7}{4}, y\right)$

Nessa PG: $q = \dfrac{\frac{7}{4}}{1} = \dfrac{7}{4}$ e $q = \dfrac{y}{\frac{7}{4}} = \dfrac{4y}{7}$

Logo: $\dfrac{4y}{7} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow y = \dfrac{49}{16}$

Portanto, $x = \dfrac{39}{4}$ e $y = \dfrac{49}{16}$.

71. Da PG $\left(20, a, 5, \frac{5}{2}\right)$, podemos calcular a razão:

$$q = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

Assim: $a = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

A sequência $(5q, 3, b, c)$ tem $a_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ e $a_2 = 3$.

Portanto, podemos calcular a razão: $r = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

Assim: $b = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$c = b + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$

Portanto, $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$.

72. (I) Como a, b e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA, temos:
$b - a = (a + b) - b \Rightarrow b = 2a$

(II) Como 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG, temos:

$$\frac{16}{2^a} = \frac{2^b}{16} \Rightarrow 16^2 = 2^a \cdot 2^b \Rightarrow 2^8 = 2^{a+b} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a + b = 8$$

Assim, de (I) e (II), temos:

$3a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$

alternativa e

73. Como os três números estão em PA, podemos indicá-los por $x - r$, x e $x + r$. Assim:
$x - r + x + x + r = 90 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30$
Logo, temos a PA $(30 - r, 30, 30 + r)$.
Acrescentando 10 ao segundo termo e 40 ao último termo, temos a PG $(30 - r, 40, 70 + r)$. Nessa PG:

$$\frac{40}{30 - r} = \frac{70 + r}{40} \Rightarrow 1.600 = 2.100 + 30r - 70r - r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2 + 40r - 500 = 0 \Rightarrow r = -50 \text{ ou } r = 10$$

- Se $r = -50$, os três números serão 80, 30 e -20 (não serve, pois, de acordo com o enunciado, os três números são positivos).
- Se $r = 10$, os três números serão 20, 30 e 40.

Portanto, os números são 20, 30 e 40.

74. Representando a PA e a PG, temos:
- PA $(2, a_2 + 1, a_3)$, com $a_3 > 0$
- PG $(2, a_2, a_3)$, com $a_3 > 0$

Então, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_2 + 1 - 2 = a_3 - (a_2 + 1) \\ \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{a_3}{a_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \dfrac{a_3}{2} & \text{(I)} \\ (a_2)^2 = 2a_3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de a_2 por $\frac{a_3}{2}$ na equação (II), obtemos:

$$\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 = 2a_3 \Rightarrow a_3 \cdot \left(\frac{a_3}{4} - 2\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_3 = 8 \text{ ou } a_3 = 0 \text{ (não serve)}$$

Logo, o terceiro termo das progressões é 8.

75. **a)** PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ e PG $(d_1, d_2, d_3, ...)$
Sabemos que:
- PA de razão $r = 4 \Rightarrow (a - 4, a, a + 4, ...)$ (I)
- PG de razão $q = r - 1 \Rightarrow q = 3$
- $d_1 = a_1 + 3 = a - 4 + 3 = a - 1$
- $d_2 = a_2 + 5 = a + 5$
- $d_3 = a_3 + 19 = a + 4 + 19 = a + 23$

Podemos, então, escrever:
PG $(a - 1, a + 5, a + 23, ...)$
Sendo $q = 3$, temos:

$$\frac{a + 5}{a - 1} = 3 \Rightarrow a + 5 = 3a - 3 \Rightarrow a = 4$$

Substituindo o valor de a em (I), obtemos:
PA (0, 4, 8, ...)
Portanto:
$a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$

b) O décimo termo da PA é:

$a_{10} = 0 + 9 \cdot 4 \Rightarrow a_{10} = 36$

A soma dos 10 primeiros termos da PA é:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (0 + 36)}{2} \Rightarrow S_{10} = 180$$

c) Temos a PG (3, 9, 27, ...), com $q = 3$.

$$S_5 = \frac{3 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{3 \cdot 242}{2} \Rightarrow S_5 = 363$$

Exercícios complementares

1. Na sequência $\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, \frac{12}{7}, \frac{15}{8}, \ldots\right)$, temos:

$$a_1 = \frac{3 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{3}{4}$$

$$a_2 = \frac{3 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{6}{5}$$

$$a_3 = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = \frac{12}{7}$$

$$a_5 = \frac{3 \cdot 5}{3 + 5} = \frac{15}{8}$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{3n}{3 + n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

2. Nos meses de janeiro, fevereiro e março foram vendidas, respectivamente, 33.000, 34.500 e 36.000 passagens. Como o padrão de crescimento é mantido para os próximos meses, essas vendas formam uma PA de razão $r = 1.500$. Queremos saber o número de passagens vendidas no mês de julho, ou seja, o sétimo termo dessa PA:

$a_7 = 33.000 + (7 - 1) \cdot 1.500 = 42.000$

Portanto, foram vendidas 42.000 passagens.

alternativa d

3. A sequência (1896, 1900, 1904, ..., 2016) é uma PA de $a_1 = 1896$, $a_n = 2016$ e $r = 4$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$2016 = 1896 + (n - 1)4 \Rightarrow n - 1 = \frac{120}{4} \Rightarrow n = 31$$

Assim, caso nenhum dos Jogos Olímpicos tivessem sido cancelados nesse período, em 2016 teriam ocorrido 31 vezes.

De acordo com o enunciado, em 2016 ocorreu a 28ª edição dos Jogos Olímpicos, e não a 31ª edição. Logo, os Jogos Olímpicos deixaram de acontecer três vezes nesse período.

4. Temos:

- $S_{10} = \frac{10\,(a_1 + a_{10})}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 100 = 5 \cdot (a_1 + a_1 + 9r) \Rightarrow 2a_1 + 9r = 20$ (I)

- $S_{20} = \frac{20\,(a_1 + a_{20})}{2}$

  $400 = 10 \cdot (a_1 + a_1 + 19r) \Rightarrow 2a_1 + 19r = 40$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos: $a_1 = 1$ e $r = 2$

$a_{30} = a_1 + 29r = 1 + 29 \cdot 2 = 59$

Assim: $S_{30} = \frac{30(a_1 + a_{30})}{2} = 15 \cdot (1 + 59) = 900$

Portanto, S_{30} é, sim, o quadrado de 30.

5. O primeiro número na forma 2^k, com $k \in \mathbb{N}$, entre 3 e 3.000 é o número $2^2 = 4$, e o último é $2^{11} = 2.048$.

Sabemos que esses números estão em PG de razão $q = 2$. Aplicando a fórmula do termo geral de uma PG, temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2.048 = 4 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 512 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$

6. PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ e $q > 0$

$a_1 + a_3 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{9}{2}$ (I)

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = (a_1)^5 \cdot q^{10} = 1.024$

$(a_1 \cdot q^2)^5 = 4^5 \Rightarrow a_1 \cdot q^2 = 4$ (II)

Substituindo o valor de $a_1 \cdot q^2$ por 4 na equação (I), obtemos:

$a_1 + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$

Substituindo o valor de a_1 por $\frac{1}{2}$ na equação (II), obtemos:

$\frac{1}{2}q^2 = 4 \Rightarrow q = 2\sqrt{2}$ ou $q = -2\sqrt{2}$ (não serve)

Então: $a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ e $a_3 = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$

Assim, o produto é:

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

7. Na equação dada, o primeiro membro representa a soma de uma PG infinita, com $a_1 = x$ e $q = \frac{1}{3}$; então:

$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}} = 9 \Rightarrow x = 9 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow x = 6$$

Logo, $S = \{6\}$.

8. Vamos representar a PA e a PG, com $r \in \mathbb{N}$.

PA $(3, 3 + r, 3 + 2r, 3 + 3r, 3 + 4r, 3 + 5r, 3 + 6r, 3 + 7r)$

PG $(3 + r, 3 + 3r, 3 + 7r)$

Então, devemos ter:

$\frac{3 + 3r}{3 + r} = \frac{3 + 7r}{3 + 3r} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3 + 3r)^2 = (3 + r) \cdot (3 + 7r) \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 + 18r + 9r^2 = 9 + 21r + 3r + 7r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^2 - 6r = 0 \Rightarrow 2r(r - 3) = 0 \Rightarrow r = 0$ ou $r = 3$

- Se $r = 0$, então: PG (3, 3, 3) e $S_3 = 9$
- Se $r = 3$, então: PG (6, 12, 24) e $S_3 = 42$

Portanto, a soma dos termos da PG é 9 ou 42.

9. $\left(\frac{1}{3}, a, 27\right)$ é PG, com $a > 0$; então:

$$\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{27}{a} \Rightarrow a^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 3$ ou $a = -3$ (não serve)

Como 9 é razão da PG e também da PA, temos:

$x + y + z = 18$

$x + x + r + x + 2r = 18$

$3x + 3r = 18$

$3x + 3 \cdot 9 = 18$

$3x = 18 - 27$

$3x = -9$

$x = -3$

10. $(40, x, y, 5, \ldots)$ é PG de razão q; então:

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$5 = 40 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Assim, $\left(\frac{1}{2}, 8 - a, \frac{7}{2}, \ldots\right)$ é PA; então:

$8 - a - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - (8 - a) \Rightarrow 2a = 16 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 6$

11.
- O 20º termo da sequência dada é o 10º termo da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, em que o primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$. Então:

  $$a_{20} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{1.024}$$

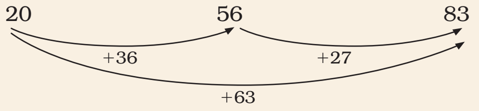
- O 31º termo da sequência dada é o 16º termo da PA (2, 4, 6, 8, ...), em que o primeiro termo é 2 e a razão é 2. Então:
  $a_{31} = 2 + 15 \cdot 2 = 32$
  Logo: $a_{20} \cdot a_{31} = \frac{1}{1.024} \cdot 32 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$
  alternativa e

12. Queremos saber a soma das distâncias que o pêndulo percorrerá até que pare. Supondo que o número de oscilações seja tão grande quanto se queira, vamos determinar a soma de uma PG infinita, com $a_1 = x$ e $q = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x}{1-\frac{1}{3}} = \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{3x}{2} = 1{,}5x$$

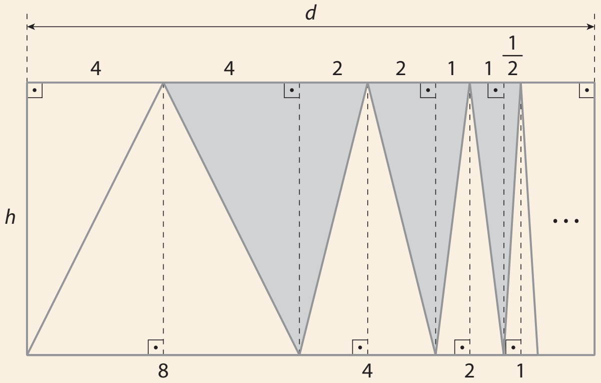
Ou seja, o pêndulo percorrerá 1,5*x* m até parar.

13.



Os possíveis valores da razão dessa PA são os valores dos divisores comuns de 36, 27 e 63. Portanto, os possíveis valores da razão dessa PA são 1, 3 ou 9.

14. Representando as regiões hachuradas em cinza, temos:



ADILSON SECCO

- Sequência das áreas dos infinitos triângulos hachurados: $\left(\frac{6h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{3h}{4}, \ldots\right)$
  $a_1 = \frac{6h}{2} = 3h$ e $q = \frac{1}{2}$
  A soma das áreas dos infinitos triângulos hachurados na figura é 51; logo:
  $$\lim_{n \to \infty} S_n = 51 \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = 51 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \frac{3h}{1-\frac{1}{2}} = 51 \Rightarrow h = \frac{51}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{17}{2}$$
- $d = 8 + 4 + 2 + 1 + \ldots$
  $$d = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$
  Assim, a área, em centímetro quadrado, do retângulo de lados de medidas *h* e *d* será:
  $$A = \frac{17}{2} \cdot 16 = 136$$

alternativa c

Autoavaliação

1. (2, 5, 8, 11, ...) é uma PA e (3, 12, 48, 192, ...) é uma PG. Ambas são sequências.
alternativa b

2. A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o antecedente por 2.
alternativa c

3. $a_1 = 7$, $r = -2$ e o termo geral a_n é determinado por:
$a_n = a_1 + (n-1)r$
$a_n = 7 + (n-1) \cdot (-2)$
$a_n = 9 - 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
alternativa d

4. Como a lei de formação de uma PA representa uma função do 1º grau com domínio $\mathbb{N}$, o gráfico de uma PA é formado por pontos que pertencem ao gráfico de uma função afim.
alternativa a

5. $S_{20} = \frac{20 \cdot (1 + 20)}{2} \Rightarrow S_{20} = 210$
alternativa c

6. $q = \frac{-6}{-2} = \frac{-18}{-6} = 3$
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = (-2) \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
alternativa b

7. Temos uma PG na qual $a_1 = 20.000$ e $q = 1{,}02$. Queremos obter o valor de a_{11}. Então:
$a_{11} = 20.000 \cdot 1{,}02^{10} \simeq 24.380$
alternativa b

8. Como a lei de formação de uma PG representa uma função exponencial com domínio $\mathbb{N}$, os pontos do gráfico da PG pertencem ao gráfico de uma função exponencial.
alternativa c

9. $q = \frac{24}{3} = \frac{192}{24} = 8$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$$

$$S_4 = \frac{3 \cdot (8^4 - 1)}{8-1} \Rightarrow S_4 = \frac{3 \cdot 4.095}{7} \Rightarrow S_4 = 1.755$$

alternativa d

10. $q = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

alternativa a

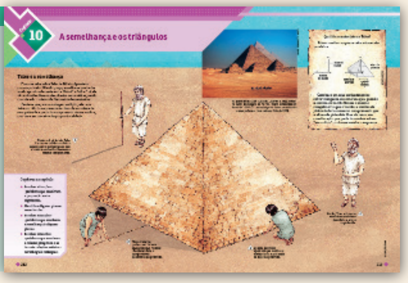
11. $x = 2{,}2333\ldots = 2{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$
A partir da segunda parcela, temos uma PG, com $a_1 = 0{,}03$ e $q = 0{,}1$. Então:
$$2{,}2333\ldots = 2{,}2 + \frac{0{,}03}{1-0{,}1} = 2{,}2 + \frac{3}{90} = \frac{67}{30}$$
alternativa d

12. Seja a PA $(x - r, x, x + r)$.
Temos: $x - r + x + x + r \Rightarrow x = 10$
Então, temos a PA $(10 - r, 10, 10 + r)$.
Sabemos que, adicionando 1, 2 e 9, respectivamente, a esses termos, obtemos a PG $(11 - r, 12, 19 + r)$.
Então:
$$\frac{12}{11-r} = \frac{19+r}{12} \Rightarrow 209 + 11r - 19r - r^2 = 144 \Rightarrow$$
$\Rightarrow r^2 + 8r - 65 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 5$ ou $r = -13$
- Se $r = 5$, temos a PA (5, 10, 15).
- Se $r = -13$, temos a PA (23, 10, −3).

Como os três números devem ser positivos, temos a PA (5, 10, 15) e, portanto, o menor deles é 5.
alternativa b

Capítulo 10

A semelhança e os triângulos



Esse capítulo aprofunda os conceitos trabalhados no Ensino Fundamental que são imprescindíveis ao prosseguimento do estudo da Trigonometria.

Nesta etapa do ensino, em que os alunos apresentam maior bagagem e maturidade, as demonstrações de teoremas — como o fundamental da proporcionalidade, o de Tales e o de Pitágoras — são muito importantes para organizar e formalizar o pensamento matemático, além de justificarem a validade dessas ferramentas tão usuais na resolução de situações-problema.

A aplicação do teorema de Pitágoras é uma constante no decorrer da coleção. Por exemplo, na obtenção da relação fundamental da Trigonometria (Capítulo 11) ou da fórmula que fornece a distância entre dois pontos do plano cartesiano (volume do 3º ano).

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. **a)** $\frac{x}{6} = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 18$

b) $\frac{1,5}{1,2} = \frac{6,25}{x} \Rightarrow x = 5$

c) $\frac{x}{10} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = 15$

d) $\frac{x+2}{x} = \frac{3x+4}{3x-1} \Rightarrow (x+2)(3x-1) = (3x+4)x \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 4x \Rightarrow x = 2$

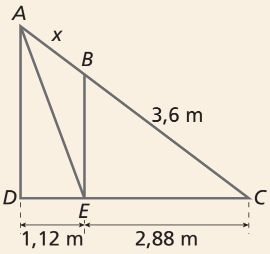
2. Pelo teorema de Tales, as medidas procuradas, em metro, são:

$\frac{20}{22} = \frac{y}{27} \Rightarrow y \simeq 24,5$

$\frac{20}{22} = \frac{32}{x} \Rightarrow x = 35,2$

Logo, $y \simeq 24,5$ m e $x = 35,2$ m.

3.



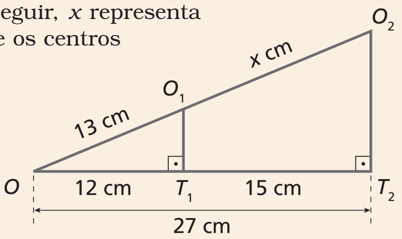
$\frac{3,6}{2,88} = \frac{x}{1,12} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3,6 \cdot 1,12}{2,88} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1,4$

Logo, $x = 1,4$ m.

4. No esquema a seguir, x representa a distância entre os centros O_1 e O_2.



Então:

$\frac{x}{15} = \frac{13}{12} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 13}{12} \Rightarrow x = 16,25$

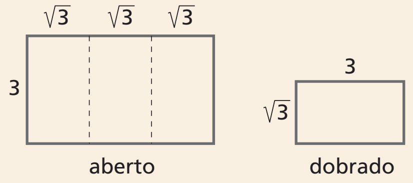
Logo, a distância entre os centros O_1 e O_2 é 16,25 cm.

5. **a)** Não, pois triângulos retângulos podem ter formas diferentes. Por exemplo: dois triângulos retângulos, sendo um deles com catetos que medem a e a e outro com catetos que medem a e $2a$, não são semelhantes.

b) Sim, dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes, pois ambos possuem todos os ângulos internos iguais a 60° e os lados proporcionais, já que a razão entre as medidas dos lados correspondentes é sempre a mesma (os lados de cada um são congruentes entre si).

Comentário: Uma extensão dessa atividade, e do exercício **R2**, da página **219**, pode ser proposta para os alunos: refletir a respeito da semelhança entre outros tipos de polígonos regulares, como pentágonos e hexágonos. Seria interessante que eles elaborassem um texto para registrar e justificar suas conclusões; para isso, podem se basear no desenvolvimento do **R2**. Espera-se que os alunos concluam que polígonos regulares com a mesma quantidade de lados serão sempre semelhantes. Por exemplo, hexágonos regulares são sempre semelhantes, já que os ângulos internos correspondentes são sempre congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. Durante as reflexões, pode ser necessário discutir com os alunos o conceito de polígono regular, lembrando que esse tipo de figura apresenta os ângulos internos congruentes e os lados congruentes.

6.



Razão entre as larguras: $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Razão entre os comprimentos: $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Portanto, os retângulos são semelhantes, com razão de semelhança $\sqrt{3}$.

Comentário: Se necessário, revisar com os alunos a racionalização de denominadores.

7. **a)** Como os retângulos são semelhantes, temos:

$\frac{1}{3} = \frac{3}{A'B'} \Rightarrow A'B' = 9$

Logo, o comprimento do retângulo maior é 9 cm.

b) A razão de semelhança é $\frac{1}{3}$.

c) Perímetro de $ABCD$: 8 cm
Perímetro de $A'B'C'D'$: 24 cm
Logo, a razão entre os perímetros é $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

d) Área de $ABCD$: $(3 \cdot 1)$ cm² = 3 cm²
Área de $A'B'C'D'$: $(9 \cdot 3)$ cm² = 27 cm²
Logo, a razão entre as áreas é $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

Comentário: O objetivo da questão é fazer os alunos notarem que a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança, enquanto a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança (como concluído no boxe **Reflita** da página **219**).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. **a)** Com uma régua, obtemos $AB = 5{,}8$ cm.
Como a escala é 1 : 75.000.000, podemos efetuar:

$$\frac{1}{75.000.000} = \frac{5{,}8}{x} \Rightarrow x = 435.000.000$$

Logo, a distância real é: 435.000.000 cm = 4.350 km

b) Com uma régua, obtemos $CD = 5{,}7$ cm.

Assim: $\frac{1}{75.000.000} = \frac{5{,}7}{y} \Rightarrow y = 427.500.000$

Logo, a distância real é: 427.500.000 cm = 4.275 km

9. Sejam:
L = largura do terreno
l = largura da oficina
C = comprimento do terreno
c = comprimento da oficina

a) Sabemos que: $\frac{l}{L} = \frac{c}{C} = \frac{2}{5}$

Razão entre as áreas: $\frac{l \cdot c}{L \cdot C} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\%$

b) Sabemos que a área do terreno é 1.440 m² e que a razão entre as áreas é $\frac{4}{25}$. Assim, sendo x a área da oficina:

$$\frac{4}{25} = \frac{x}{1.440} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 1.440}{25} \Rightarrow x = 230{,}4$$

Logo, a área da oficina é 230,4 m².

10. Aplicando a ideia de semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{h}{5} = \frac{15}{3} \Rightarrow h = 25$$

alternativa a

11. **a)** Pela congruência entre os ângulos, concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Logo:

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 7{,}5$$

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 9$$

b) Temos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Logo:

$$\frac{2}{x+2} = \frac{x+4}{12} \Rightarrow (x+2)(x+4) = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow x = -8 \text{ ou } x = 2$$

O valor negativo não serve, pois teríamos um valor negativo para a medida de um lado. Logo, $x = 2$.

12. Pela semelhança entre os triângulos ABD e ECD, temos:

$$\frac{x}{1{,}7} = \frac{5{,}7 + 2{,}3}{2{,}3} \Rightarrow x \simeq 5{,}9$$

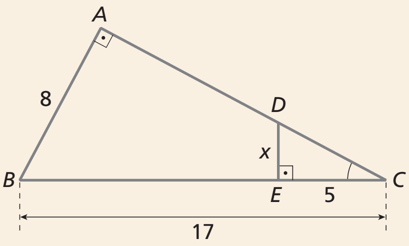
Logo, a altura aproximada do poste é 5,9 metros.

13. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Logo:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{x}{21} \Rightarrow x = 14$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{12+y} \Rightarrow y = 6$$

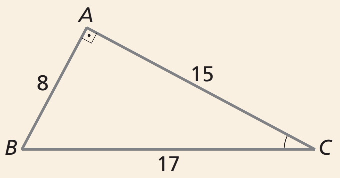
14.

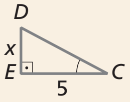


No $\triangle ABC$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$17^2 = 8^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 289 - 64 = 225 \Rightarrow AC = 15$$

Desenhando os triângulos ABC e EDC, separadamente, temos:



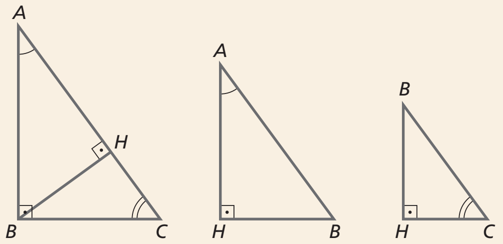


$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C \cong D\hat{E}C \text{ (retos)} \\ A\hat{C}B \cong E\hat{C}D \text{ (comum)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{15}{5} \Rightarrow x = \frac{40}{15} \Rightarrow x = 2\frac{10}{15}$$

alternativa b

15. Desenhando os triângulos separadamente, temos:



Os triângulos AHB e BHC são semelhantes ao triângulo ABC, pois têm dois ângulos respectivamente congruentes a dois ângulos do triângulo ABC.
Logo, os triângulos AHB e BHC são semelhantes entre si.

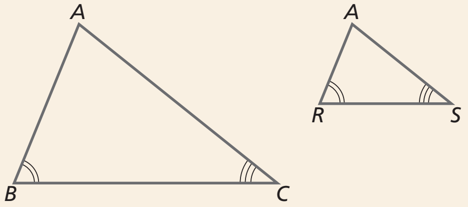
16. **a)** Como $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$, sabemos que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ estão contidos em retas transversais a $\overline{RS}$ e $\overline{BC}$. Assim: $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SC}$

Como $AR = RB$, temos:

$$1 = \frac{AS}{SC} \Rightarrow AS = SC$$

Logo, S é o ponto médio de $\overline{AC}$.

b) Como $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$, temos:

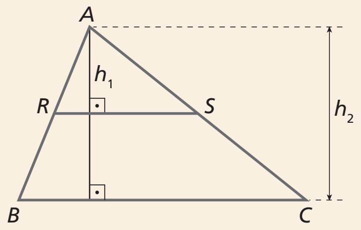


O triângulo ABC é semelhante ao triângulo ARS, pois tem dois ângulos respectivamente congruentes. Assim:

$$\frac{AB}{AR} = \frac{BC}{RS} \Rightarrow \frac{2 \cdot AR}{AR} = \frac{BC}{RS} \Rightarrow RS = \frac{BC}{2}$$

Logo, RS é a metade de BC.

c) Na figura a seguir, h_1 representa a medida da altura do triângulo ARS relativa ao lado $\overline{RS}$, e h_2 representa a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A reta que contém as alturas dos triângulos é transversal às retas paralelas $\overleftrightarrow{RS}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Logo:

$$\frac{AR}{AB} = \frac{h_1}{h_2}$$

Mas $AB = 2 \cdot AR$. Então:

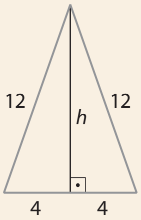
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_2 = 2 \cdot h_1$$

Logo, verificamos que $h_2 = 2 \cdot h_1$.

d) Resposta possível:
A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo e é paralela a um dos outros lados intercepta o terceiro lado e a altura em seus pontos médios.

Comentário: Espera-se, com o boxe **Reflita** da página **219**, com o exercício **7** e com esse exercício, que os alunos concluam que, se for conhecido o valor da razão de semelhança entre duas figuras, ela pode ser utilizada para comparar quaisquer elementos lineares dessas duas figuras.

17. **a)** Traçando a altura, obtemos a figura ao lado.

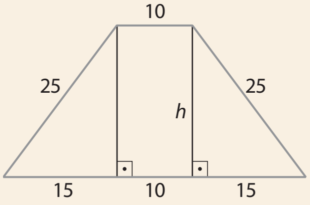


Assim:

$h^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Logo, a altura é $8\sqrt{2}$ m.

b) Traçando as alturas, obtemos a figura a seguir.

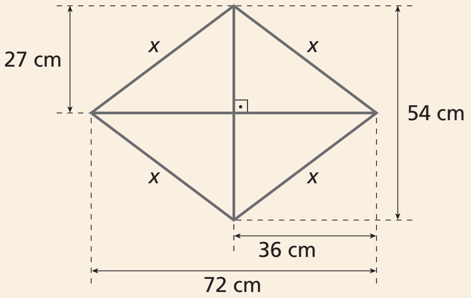


Assim:

$h^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 20$

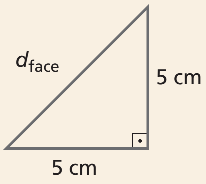
Assim, a altura é 20 m.

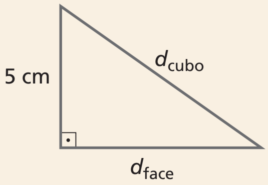
18. Como as diagonais de um losango interceptam-se nos seus pontos médios, temos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$36^2 + 27^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 2.025 \Rightarrow x = 45$
Logo, o perímetro do losango é 4 · 45, ou seja, 180 cm.

19.





a) Pelo teorema de Pitágoras, temos:

- $(d_{face})^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow d_{face} = 5\sqrt{2}$
  Portanto, a medida da diagonal de uma face é $5\sqrt{2}$ cm.
- $(d_{cubo})^2 = (d_{face})^2 + 5^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (d_{cubo})^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 + 5^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (d_{cubo})^2 = 75 \Rightarrow$
  $\Rightarrow d_{cubo} = 5\sqrt{3}$
  Logo, a medida da diagonal do cubo é $5\sqrt{3}$ cm.

b) Usando o teorema para obter a diagonal da face, temos:
$(d_{face})^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2}$
Considerando o resultado anterior, por meio do teorema de Pitágoras, verificamos que:
$(d_{cubo})^2 = (d_{face})^2 + a^2 \Rightarrow (d_{cubo})^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (d_{cubo})^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow d_{cubo} = 3a^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{cubo} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d_{cubo} = a\sqrt{3}$
Portanto, as medidas da diagonal e da aresta do cubo se relacionam da seguinte maneira:
$d_{cubo} = a\sqrt{3}$

Comentário: O objetivo principal dessa atividade é que os alunos apliquem o teorema de Pitágoras para verificar algumas relações entre a medida da aresta de um cubo, da diagonal da face de um cubo e da diagonal do cubo. Essas relações podem ser trabalhadas para o caso de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*. Para isso, os alunos terão de refletir sobre alguns aspectos desse tipo de sólido geométrico, por exemplo:

a) Como são as faces de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*?

b) Como se relacionam as medidas das diagonais das faces desse paralelepípedo com as medidas *a*, *b* e *c* de suas arestas?

c) Como se relacionam as medidas das arestas com a medida da diagonal desse paralelepípedo?

Espera-se que os alunos percebam que, considerando o paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*, são verificadas as seguintes relações entre as medidas da diagonal das faces e as medidas das arestas:

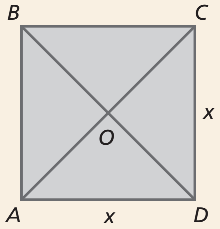
- $d_{face\ 1} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $d_{face\ 2} = \sqrt{a^2 + c^2}$
- $d_{face\ 3} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Os alunos também devem perceber que, para o mesmo paralelepípedo, a medida da diagonal do paralelepípedo e a medida das arestas relacionam-se da seguinte forma:

$d_{paralelepípedo} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

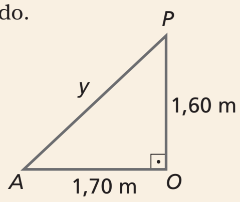
20. Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$10^2 = a^2 + b^2$
Mas, pela proporção, temos:
$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4b}{3}$
Então:
$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = 100 \Rightarrow \frac{25}{9}b^2 = 100 \Rightarrow b = 6$
Assim, $a = 8$.
Logo, $a = 8$ cm e $b = 6$ cm.

21. Seja *x* a medida de um dos lados do piso. Esquematizando esse piso, temos a figura ao lado.



Área do piso = 5,76 m²
$x^2 = 5{,}76 \Rightarrow x = 2{,}4$
Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(AC)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (AC)^2 = 11{,}52 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC \simeq 3{,}4$

Agora, consideramos o $\triangle AOP$, em que *AO* é metade de *AC*, $\overline{OP}$ representa o mastro central e *y* é a medida da haste lateral. Veja a figura ao lado.



$y^2 = (1{,}7)^2 + (1{,}6)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y \simeq 2{,}33$

Cada haste lateral mede, aproximadamente, 2,33 m.

22. **a)** Resposta possível:
6, 8, 10, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$
5, 12, 13, pois $5^2 + 12^2 = 13^2$

b) Quando as medidas dos lados de um triângulo formam um terno pitagórico, ele é um triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.

c) Sim. Por exemplo, 1, 1 e $\sqrt{2}$ formam um triângulo retângulo, mas não um triângulo pitagórico, já que $\sqrt{2}$ não é um número natural.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Comentário: Avaliar a conveniência de explorar mais o tema "triângulos pitagóricos" propondo a questão: "Mostrar que o único triângulo pitagórico cujas medidas dos lados são números naturais consecutivos é o triângulo de lados 3, 4 e 5".

Resolução:

Seja o triângulo retângulo com lados de medidas consecutivas $(a - 1)$, a e $(a + 1)$. Então:

$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + a^2$

$a^2 - 4a = 0$

$a = 0$ (não serve) ou $a = 4$

Logo, as únicas medidas possíveis para os lados do triângulo são 3, 4 e 5.

23. **a)** Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$(IA)^2 = (PA)^2 + (PI)^2 \Rightarrow 17^2 = 15^2 + (PI)^2 \Rightarrow PI = 8$

Logo, a medida do cateto $\overline{PI}$ é 8 cm.

b) Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:

$h \cdot 17 = 8 \cdot 15 \Rightarrow h \simeq 7{,}1$

Logo, a medida h dessa altura é, aproximadamente, 7,1 cm.

c) Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:

$8^2 = 17 \cdot m \Rightarrow m \simeq 3{,}8$

$15^2 = 17 \cdot n \Rightarrow n \simeq 13{,}2$

Logo, as medidas m e n das projeções dos catetos sobre a hipotenusa são, respectiva e aproximadamente, 3,8 cm e 13,2 cm.

Comentário: Caso os alunos não se recordem das relações métricas, os itens **b** e **c** podem ser resolvidos apenas pela semelhança de triângulos.

Exercícios complementares

1. Como a escala adotada na maquete é de 1 : 250, então:

$$\frac{2.800}{250}\text{ cm} = 11{,}2\text{ cm}$$

$$\frac{1.200}{250}\text{ cm} = 4{,}8\text{ cm}$$

alternativa c

2. Pelas medidas da caneta (na foto e real), podemos calcular a escala da foto:

$$\frac{1{,}4}{16{,}8} = \frac{1}{12} = 1 : 12$$

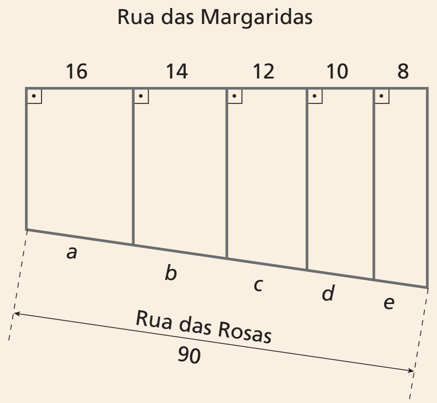
Com essa escala, podemos calcular a largura x e o comprimento y reais da pegada:

$$\frac{1}{12} = \frac{2{,}2}{x} \Rightarrow x = 26{,}4$$

$$\frac{1}{12} = \frac{3{,}4}{y} \Rightarrow y = 40{,}8$$

alternativa d

3. Sendo a, b, c, d e e as medidas procuradas, em metro, temos:



Pelo teorema de Tales, temos:

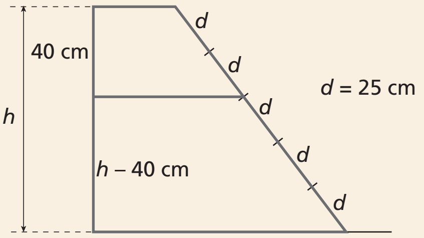
$$\frac{16 + 14 + 12 + 10 + 8}{90} = \frac{2}{3} = \frac{16}{a} \Rightarrow a = 24$$

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{b} \Rightarrow b = 21 \qquad \frac{2}{3} = \frac{10}{d} \Rightarrow d = 15$$

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{c} \Rightarrow c = 18 \qquad \frac{2}{3} = \frac{8}{e} \Rightarrow e = 12$$

Assim, a medida da frente de cada terreno para a Rua das Rosas, da esquerda para a direita, é 24 m, 21 m, 18 m, 15 m e 12 m.

4. O esquema a seguir representa a escada em questão, e h é a altura da escada.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{2d}{40} = \frac{3d}{h - 40} \Rightarrow \frac{50}{40} = \frac{75}{h - 40} \Rightarrow h = 100$$

Logo, a altura dessa escada é 100 cm.

5. Se $AB = 5 \cdot (AD) = 5 \cdot (FB)$, temos:

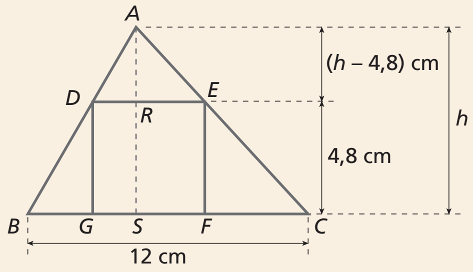
$FD = 3 \cdot (AD)$ e $AF = 4 \cdot (AD)$

Então:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{FG}{DE} \Rightarrow \frac{FG}{DE} = \frac{4 \cdot (AD)}{AD} \Rightarrow \frac{FG}{DE} = 4$$

alternativa b

6. Como o perímetro do quadrado é 19,2 cm, a medida do lado é 4,8 cm.

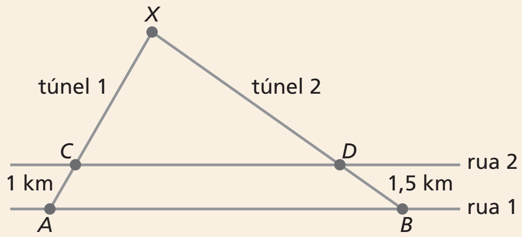


Como $\overline{DE} \,/\!/\, \overline{BC}$, os triângulos ADE e ABC são semelhantes. Então:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AR}{AS} \Rightarrow \frac{4{,}8}{12} = \frac{h - 4{,}8}{h} \Rightarrow h = 8$$

Portanto, a altura mede 8 cm.

7.



Túnel 1: $AX = 12 \cdot 250 = 3.000$

Logo, o túnel 1 tem 3.000 m = 3 km de comprimento.

$\triangle CXD \sim \triangle AXB$

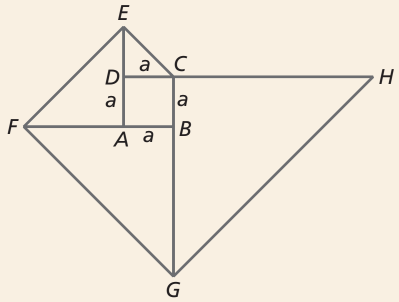
$$\frac{3}{1} = \frac{BX}{1{,}5} \Rightarrow BX = 4{,}5$$

Assim, BX tem 4,5 km = 4.500 m de comprimento.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Se são perfurados 12 m por dia, serão necessários:
$\frac{4.500}{12} = 375$ dias para chegar a X na construção do túnel 2.
$375 - 250 = 125$ dias de antecedência
alternativa e

8.



Todos os triângulos são semelhantes, pois são retângulos e isósceles. Então:

$\triangle EDC$ é isósceles de lado $a \Rightarrow EC = a\sqrt{2}$

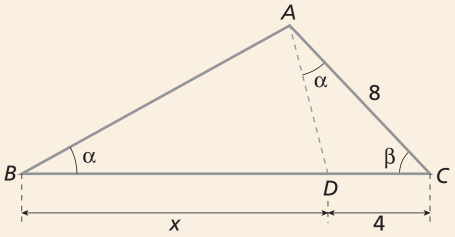
$\triangle AEF$ é isósceles de lado $2a \Rightarrow EF = 2a\sqrt{2}$

$\triangle BFG$ é isósceles de lado $3a \Rightarrow FG = 3a\sqrt{2}$

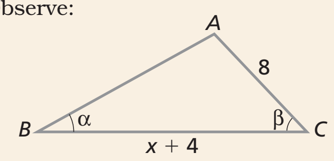
$\triangle CGH$ é isósceles de lado $4a \Rightarrow GH = 4a\sqrt{2}$

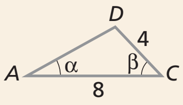
$$\frac{GH}{CE} = \frac{4a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{GH}{CE} = 4$$

9.



Os triângulos ABC e DAC são semelhantes, pois ambos têm ângulos α e β.
Observe:



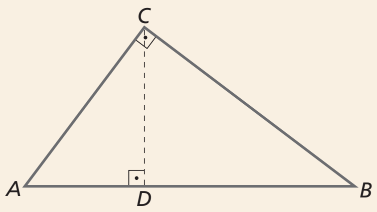


$$\frac{x+4}{8} = \frac{8}{4} \Rightarrow x + 4 = 16 \Rightarrow x = 12$$

Portanto, $BD = x = 12$ cm.
alternativa c

10. **a)** $\overline{CD}$ representa a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

b)



$\triangle ABC \sim \triangle ACD$, pois: $\begin{cases} A\hat{C}B \cong A\hat{D}C \text{ (ângulos retos)} \\ C\hat{A}B \cong C\hat{A}D \text{ (ângulo comum)} \end{cases}$

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$, pois: $\begin{cases} A\hat{C}B \cong C\hat{D}B \text{ (ângulos retos)} \\ C\hat{B}A \cong C\hat{B}D \text{ (ângulo comum)} \end{cases}$

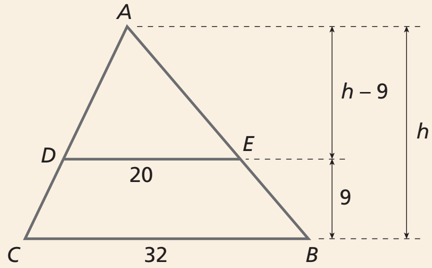
Portanto, $\triangle ACD \cong \triangle CBD$.

Assim, os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$(CD) \cdot (CD) = (AD) \cdot (DB)$
$(CD)^2 = (AD) \cdot (DB)$

11.

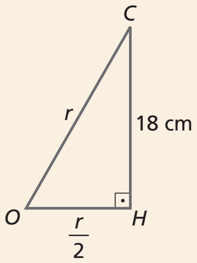


No esquema, h representa a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{CB}$ (medidas em centímetro).
Como $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$, sabemos que os triângulos ABC e AED são semelhantes. Então:

$$\frac{h-9}{h} = \frac{20}{32} \Rightarrow h = 24$$

Logo, a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{CB}$ é 24 cm.

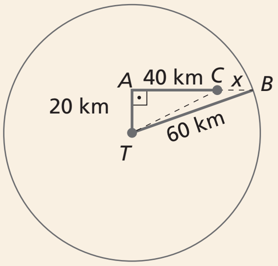
12. Como o triângulo ABC está inscrito em uma circunferência, temos:
$OA = OB = OC = r$, sendo r o raio da circunferência.
Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OCH.



$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 18^2 \Rightarrow r^2 - \frac{r^2}{4} = 324 \Rightarrow r = 12\sqrt{3}$$

Logo, o raio da circunferência mede $12\sqrt{3}$ cm.

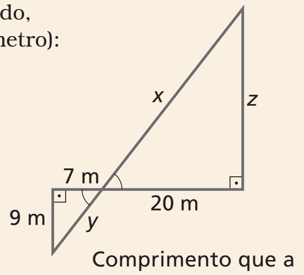
13. Considere o seguinte esquema da situação, em que x é a distância a ser encontrada.



O ponto B é o ponto mais a leste de C e está a 20 km ao norte de T.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABT, temos:
$60^2 = 20^2 + (40 + x)^2$
$x^2 + 80x - 1.600 = 0$
$x = 40\sqrt{2} - 40$ ou $x = -40\sqrt{2} - 40$ (não serve)
Logo, a distância procurada é $40\left(\sqrt{2} - 1\right)$ km.
alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

14. Considere o esquema ao lado, da situação (medidas em metro):



Comprimento que a corda deve ter: $x + y$

No menor triângulo retângulo, temos:

$9^2 + 7^2 = y^2$

$y = \sqrt{130} \Rightarrow y \simeq 11{,}4$

Os triângulos retângulos da figura são semelhantes, pois têm dois ângulos internos congruentes. Então:

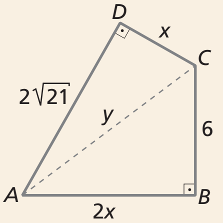
$\frac{x}{y} = \frac{20}{7} \Rightarrow x \simeq 32{,}6$

$x + y \simeq 32{,}6 + 11{,}4 = 44$

Logo, a parte esticada da corda deve medir, aproximadamente, 44 m.

15. Observe a figura ao lado. Sendo $AC = y$ e $AB = 2x$, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABC e CDA, temos:

$$\begin{cases} y^2 = (2x)^2 + 6^2 \\ y^2 = x^2 + \left(2\sqrt{21}\right)^2 \end{cases}$$



$(2x)^2 + 6^2 = x^2 + \left(2\sqrt{21}\right)^2$

$4x^2 + 36 = x^2 + 84$

$3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

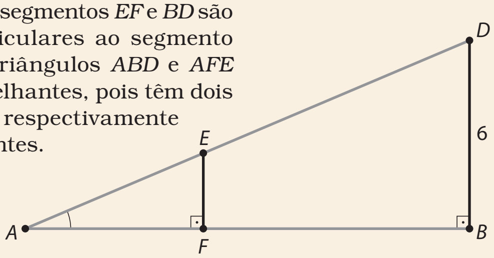
Substituindo $x = 4$ em $y^2 = 4x^2 + 36$, obtemos:

$y^2 = 4 \cdot 4^2 + 36 \Rightarrow y^2 = 100 \Rightarrow y = 10$

Portanto, $AC = y = 10$ m.

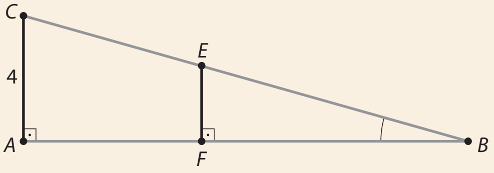
alternativa a

16. Como os segmentos EF e BD são perpendiculares ao segmento AB, os triângulos ABD e AFE são semelhantes, pois têm dois ângulos respectivamente congruentes.



Então, podemos montar a proporção: $\frac{EF}{6} = \frac{AF}{AB}$

Da mesma maneira, os triângulos ABC e FBE são semelhantes.



Assim: $\frac{EF}{4} = \frac{FB}{AB}$

Temos, então, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{EF}{6} = \frac{AF}{AB} \quad \text{(I)} \\ \frac{EF}{4} = \frac{FB}{AB} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando as equações (I) e (II) membro a membro, obtemos:

$\frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB}$

Pela figura, sabemos que $AF + FB = AB$. Então:

$\frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \frac{AB}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = 1 \Rightarrow 10 \cdot EF = 24 \Rightarrow EF = 2{,}4$

Portanto, a haste EF deverá ter 2,4 m de comprimento.

alternativa c

Autoavaliação

1. Pelo teorema de Tales, temos: $\frac{2}{3{,}8} = \frac{x}{5{,}7} \Rightarrow x = 3$

alternativa c

2. Os triângulos AIM e AMO são semelhantes, pois são triângulos isósceles e retângulos.

alternativa a

3. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois têm todos os ângulos internos medindo 60°.

alternativa c

4. Se $AB = 10$ cm e $AM = 35$ cm, concluímos que $BM = 25$ cm.

$\frac{10}{15} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 15}{10} \Rightarrow x = 37{,}5$

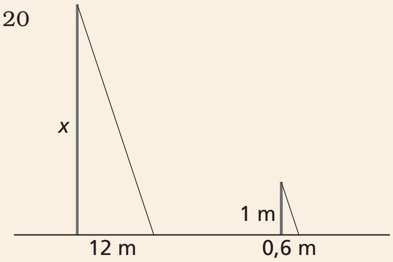
alternativa c

5. Observe a figura a seguir.

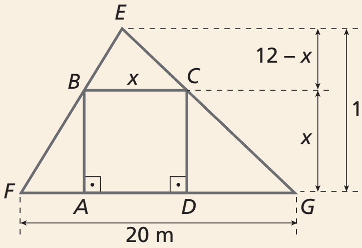
Os triângulos são semelhantes. Então, temos:

$\frac{x}{1} = \frac{12}{0{,}6} \Rightarrow x = 20$

alternativa d



6. Sendo x a medida do lado do quadrado, temos:

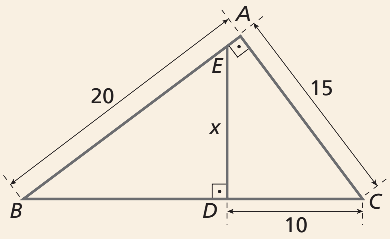


$\triangle EBC \sim \triangle EFG$

$\frac{12 - x}{12} = \frac{x}{20} \Rightarrow 240 - 20x = 12x \Rightarrow x = 7{,}5$

alternativa a

7.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O triângulo ABC é retângulo em A. Então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$(BC)^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow BC = 25$

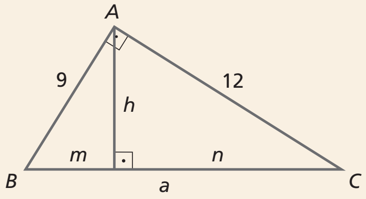
Portanto, $BD = 15$.

$\triangle BDE \sim \triangle BAC$, pois têm um ângulo reto e um ângulo comum. Assim:

$\frac{x}{15} = \frac{15}{20} \Rightarrow x = 11{,}25$

alternativa d

8. Considere a figura:



- $a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow a = 15$
- $h \cdot 15 = 9 \cdot 12 \Rightarrow h = 7{,}2$
- $9^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = 5{,}4$
- $12^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = 9{,}6$

alternativa d

Pesquisa e ação

Essa atividade coloca os alunos diante de um exercício matemático que pressupõe conhecimentos de semelhança de triângulos e proporcionalidade. Para construir a maquete, o ambiente e também cada objeto presente nele deverão ser medidos. A construção da tabela com esses registros pode fazer parte da avaliação da atividade. Após a determinação da escala escolhida, o uso da calculadora pode ser autorizado, já que ela trará agilidade aos cálculos nesse momento do trabalho, não interferindo no conteúdo estudado, ou seja, nas ideias fundamentais da semelhança.

O uso de materiais recicláveis abre espaço para uma abordagem interdisciplinar da atividade, sendo possível discutir a relação entre consumo e recursos finitos na natureza.

Compreensão de texto

A seção *Compreensão de texto* desse capítulo pode ser explorada em uma abordagem interdisciplinar com Física e Arte. Apresenta-se uma propriedade do triângulo que não se encontra em nenhuma outra forma poligonal, a estabilidade. Por isso, a forma triangular é empregada nas mais variadas construções que requerem rigidez.

1. O triângulo é muito empregado nas construções por causa da sua propriedade de estabilidade. Uma estrutura triangular, dependendo da força exercida, pode até quebrar, mas não deforma, tem rigidez.

2. O triângulo não pode alterar sua forma sem alterar o comprimento de seus lados; assim, um sistema de triângulos apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamento pela ação da força aplicada. A força exercida sobre um dos vértices do triângulo se distribui até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Isso não ocorre com módulos quadriláteros, já que são sensíveis ao movimento dos seus vértices e à distribuição desigual das forças, tornando-os menos resistentes e instáveis.

3. Não. A resistência de uma estrutura depende da força aplicada sobre ela, do material utilizado e de como essa estrutura foi construída.

4. Para deixar um módulo quadrilátero estável, devemos "triangularizá-lo". Espera-se que os alunos apresentem respostas possíveis para essa "triangularização", indicando módulos com números diferentes de diagonais do quadrilátero. Eles poderão concluir que, quanto mais diagonais incluirmos no módulo, mais estável ele ficará.

Capítulo 11

Trigonometria no triângulo retângulo

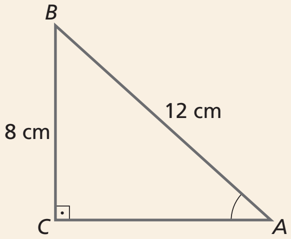
Com base no estudo do conceito de semelhança desenvolvido no Capítulo 10, esse capítulo define as principais razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Estudar as razões trigonométricas e saber aplicá-las na resolução de situações-problema é fundamental para o aprofundamento da Trigonometria no volume do 2º ano, em que serão definidas as funções trigonométricas, outras razões e aplicações. O uso da calculadora científica e a consulta da tabela de razões trigonométricas podem auxiliar na resolução dos exercícios.

◆ Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{12}{13}$; $\cos\ \alpha = \dfrac{5}{13}$; $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{12}{5}$.

2. Do enunciado, temos:



$(AC)^2 = 12^2 - 8^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$

Assim:

$$\text{sen}\ \hat{A} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\ \hat{A} = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{tg}\ \hat{A} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

3. $\cos\ \alpha = \dfrac{x}{45} \Rightarrow x = 45 \cdot 0{,}8 \Rightarrow x = 36$

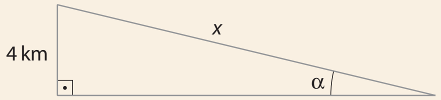
Portanto, x vale 36 cm.

Comentário: No enunciado foram dados os valores de sen α, cos α e tg α. É importante que os alunos percebam que, com essas informações, é possível elaborar mais de uma resolução para a atividade. Seria interessante, então, que fosse proposto a eles resolver o exercício de mais de uma maneira.

4. $\text{tg}\ 60° = \dfrac{r}{1.100} \Rightarrow 1{,}7321 \simeq \dfrac{r}{1.100} \Rightarrow r \simeq 1.905$

Logo, a largura aproximada do rio Amazonas nesse local é 1.905 m.

5. a)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{4}{x} \Rightarrow 0{,}1045 = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x \simeq 38{,}3$

Logo, o avião percorreu aproximadamente 38,3 km até atingir a altura de 4 km.

6. Sabemos que, se α e β são complementares, temos sen α = cos β.

Além disso, $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$. Assim:

$\text{tg}\ 20^\circ = \dfrac{0{,}3420}{0{,}9397} \simeq 0{,}3640$

$\text{sen}\ 70^\circ = \cos 20^\circ = 0{,}9397$

$\cos 70^\circ = \text{sen}\ 20^\circ = 0{,}3420$

$\text{tg}\ 70^\circ = \dfrac{0{,}9397}{0{,}3420} \simeq 2{,}7475$

$\cos 40^\circ = \dfrac{0{,}6428}{0{,}8391} \simeq 0{,}7660$

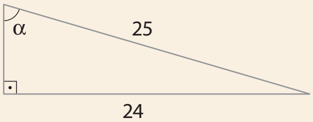
$\text{sen}\ 50^\circ = \cos 40^\circ \simeq 0{,}7660$

$\cos 50^\circ = \text{sen}\ 40^\circ = 0{,}6428$

$\text{tg}\ 50^\circ = \dfrac{0{,}7660}{0{,}6428} \simeq 1{,}1918$

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	**0,3640**
70°	**0,9397**	**0,3420**	**2,7475**
50°	**0,7660**	**0,6428**	**1,1918**
40°	0,6428	**0,7660**	0,8391

7. a) Como $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{24}{25}$, podemos desenhar a figura ao lado.



$x^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Logo, $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$ e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{24}{7}$.

Comentário: O objetivo desse item é mostrar aos alunos que, dada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo, é possível obter as outras razões sem recorrer à relação fundamental da Trigonometria.

b) $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{24}{25}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{576}{625} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{49}{625} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{7}{25}$

Temos, então:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

Comentário: Explicar aos alunos que, como α é um ângulo agudo e cos α é a razão entre as medidas de dois lados de um triângulo, o valor de cos α deve ser positivo.

8. a) $\text{sen}\ 30^\circ = \dfrac{5}{c} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{c} \Rightarrow c = 10$

Logo, o cabo de aço mede 10 m.

b) $\text{tg}\ 30^\circ = \dfrac{5}{h} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{5}{h} \Rightarrow h = \dfrac{15}{\sqrt{3}}$

Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, obtemos $h \simeq 8{,}7$.

Assim, a altura do poste é, aproximadamente, 8,7 m.

9. $\text{sen}\ 30^\circ = \dfrac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot 0{,}5 \Rightarrow h = 1{,}5$

Portanto, a altura h é 1,5 m.

10. a) $\cos 60^\circ = \dfrac{x}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 5$

$\text{sen}\ 60^\circ = \dfrac{y}{10} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{10} \Rightarrow y = 5\sqrt{3}$

b) Pelo teorema de Pitágoras: $x^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

$\text{sen}\ y = \dfrac{4}{8} \Rightarrow \text{sen}\ y = \dfrac{1}{2}$

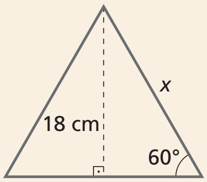
Consultando a tabela de razões trigonométricas, concluímos que $y = 30^\circ$.

11. $\text{sen}\ 60^\circ = \dfrac{18}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{18}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{36}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 20{,}8$



Logo, a medida de cada lado desse triângulo equilátero é, aproximadamente, 20,8 cm.

12. Para cada cabo, temos:

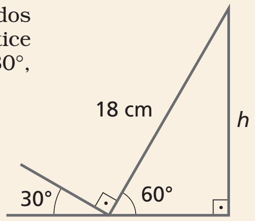
$\text{sen}\ 45^\circ = \dfrac{15}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{15}{x} \Rightarrow x \simeq 21{,}2$

Então, para um cabo, foram usados aproximadamente 21,2 m de cabo de aço.

Como, para prender a antena, foram necessários quatro cabos: $4x \simeq 4 \cdot 21{,}2 = 84{,}8$

Portanto, foram usados cerca de 85 m de cabo de aço.

13. Observando que as medidas dos três ângulos formados no vértice encostado no chão somam 180°, obtemos:

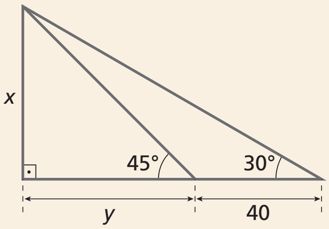


$\text{sen}\ 60^\circ = \dfrac{h}{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{18} \Rightarrow h \simeq 15{,}6$

Portanto, h é, aproximadamente, 15,6 cm.

14. Sendo x a altura da torre, temos:



$\text{tg}\ 45^\circ = \dfrac{x}{y} \Rightarrow 1 = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y = x$

$\text{tg}\ 30^\circ = \dfrac{x}{y + 40} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{x + 40} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 3x \Rightarrow x\left(3 - \sqrt{3}\right) = 40\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{40\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow x \simeq 54{,}6$

alternativa c

15. $\text{sen}\ 20^\circ = \dfrac{h}{3} \Rightarrow h \simeq 3 \cdot 0{,}342 \Rightarrow h \simeq 1{,}026$

Logo, após percorrer 3 km, o avião estará a aproximadamente 1,026 km de altura.

16. a) $\cos 89{,}83^\circ = \dfrac{TL}{TS}$

Em uma calculadora científica, obtemos:

$0{,}0029 \simeq \dfrac{380.000}{TS} \Rightarrow TS \simeq \dfrac{380.000}{0{,}0029}$

Portanto: $TS \simeq 131.034.482$ km

b) $\dfrac{TS}{TL} = \dfrac{131.034.482}{380.000} \simeq 345$

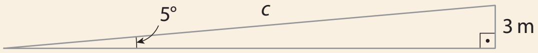
17. a) $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{1}{12} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha \simeq 0{,}0833$

Para obter a medida α na calculadora científica, digitamos 0,0833 e apertamos a tecla $\boxed{\tan^{-1}}$, obtendo $\alpha \simeq 5$. Esse valor também pode ser obtido na tabela trigonométrica.

Logo, o ângulo formado entre a rampa e a horizontal, quando a inclinação é máxima, mede aproximadamente 5°.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Para a inclinação máxima, teremos o triângulo:



$\text{sen } 5° = \dfrac{3}{c} \Rightarrow c \simeq \dfrac{3}{0{,}872} \Rightarrow c \simeq 34{,}4$

Logo, para um desnível de 3 m entre dois andares, devem ser construídos aproximadamente 34,4 m de rampa.

Comentário: Com esse exercício, pode-se trabalhar a ideia da tangente como inclinação. Incentivar os alunos a perceber, no item **a**, que o valor da tangente do ângulo formado entre a rampa e o solo, em porcentagem, coincide com a inclinação da rampa.

Exercícios complementares

1. $\text{tg } 55° = \dfrac{x}{24} \Rightarrow x \simeq 1{,}4281 \cdot 24 \Rightarrow x \simeq 34{,}27$

Logo, o rio tem, aproximadamente, 34,27 m de largura.

2. Seja x a medida do cateto oposto ao ângulo de 22°.

$\text{tg } 22° = \dfrac{x}{80} \Rightarrow x \simeq 0{,}4040 \cdot 80 \Rightarrow x \simeq 32{,}32$

$32{,}32 + 1{,}60 = 33{,}92$

A altura do ninho das araras é, aproximadamente, 33,92 m.

3. A menor distância entre o barco e o ponto P é a medida do segmento $\overline{PQ}$, perpendicular à trajetória do barco.

Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, obtemos a medida dos ângulos internos dos triângulos.

Em seguida, observando que o triângulo APB é isósceles, concluímos que $AB = BP = 2.000$ m.

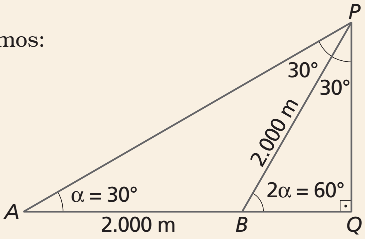
No triângulo PQB, temos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{PQ}{BP} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{PQ}{2.000} \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = 1.000\sqrt{3}$

alternativa b



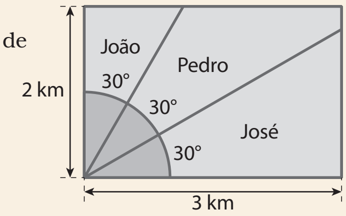
4. Veja, na figura ao lado, que cada irmão ficou com um setor de 30° na área de extração:

Observando o terreno de João, temos:

$\text{tg } 30° = \dfrac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 0{,}58 \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 1{,}16$



Área do terreno de João: $\dfrac{1{,}16 \cdot 2}{2} = 1{,}16$

Área total do terreno: $3 \cdot 2 = 6$

Assim: $\dfrac{1{,}16}{6} \simeq 0{,}19 = 19\%$

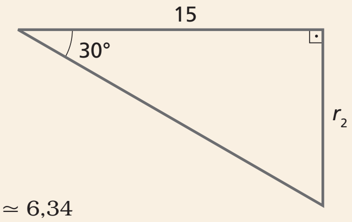
alternativa e

5. Destacando parte da figura, temos:

$\text{tg } 30° = \dfrac{r_2}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 = 15 \cdot 0{,}5774 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 \simeq 8{,}66$



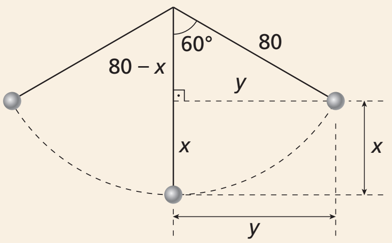
Então:

$r_1 + r_2 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 \simeq 15 - 8{,}66 \Rightarrow r_1 \simeq 6{,}34$

Logo, os raios das circunferências são, aproximadamente, 8,66 cm e 6,34 cm.

6. Observe a figura abaixo.



$\text{sen } 60° = \dfrac{y}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 40\sqrt{3}$

$\cos 60° = \dfrac{80 - x}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{80 - x}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 40$

Logo, $x = 40$ cm e $y = 40\sqrt{3}$ cm.

Autoavaliação

1. $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$; $\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$; $\text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4}$

alternativa c

2. $\text{sen } \alpha = 0{,}6 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

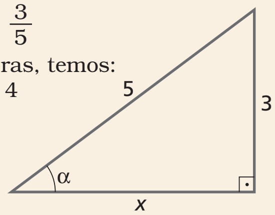
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$\cos \alpha = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

alternativa b

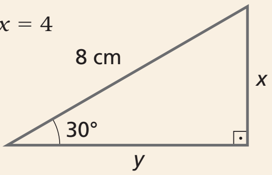


3. $\text{sen } 30° = \dfrac{x}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 4$

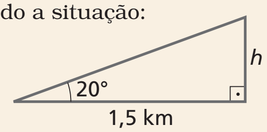
$\cos 30° = \dfrac{y}{8} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{3} \Rightarrow y \simeq 6{,}93$

alternativa a



4. Esquematizando a situação:



Lembrando que 1,5 km = 1.500 m, temos:

$\text{tg } 20° = \dfrac{h}{1.500} \Rightarrow 0{,}3640 = \dfrac{h}{1.500} \Rightarrow h = 546$

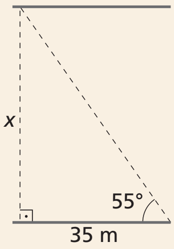
O avião estará a uma altura aproximada de 546 m.

5. Veja, ao lado o esquema da situação.

$\text{tg } 55° = \dfrac{x}{35}$

$x = 35 \cdot 1{,}4281 \Rightarrow x \simeq 50$

Nesse local, a largura do rio é, aproximadamente, 50 m.



6. Dada a figura ao lado, temos:

$\text{tg } 30° = \dfrac{AD}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{AD}{10} \Rightarrow$

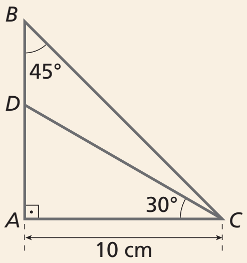
$\Rightarrow AD = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

O $\triangle ABC$ é retângulo isósceles; então, $AB = 10$. Daí:

$BD = AB - AD = 10 - \dfrac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = \dfrac{10\left(3 - \sqrt{3}\right)}{3}$

alternativa a



7. $\text{sen } 6° = \dfrac{4}{AC} \Rightarrow AC \simeq \dfrac{4}{0{,}1045} \simeq 38{,}3$ m

$AB \simeq (1{,}5 + 38{,}3)$ m $\Rightarrow AB \simeq 39{,}8$ m

alternativa d

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

HINO NACIONAL

Letra: Joaquim Osório Duque Estrada
Música: Francisco Manuel da Silva

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas
De um povo heroico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

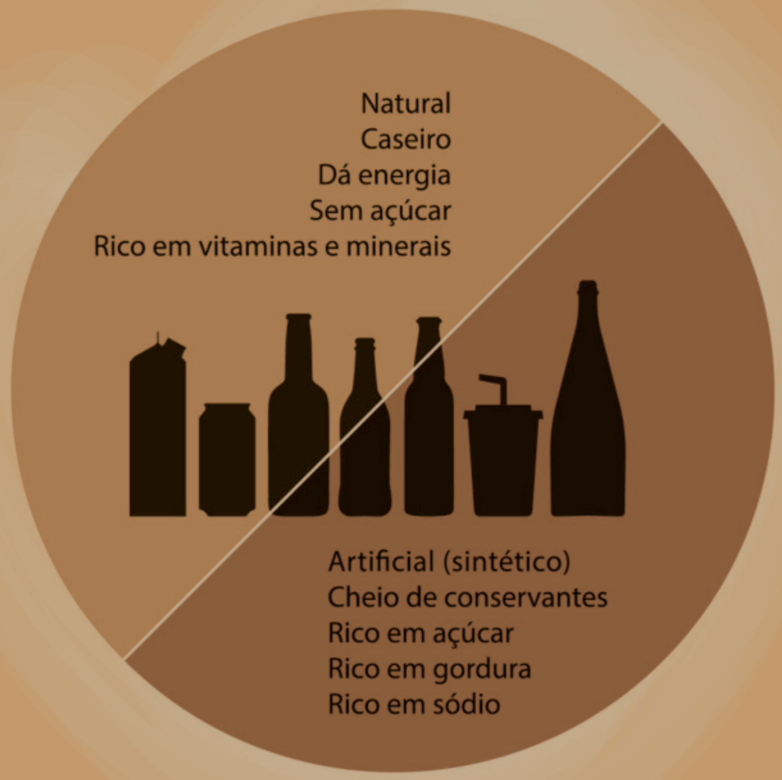
Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
- Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Expectativa x Realidade



Natural
Caseiro
Dá energia
Sem açúcar
Rico em vitaminas e minerais

Artificial (sintético)
Cheio de conservantes
Rico em açúcar
Rico em gordura
Rico em sódio

Você já reparou nas letras miúdas de propagandas e cardápios? A ideia é vender algo atraente, que pareça extremamente saboroso. Lembre-se de que as informações nutricionais vão além das calorias e da aparência de saudável. Por isso, antes de escolher o produto, use a mente para escolher sua refeição.

Este livro didático é um **bem reutilizável** da escola e deve ser **devolvido em bom estado** ao final do ano para uso de outra pessoa no **próximo** período letivo.

ISBN 978-85-16-10503-7

9 788516 105037

FNDE MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

BRASIL GOVERNO FEDERAL

CÓDIGO DO LIVRO:
0195P18023101IM